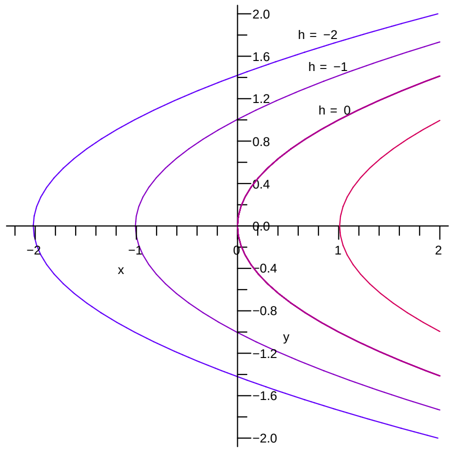
Mathematik für Naturwissenschaftler, Pruscha & Rost
Kap 8 Lösungen

1.

Es ist für $h \in \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x - y^2 = h \iff y = \pm\sqrt{x-h},$$

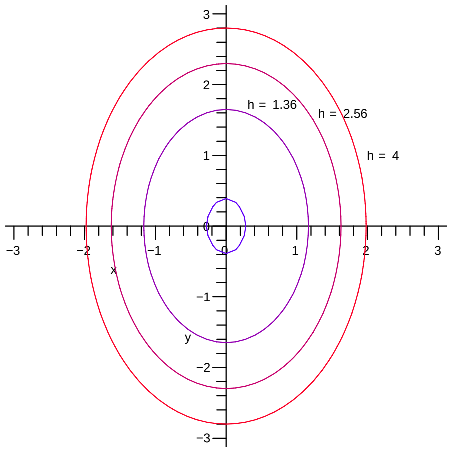
für $x \geq h$. Bei den Höhenlinien handelt es sich um nach rechts geöffnete Parabeln.



Es ist für $h \geq 0$

$$g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{2} = h \iff y = \pm\sqrt{2h - 2x^2},$$

für $x^2 \leq h$. Bei den Höhenlinien handelt es sich bei $h > 0$ um Ellipsen mit den Halbachsenlängen $a = \sqrt{h}, b = \sqrt{2h}$; im Fall $h = 0$ besteht die Höhenlinie nur aus dem Nullpunkt.

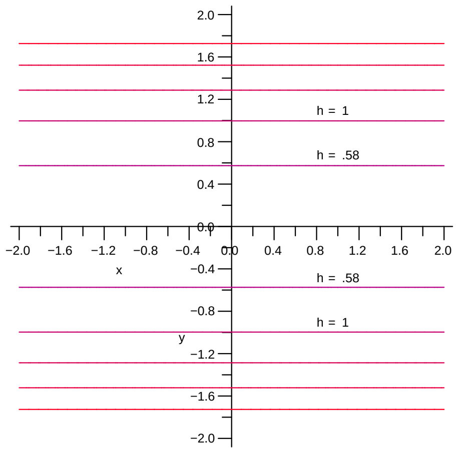


2. **a), b)**

Es ist für $h \geq 0$

$$f(x,y) = y^2 = h \iff y = \pm\sqrt{h}.$$

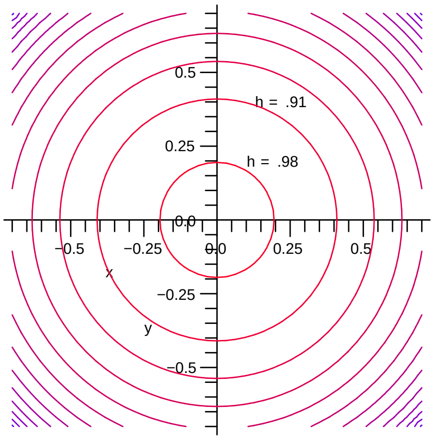
Bei den Höhenlinien handelt es sich um zur x-Achse parallele Geraden, bzw. die x-Achse im Fall $h = 0$.



Es ist für $0 \leq h \leq 1$

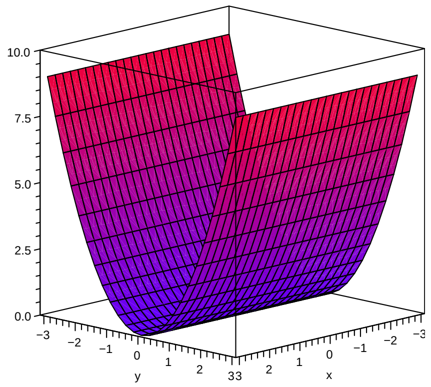
$$g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} = h \iff y = \pm\sqrt{1-h^2-x^2},$$

für $x^2 \leq 1-h^2$. Bei den Höhenlinien handelt es sich um Kreise um den Ursprung mit Radius $\sqrt{1-h^2}$.

