

Mathematik für Naturwissenschaftler, Pruscha & Rost

Kap 7 Lösungen

1. a)

Es ist $\langle x, y \rangle = \alpha + 1 + \beta = 0 \iff \beta = -(1 + \alpha)$
und

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \alpha^2 + 1 + \beta^2 = \alpha^2 + 1 + (1 + \alpha)^2 \\ &= 2(\alpha^2 + \alpha + 1) = 6 \\ &\iff \alpha^2 + \alpha - 2 = 0, \end{aligned}$$

also

$$\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{0.25 + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}.$$

Es gibt also 2 Lösungen: $\alpha_1 = 1, \beta_1 = -2$ und $\alpha_2 = -2, \beta_2 = 1$.

b)

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

führt zu den 3 Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \alpha + 0.5\beta &= -2 \\ \alpha - 2\gamma &= -2 \\ \beta + \gamma &= 1.5 \end{aligned} \right\} \implies \begin{aligned} \alpha &= -2 - 0.5\beta \\ 0.5\beta &= -2\gamma \\ \gamma &= -0.5 \end{aligned}.$$

Also $\alpha = -3, \beta = 2, \gamma = -0.5$.

2.

Für $x, y \in \mathbb{R}^p$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten

$$\begin{aligned} [1.] \quad |||x||| &= 0 \iff |x_i| = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, p \\ &\iff x_i = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, p \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

$$[2.] \quad |||\lambda x||| = |\lambda x_1| + \dots + |\lambda x_p| = |\lambda|(|x_1| + \dots + |x_p|) = |\lambda| \cdot |||x|||.$$

$$\begin{aligned} [3.] \quad |||x + y||| &= |x_1 + y_1| + \dots + |x_p + y_p| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + \dots + |x_p| + |y_p| = |||x||| + |||y|||, \end{aligned}$$

also ist $|||x||| = |x_1| + \dots + |x_p|$ eine Norm, nicht aber die Definition $|||x||| = |x_1|$ bei $p \geq 2$,

denn z.B. für $x = e^{(2)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ ist $|||x||| = |0| = 0$, aber $x \neq 0$. D.h. [1.] ist nicht erfüllt ([2.] und [3.] hingegen schon).

3. a)

Durch eine Drehung um einen geeigneten Winkel α , d.h. Multiplikation von x und y mit einer Drehmatrix

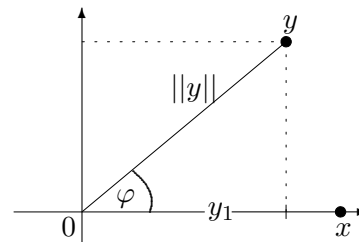
$$D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

(siehe Abschnitt 7.3.1) kann man erreichen, dass einer der beiden Vektoren (o.E. der Vektor x) auf der positiven horizontalen Achse zu liegen kommt. Dabei bleiben der Winkel φ , die Norm und das Skalarprodukt unverändert. Es ist also, wie man leicht nachrechnet,

$$\|D(\alpha) \cdot x\| = \|x\|, \quad \|D(\alpha) \cdot y\| = \|y\| \quad \text{und} \quad \langle D(\alpha)x, D(\alpha)y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Wir können also annehmen, dass (siehe Skizze)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } x_1 > 0, y_2 \geq 0.$$



Dann ist, wegen $y_1 = \|y\| \cdot \cos \varphi$,

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \varphi.$$

b) Wegen

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{25 + 16 + 4} = \sqrt{45}, \\ \|y\| &= \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}, \\ \langle x, y \rangle &= -15 - 8 + 2 = -21 \end{aligned}$$

ist $\cos \varphi = \frac{-21}{3\sqrt{70}} = -0.8367$, also $\varphi = \arccos(-0.8367) = 2.5620$, d.h. $\varphi \approx 146.8^\circ$.

4.

Lösung mit Aufgabe 3: Wegen $\cos \varphi \in [-1, 1]$ ist

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot |\cos \varphi| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

wobei φ den Winkel zwischen x und y bezeichnet.

Lösung durch Nachrechnen: Weil

$$0 \leq (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2,$$

folgt

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle|^2 &= (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 = x_1^2 y_1^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_2^2 \\ &\leq x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2) = \|x\|^2 \cdot \|y\|^2, \end{aligned}$$

woraus sich durch Wurzelziehen die Behauptung ergibt.

5. a)

Mit

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ist nach Definition der Matrizenmultiplikation

$$D \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \lambda_1 a_{13} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_2 a_{23} \\ \lambda_3 a_{31} & \lambda_3 a_{32} & \lambda_3 a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \lambda_3 a_{13} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_3 a_{23} \\ \lambda_1 a_{31} & \lambda_2 a_{32} & \lambda_3 a_{33} \end{pmatrix}.$$

b) Bei $D \cdot A$ werden die **Zeilen** von A , bei $A \cdot D$ werden die **Spalten** von A mit den jeweiligen Diagonalelementen von D multipliziert.

6. a)

Nach Definition der Matrizenmultiplikation ist

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

b) Für $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,p}$ sei $A^n = (a_{ij}^{(n)})_{i,j=1,\dots,p}$. Dann gilt für A mit $a_{ij} = 0$, $j \leq i$, dass $a_{ij}^{(n)} = 0$ für $j \leq i + n - 1$,

d.h. unterhalb der n -ten oberen Nebendiagonalen von A^n stehen lauter Nullen.

Beweis durch vollständige Induktion nach n :

Induktionsanfang: $n = 1$ klar nach Voraussetzung an A .

Induktionsschluss: $n \rightarrow n + 1$: Sei $n \geq 1$ und gelte $a_{ij}^{(n)} = 0$ für $j \leq i + n - 1$.

Dann ist für $j \leq i + n \leq p$

$$a_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^p a_{ik}^{(n)} \cdot a_{kj} = \sum_{k=i+n}^p a_{ik}^{(n)} \cdot a_{kj} = 0,$$

da $a_{kj} = 0$ für $j \leq i + n \leq k$.

7.

Wir entwickeln die Determinante nach der 1. Spalte und erhalten

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

8.

Es ist
$$D(\alpha) \cdot D(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Add.theoreme}}{=} \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = D(\alpha + \beta).$$

9. a)

Es ist
$$\begin{aligned} \langle v, a \rangle &= v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 a_3 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot a_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \cdot a_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot a_3 \\ &= a_1 a_2 b_3 - a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 - a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 a_3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ganz analog rechnet man nach, dass auch $\langle v, b \rangle = 0$.

b) Es ist mit $\langle a, b \rangle = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos \varphi$

$$\begin{aligned} \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 \cdot \sin^2 \varphi &= \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 \cdot (1 - \cos^2 \varphi) \\ &= \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 \\ &\quad - a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - a_3^2 b_3^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 - 2a_1 b_1 a_3 b_3 - 2a_2 b_2 a_3 b_3. \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 b_3 a_3 b_2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_1^2 - 2a_3 b_1 a_1 b_3 + a_1^2 b_3^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2. \end{aligned}$$

Man sieht durch Vergleich der Terme, dass

$$\|v\|^2 = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 \cdot \sin^2 \varphi,$$

woraus sich wegen $\sin \varphi \geq 0$ für $0 \leq \varphi \leq \pi$ die Behauptung ergibt.

c) Es ist
$$\begin{aligned} \langle v, c \rangle &= v_1 c_1 + v_2 c_2 + v_3 c_3 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \cdot c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot c_3 \\ &= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 \\ &\stackrel{\text{Aufgabe 7}}{=} \det A \end{aligned}$$

10.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{symmetrisch} \\ \text{regulär } (\det A = 2 - 1 = 1 \neq 0) \\ \text{pos. definit } (a_{11} = 1 > 0, \det A = 1 > 0) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
B &:= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} \text{symmetrisch, Diagonalmatrix} \\ \text{regulär } (\det B = -6 \neq 0) \\ \text{neg. definit } (x^T B x = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 < 0 \text{ für alle } x \neq 0) \end{array} \\
C &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} \text{regulär } (\det C = -6 \neq 0) \\ \text{indefinit } \begin{array}{l} (x^T C x = 1 > 0 \text{ für } x = e^{(1)} = (1, 0, 0)^T, \\ x^T C x = -3 < 0 \text{ für } x = e^{(3)} = (0, 0, 1)^T) \end{array} \end{array} \\
D &:= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} \text{singulär } (\det D = 0) \\ \text{indefinit } \begin{array}{l} (x^T D x = 1 > 0 \text{ für } x = e^{(1)} = (1, 0, 0, 0)^T, \\ x^T D x = -1 < 0 \text{ für } x = e^{(2)} = (0, 1, 0, 0)^T) \end{array} \end{array}
\end{aligned}$$

11.