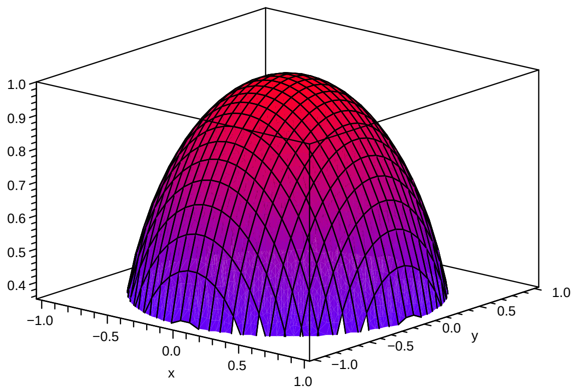


c)

3D-Plot zu f („Halfpipe“)



3D-Plot zu g (obere Halbkugel mit Radius 1)



$\boxed{\textbf{3.}}$ **a)**

Mit

$$f(x) = A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{p} a_{mj}x_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

ist

$$f(\lambda x) = A \cdot (\lambda x) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{1j}\lambda x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{p} a_{mj}\lambda x_j \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{p} a_{mj}x_j \end{pmatrix} = \lambda \cdot Ax = \lambda \cdot f(x)$$

sowie

$$f(x+y) = A\cdot(x+y) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{1j}(x_j+y_j) \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{p} a_{mj}(x_j+y_j) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{1j}x_j + \sum\limits_{j=1}^{p} a_{1j}y_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{p} a_{mj}x_j + \sum\limits_{j=1}^{p} a_{mj}y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{p} a_{mj}x_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{1j}y_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{p} a_{mj}y_j \end{pmatrix} = f(x)+f(y).$$

b) Weil $f_i(x) = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}x_j$, i=1,...,m, ist für $j \in \{1,...,p\}$

$$\partial_j f_i(x) = a_{ij}; \qquad \text{also ist} \quad Df(x) = \big(\partial_j f_i(x)\big)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}} = A.$$

$\boxed{\textbf{4.}}$

Setzen wir $c_j := f(e^{(j)}),\ j=1,...,p$, so gilt für $x \in \mathbb{R}^p$

$$f(x) = f\Big(\sum_{j=1}^{p} x_j e^{(j)}\Big) \underset{(8.35)}{=} \sum_{j=1}^{p} x_j f(e^{(j)}) = \sum_{j=1}^{p} x_j c_j = c^T \cdot x.$$

$\boxed{\textbf{5.}}$ **a)**

Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ fixiert. Falls $y_0 = 0$, so ist $f(x,y_0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist die Funktion $x \longmapsto f(x,y_0)$ stetig. Für $y_0 \neq 0$ ist $x \longmapsto f(x,y_0) = \frac{x\cdot y_0}{x^2+y_0^2}$ als Quotient zweier in $\mathbb{R}$ stetiger Funktionen, nämlich $x \longmapsto x\cdot y_0$ und $x \longmapsto x^2+y_0^2$, selbst wieder stetig. Man beachte, dass stets $x^2+y_0^2 > 0$ ist.

Analog argumentiert man für $y \longmapsto f(x_0,y)$ bei fixiertem $x_0 \in \mathbb{R}$.

b) f ist in $(0,0)$ **nicht** stetig: Wähle Folge $(x_n,y_n), n \in \mathbb{N}$, mit $x_n = y_n \neq 0$ und $x_n \longrightarrow 0$, z.B. $x_n = \frac{1}{n} = y_n$. Dann ist

$$f(x_n,y_n) = \frac{x_n^2}{2x_n^2} = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

c) Nein, denn $(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \longrightarrow (0,0)$ und $(\frac{1}{n},0) \longrightarrow (0,0)$, aber $f(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \longrightarrow \frac{1}{2}$ (siehe b)) und $f(\frac{1}{n},0) \longrightarrow 0$ (siehe a)).
Anders ausgedrückt: Die Funktion

$$g(x,y) = \frac{x\cdot y}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\},$$

läßt sich in $(0,0)$ **nicht** stetig ergänzen.

$\boxed{\textbf{6.}}$ **a)**

Für $y \geq 0\,(t \geq 0)$ ist $y = t^3 = (t^2)^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$;
für $y \leq 0\,(t \leq 0)$ ist $y = t^3 = -|t|^3 = -(|t|^2)^{\frac{3}{2}} = -x^{\frac{3}{2}}$.
Also

$$y = \pm x^{\frac{3}{2}}, \quad x \geq 0.$$

b)

$$f'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}; \quad ||f'(t)|| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = |t|\sqrt{4 + 9t^2}.$$

c)

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_0^1 t\sqrt{4 + 9t^2}\,dt = 3\int_0^1 t\sqrt{\frac{4}{9} + t^2}\,dt \\ &\underset{(+)}{=} \left[\left(\frac{4}{9} + t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \left(\frac{4}{9} + 1\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{27}\left(\sqrt{13^3} - 8\right) \approx 1.44 \end{aligned}$$

Zu (+): Die Funktion $G(t) = \left(\frac{4}{9} + t^2\right)^{\frac{3}{2}}$ ist Stammfunktion zu $3t\sqrt{\frac{4}{9} + t^2}, t \in \mathbb{R}$, denn

$$G'(t) = \tfrac{3}{2} \cdot \left(\tfrac{4}{9} + t^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2t = 3t\sqrt{\tfrac{4}{9} + t^2}.$$

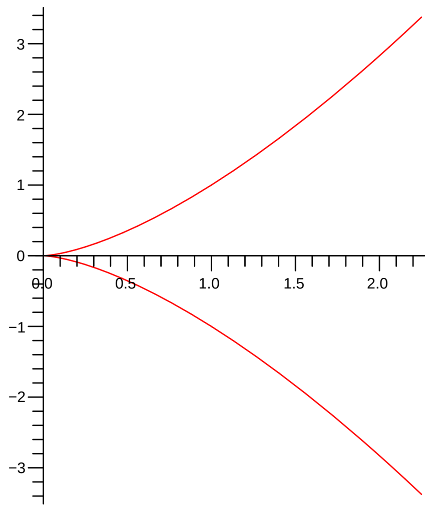


Schaubild der Kurve f für $t \in [-1.5, 1.5]$. Wegen $y' = \pm\frac{3}{2}\sqrt{x}$ liegt bei $x = 0$ eine waagrechte Tangente vor.

$\boxed{\textbf{7.}}$

Es ist

$$\begin{aligned} h(t) &= \begin{pmatrix} \varphi^2(t) \\ \varphi^3(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1], \\ h'(t) &= \begin{pmatrix} 2\varphi(t) \cdot \varphi'(t) \\ 3\varphi^2(t) \cdot \varphi'(t) \end{pmatrix} = \varphi'(t) \cdot \begin{pmatrix} 2\varphi(t) \\ 3\varphi^2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1], \\ ||h'(t)|| &\underset{\varphi'(t)>0}{=} \varphi'(t) \cdot \varphi(t) \cdot \sqrt{4 + 9\varphi^2(t)}, \quad t \in [0,1], \\ L(h) &= 3\int_0^1 \varphi'(t) \cdot \varphi(t)\sqrt{\frac{4}{9} + \varphi^2(t)}\,dt = 3\int_0^1 u\sqrt{\frac{4}{9} + u^2}\,du = L(f) \quad \text{(wie in Aufg. 6c))}, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile die Substitutionsregel mit $u = \varphi(t), du = \varphi'(t)\,dt$ sowie $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$ verwendet haben.

$\boxed{\textbf{8.}}$ **a)**

Es gilt

$$
\begin{aligned}
L(f) &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[\frac{d}{dt}(g(t)\cos t)\right]^2 + \left[\frac{d}{dt}(g(t)\sin t)\right]^2}\,dt \\
&= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[g'(t)\cos t - g(t)\sin t\right]^2 + \left[g'(t)\sin t + g(t)\cos t\right]^2}\,dt \\
&= \int_\alpha^\beta \sqrt{g'(t)^2 \cdot [\cos^2 t + \sin^2 t] + g(t)^2 \cdot [\cos^2 t + \sin^2 t]}\,dt \\
&= \int_\alpha^\beta \sqrt{g'(t)^2 + g(t)^2}\,dt
\end{aligned}
$$

(beim Ausquadrieren heben sich die gemischten Terme gegenseitig auf).

b) Mit $g(t) = t^2$ und der Formel aus a) gilt

$$
L(f) = \int_0^1 \sqrt{t^4 + 4t^2}\,dt \;=\; \int_0^1 t \cdot \sqrt{t^2+4}\,dt \;=\; \frac{1}{3}\left[\left(t^2+4\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \;=\; \frac{1}{3}(\sqrt{5}\cdot 5 - 8) \approx 1.06.
$$

$\boxed{\textbf{9.}}$ **a)**

Es ist für $t \in I$

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t - \cos t \\ \sin t + t\cos t - \sin t \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -t\sin t \\ t\cos t \end{pmatrix}, \\
||f'(t)||^2 &= (-t\sin t)^2 + (t\cos t)^2 = t^2\sin^2 t + t^2\cos^2 t \;=\; t^2,
\end{aligned}
$$

also $||f'(t)|| = |t|, t \in I$. Für $t > 0$ ist $\frac{f'(t)}{||f'(t)||} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, für $t < 0$ ist $\frac{f'(t)}{||f'(t)||} = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$.

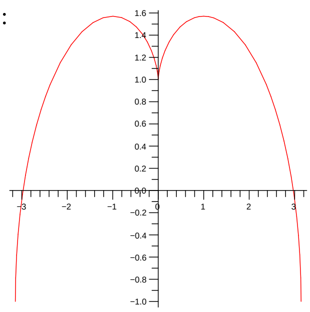
b) Nach (8.7) ist

$$
L(f) = \int_{-\pi}^{\pi} |t|\,dt \;=\; 2\cdot\int_0^{\pi} t\,dt \;=\; \pi^2.
$$

c) Wertetabelle:

t	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$x(t)$	π	1	0	-1	$-\pi$
$y(t)$	-1	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}$	-1

Skizze:



$\boxed{10.}$ **a)**
Es ist unter Anwendung der Quotientenregel für $(x,y) \in U$

$$\partial_x f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)\cdot y - 2x\cdot x\,y}{(x^2+y^2)^2} \;=\; \frac{-x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^2} \;=\; y\,\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\partial_y f(x,y) = \text{... analog ...} \;=\; x\,\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

b) Mit $(x_n,y_n) = (\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \longrightarrow (0,0)$ gilt $\partial_x f(x_n,y_n) = 0 \longrightarrow 0$.
Mit $(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) = (0,\frac{1}{n}) \longrightarrow (0,0)$ gilt $\partial_x f(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) = \frac{1/n^3}{1/n^4} = n \longrightarrow \infty$.
Wie schon f, so lassen sich auch $\partial_x f$ und $\partial_y f$ **nicht** in $(0,0)$ stetig fortsetzen.

$\boxed{11.}$ **a)**
Es ist

$$Df(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} \sin y\cos z & x\cos y\cos z & -x\sin y\sin z \\ \sin y\sin z & x\cos y\sin z & x\sin y\cos z \\ \cos y & -x\sin y & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Die Entwicklung nach der letzten Zeile der Matrix $Df(x,y,z)$ liefert die Determinante

$$\begin{aligned}\det Df(x,y,z) &= \cos y\big[x\cos y\cos z\cdot x\sin y\cos z + x\sin y\sin z\cdot x\cos y\sin z\big]\\ &\quad + x\sin y\big[\sin y\cos z\cdot x\sin y\cos z + \sin y\sin z\cdot x\sin y\sin z\big] + 0\\ &= x^2\cdot\big[\cos^2 y\sin y\cos^2 z + \cos^2 y\sin y\sin^2 z + \sin^3 y\cos^2 z + \sin^3 y\sin^2 z\big]\\ &= x^2\cdot\big[\cos^2 y\sin y\cdot 1 + \sin^3 y\cdot 1\big]\\ &= x^2\sin y\cdot\big[\cos^2 y + \sin^2 y\big]\\ &= x^2\sin y.\end{aligned}$$

$\boxed{12.}$ **a)**
Es gilt
$$grad\, f(x,y,z) \;=\; (yz\,,\; xz\,,\; xy) \quad \text{und} \quad g'(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix}.$$

Gemäß der Kettenregel aus 8.3.3 ist

$$\begin{aligned} F'(t) = (f\circ g)'(t) \;&=\; grad\, f(g(t))\cdot g'(t)\\ &= \big(rht\sin t,\;\; rht\cos t,\;\; r^2\sin t\cos t\big)\cdot \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix}\\ &= -r^2ht\sin^2 t \,+ r^2ht\cos^2 t \,+ r^2h\sin t\,\cos t\\ &= r^2ht\big[-\sin^2 t \,+ \cos^2 t\big] \,+ r^2h\sin t\,\cos t\\ &= r^2ht\cos(2t) \,+ \frac{1}{2}r^2h\sin(2t), \end{aligned}$$

wobei wir die Additionstheoreme

$$\sin(2t) = 2\sin t\cos t \qquad\qquad \cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$$
verwendet haben.

b) Es ist $\quad F(t) = f(g(t)) \;=\; r^2 ht\cos t\sin t,\quad$ also mit der Produktregel

$$\begin{aligned}
F'(t) &= r^2 h\big[\cos t\sin t - t\sin^2 t + t\cos^2 t\big] \\
&= r^2 h\big[\frac{1}{2}\sin(2t) + t\cos(2t)\big] \\
&= r^2 ht\cos(2t) \;+\; \frac{1}{2} r^2 h\sin(2t).
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{13.}}$ **a)**

Mit $\;\mathit{grad}\, g = (\partial_1 g,\ \partial_2 g,\ \partial_3 g) \quad$ und $\quad \operatorname{rot} f = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2,\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3,\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)$
lautet die erste Komponente von rot $(\mathit{grad}\, g)$

$$\partial_2\partial_3 g - \partial_3\partial_2 g \;=\; 0 \qquad \text{(siehe Satz 1 in 8.3.5),}$$

ebenso die zweite und dritte Komponente.

b) Es ist, wieder mit Satz 1 in 8.3.5,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{rot}\, f) \;&=\; \operatorname{div}(\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2,\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3,\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) \\
&=\; \partial_1\partial_2 f_3 - \partial_1\partial_3 f_2 + \partial_2\partial_3 f_1 - \partial_2\partial_1 f_3 + \partial_3\partial_1 f_2 - \partial_3\partial_2 f_1 \;=\; 0.
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{14.}}$

Angenommen, es gibt ein solches $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\mathit{grad}\, f(x,y) \;=\; (\partial_x f(x,y),\ \partial_y f(x,y)) \;=\; \big(e^{-x^3y^4}, e^{-x^4y^3}\big).$$

Dann ist f sogar zweimal stetig partiell differenzierbar:

$$\begin{aligned}
\partial_x\partial_x f(x,y) &= e^{-x^3y^4}\cdot(-3x^2y^4) \\
\partial_y\partial_x f(x,y) &= e^{-x^3y^4}\cdot(-4x^3y^3) \\
\partial_y\partial_y f(x,y) &= e^{-x^4y^3}\cdot(-3x^4y^2) \\
\partial_x\partial_y f(x,y) &= e^{-x^4y^3}\cdot(-4x^3y^3)
\end{aligned}$$

und nach Satz 1 in 8.3.5 müßte $\partial_y\partial_x f(x,y) = \partial_x\partial_y f(x,y)$ gelten, was aber nicht der Fall ist.

$\boxed{\textbf{15.}}$

Es ist $\quad f(x,y) = y^x = e^{x\ln y}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathit{grad}\, f(x,y) &= \big(e^{x\ln y}\cdot\ln y,\ e^{x\ln y}\cdot\frac{x}{y}\big) \\
H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} e^{x\ln y}\cdot\ln^2 y & e^{x\ln y}\cdot\ln y\cdot\frac{x}{y} + e^{x\ln y}\cdot\frac{1}{y} \\ e^{x\ln y}\cdot\ln y\cdot\frac{x}{y} + e^{x\ln y}\cdot\frac{1}{y} & -e^{x\ln y}\cdot\frac{x}{y^2} + e^{x\ln y}\cdot\frac{x^2}{y^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ferner ist

$$grad\, f(1,1) \;=\; (0,\;1) \qquad \text{und} \qquad H_f(1,1) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{16.}}$ **a)**
Für $f(x,y) = x^2+y^2$ ist $grad\, f(x,y) = (2x,\; 2y)$; ausserdem ist für $h = (\cos\alpha,\; \sin\alpha)$ $||h|| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$. Nach dem Satz in 8.3.4 ist die Ableitung von f in Richtung h gegeben durch

$$\partial_h f(x,y) \;= <grad\, f(x,y),\; h> =\; 2x\cos\alpha + 2y\sin\alpha.$$

Für $(x,y) = (0.5,\; 0.5)$ und $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ergibt sich $\partial_h f(0.5, 0.5) \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$.
Die Richtung des steilsten Anstiegs im Punkt $(0.5, 0.5)$ ist gegeben durch

$$grad\, f(0.5, 0.5) = (1,1),$$

und die Ableitung von f in Richtung $(1,1)$, also in Richtung $h = (\frac{1}{2}\sqrt{2},\; \frac{1}{2}\sqrt{2})$ ist $\partial_h f(0.5, 0.5) \;=\; \sqrt{2}$.

b) Für $f(x,y,z) = x\cos y \sin z$ ist

$$grad\, f(x,y,z) \;=\; (\cos y\sin z,\; -x\sin y\sin z,\; x\cos y\cos z);$$

ausserdem ist für $h = (\sqrt{8},\; -1,\; 4)$ $||h|| = \sqrt{8+1+16} = 5$. Sei $v := \frac{1}{5}\cdot h$. Dann ist die Ableitung von f in Richtung v gegeben durch

$$\partial_v f(x,y,z) \;=\; \frac{1}{5}\sqrt{8}\cos y\sin z + \frac{1}{5}x\sin y\sin z + \frac{4}{5}x\cos y\cos z.$$

Für $(x,y,z) = (5, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$ ergibt sich

$$\partial_v f(5, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}) \;=\; 0 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + 0 \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$\boxed{\textbf{17.}}$ **a)**
Hier ist $\quad grad\, f(x,y) \;=\; (y - \dfrac{V}{x^2},\; x - \dfrac{V}{y^2}) \quad$ und $\quad H_f(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} 2\frac{V}{x^3} & 1 \\ 1 & 2\frac{V}{y^3} \end{pmatrix}.$

b) Für $x = y = \sqrt[3]{V}$ ist

$$H_f(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) \;=\; \begin{pmatrix} 2\frac{V}{V} & 1 \\ 1 & 2\frac{V}{V} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =: H.$$

Wegen $\det H = 4 - 1 = 3 > 0$ und $H_{11} = 2 > 0$ ist H positiv definit.

$\boxed{\textbf{18.}}$ **a)**
Es ist

$$\begin{aligned} grad\, f(x,y) = (3x^2 - 3y,\; 3y^2 - 3x) \;&=\; (0,0) \\ \iff\; x^2 - y = 0 \quad &\text{und} \quad y^2 - x = 0 \\ \iff\; (x,y) = (0,0) \quad &\text{oder} \quad (x,y) = (1,1) \end{aligned}$$

(letzteres erhält man durch Einsetzen von $x = y^2$ in die Gleichung $x^2 - y = 0$, was zu $y^4 - y = 0$ führt, woraus für $y \neq 0$ $y^3 = 1$, also $y = 1$ folgt).

b) Die Hessematrix lautet

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$; wegen $\det H_f(0,0) = -9 < 0$ ist $H_f(0,0)$ indefinit und es liegt **kein** lokales Extremum im Punkt $(0,0)$ vor, sondern ein Sattelpunkt.
$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$; wegen $\det H_f(1,1) = 36 - 9 = 27 > 0$ und $H_f(1,1)_{11} = 6 > 0$ ist $H_f(1,1)$ positiv definit. Bei $(1,1)$ hat f also ein lokales Minimum.

19.

Es ist
$$\begin{aligned} grad\, R(a,b) &= (\partial_a R(a,b),\ \partial_b R(a,b)) \\ &= \Big(\sum_{i=1}^n 2(y_i - (a+bx_i)) \cdot (-1),\ \ \sum_{i=1}^n 2(y_i - (a+bx_i)) \cdot (-x_i)\Big). \end{aligned}$$

$grad\, R(a,b) = (0,0)$ führt zu dem in a und b linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i - na - b\sum_{i=1}^n x_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - a\sum_{i=1}^n x_i - b\sum_{i=1}^n x_i^2 &= 0 \end{aligned}$$

bzw., nach Division durch n,

$$\begin{aligned} a + b \cdot \overline{x} &= \overline{y} \\ a\overline{x} + b\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{aligned}$$

Setzen wir $a = \overline{y} - b\overline{x}$ in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich

$$\overline{x}\,\overline{y} - b\overline{x}^2 + b\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i$$

bzw.

$$b = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \overline{x}^2} = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

(man beachte: der Nenner läßt sich auch schreiben als $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$ und ist $\neq 0$ weil nicht alle x_i identisch sind). Für a bekommt man dann

$$a = \overline{y} - b\overline{x} = \overline{y} - \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \cdot \overline{x}.$$

Die Funktion R hat also höchstens *ein* lokales Extremum, und zwar in $(\hat{a}, \hat{b})$ mit

$$\hat{a} = \overline{y} - \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \cdot \overline{x} \qquad \text{und} \qquad \hat{b} = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}.$$

Man überlegt sich leicht (z.B. mit Hilfe der Hessematrix $H_R(\hat{a}, \hat{b})$), dass in $(\hat{a}, \hat{b})$ tatsächlich ein (globales) Minimum vorliegt (!)

20.

Zu maximieren ist

$$f(x) \;=\; \ln g(x) \;=\; \sum_{i=1}^{p} n_i \ln x_i, \quad x \in U,$$

unter der Nebenbedingung (NB)

$$h(x) \;=\; x_1 + ... + x_p - 1 \;=\; 0.$$

Mit

$$grad\, f(x) = \left(\frac{n_1}{x_1}, ..., \frac{n_p}{x_p}\right) \qquad \text{und} \qquad grad\, h(x) \;=\; (1, ..., 1)$$

und dem Lagrangeparameter λ liefern die Bestimmungsgleichungen $grad\, f(x) = \lambda \cdot grad\, g(x)$

$$\frac{n_1}{x_1} \;=\; \lambda, \;\; ... \;\;, \;\frac{n_p}{x_p} \;=\; \lambda,$$

also $x_i = \frac{n_i}{\lambda}$, $i = 1, ..., p$. Setzt man in die NB ein, so erhält man $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{p} n_i$ als einzige Lösung. Damit ist die gesuchte Stelle x^*, bei der laut Angabe ein Maximum vorliegt, gegeben durch

$$x^* \;=\; \left(\frac{n_1}{\lambda}, \;...\;, \frac{n_p}{\lambda}\right) \qquad \text{mit} \qquad \lambda := \sum_{i=1}^{p} n_i.$$

21.

Zu maximieren ist

$$V(x, y, z) \;=\; x \cdot y \cdot z, \quad x, y, z > 0,$$

unter der Nebenbedingung (NB)

$$F(x, y, z) \;=\; xy + 2xz + yz - F_0 \;=\; 0.$$

Mit

$$grad\, V(x, y, z) = (yz,\; xz,\; xy) \qquad \text{und} \qquad grad\, F(x, y, z) \;=\; (y + 2z,\; x + z,\; 2x + y)$$

und dem Lagrangeparameter λ lauten die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} yz \;+\; \lambda \cdot (y + 2z) \;&=\; 0 \\ xz \;+\; \lambda \cdot (x + z) \;&=\; 0 \\ xy \;+\; \lambda \cdot (2x + y) \;&=\; 0. \end{aligned}$$

λ kann nicht 0 sein, denn sonst wäre $yz = xz = xy = 0$, woraus aufgrund der NB $F_0 = 0$ sein müßte.
Multiplikation mit x bzw. y bzw. z liefert

$$\begin{aligned} xyz \ + \ \lambda \cdot (xy + 2xz) \ &= \ 0 \qquad\qquad \text{(I)} \\ xyz \ + \ \lambda \cdot (xy + yz) \ &= \ 0 \qquad\qquad \text{(II)} \\ xyz \ + \ \lambda \cdot (2xz + yz) \ &= \ 0 \qquad\qquad \text{(III).} \end{aligned}$$

Aus I-II erhält man wegen $\lambda \neq 0 \quad 2xz = yz$, d.h. $2x = y$.
Aus I-III bekommt man damit $xy = 2xz$, d.h. $y = 2z$, also ist $x = z$. Eingesetzt in die NB ergibt

$$F_0 = 2x^2 + 2x^2 + 2x^2 = 6x^2,$$

d.h. $x = z = \sqrt{\frac{F_0}{6}}$ und $y = 2 \cdot \sqrt{\frac{F_0}{6}}$. In der Tat (!) handelt es sich bei

$$\left(\sqrt{\frac{F_0}{6}}, \ 2\sqrt{\frac{F_0}{6}}, \ \sqrt{\frac{F_0}{6}} \right)$$

um eine Maximumstelle von V unter obiger NB. Der Hühnerstall hat dann die Gestalt eines „doppelten Würfels“.