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und seien a_1, a_2, a_3, a_4 die Spaltenvektoren von A . Es sind a_2, a_3, a_4

unabhängig (sofort klar!) und a_1, a_2, a_3, a_4 abhängig, denn $a_1 = a_2 + a_3 + a_4$. Also ist der Rang von A gleich 3; wir schreiben dafür kurz: $\text{Rang}(A) = 3$.

Sei $B := a \cdot b^T$. Die Spaltenvektoren von B sind $b_1 a, \dots, b_p a$. Wegen $a, b \neq 0$ sind diese nicht alle der Nullvektor, also ist $\text{Rang}(B) \geq 1$.

Je zwei der Spaltenvektoren sind linear abhängig, also ist $\text{Rang}(B) \leq 1$. Insgesamt haben wir also: $\text{Rang}(B) = 1$.

Bei der dritten angegebenen $p \times p$ -Matrix C (untere Dreiecksmatrix mit lauter Einsen auf und unterhalb der Diagonalen) sieht man sofort, dass die Spalten von C linear unabhängig sind; es ist also $\text{Rang}(C) = p$.

12. a)

$$Ax = b \text{ bedeutet } 1x_1 + 2x_2 = 5 \quad (\text{I})$$

$$-x_1 + 3x_2 = 2.5 \quad (\text{II})$$

Wir lösen (I) nach x_1 auf ($x_1 = 5 - 2x_2$) und setzen in (II) ein:

$$-(5 - 2x_2) + 3x_2 = 2.5$$

$$\iff 5x_2 = 7.5$$

$$x_2 = 1.5$$

$$\implies x_1 = 2$$

Die Lösung des obigen linearen Gleichungssystems (LGS) ist also $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$.

b) Es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$A^{-1}b = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

c) Mit Hilfe der Cramérschen Regel berechnet sich die Lösung des obigen LGS wie folgt:

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2.5 & 3 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{10}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2.5 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{7.5}{5} = 1.5.$$

13. a)

Die Eigenwert-Gleichung (7.27) lautet hier

$$\left(\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} -4 - \lambda & 6 \\ -1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (+)$$

(+) hat genau dann eine Lösung $x \neq 0$, wenn

$$P(\lambda) := \det \begin{pmatrix} -4 - \lambda & 6 \\ -1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

d.h. wenn $P(\lambda) = (-4 - \lambda)(3 - \lambda) + 6 = 0$, also $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 2$.

b) (+) aus a) lautet jetzt für $\lambda = \lambda_1 = -3$: $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dieses LGS hat als Lösungsmenge

$$L_1 = \left\{ c \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Damit sind $c \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ für $c \neq 0$ Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = -3$.

Für $\lambda = \lambda_2 = 2$ lautet (+) $\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dieses LGS hat als Lösungsmenge

$$L_2 = \left\{ c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Damit sind $c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ für $c \neq 0$ Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$.

14. a)

Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt mit $P_a x = \langle a, x \rangle \cdot a$

$$\begin{aligned} \langle P_a x, y \rangle &= \langle \langle a, x \rangle a, y \rangle = \langle a, x \rangle \cdot \langle a, y \rangle \\ &= \langle x, a \rangle \cdot \langle a, y \rangle = \langle x, \langle a, y \rangle \cdot a \rangle = \langle x, P_a y \rangle. \end{aligned}$$

Nun folgt mit $P_a \cdot P_a = P_a$ und $S_a = I_3 - 2P_a$, dass

$$\begin{aligned} \langle S_a x, S_a y \rangle &= \langle I_3 x - 2P_a x, I_3 y - 2P_a y \rangle = \langle x - 2P_a x, y - 2P_a y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - 2 \langle P_a x, y \rangle - 2 \langle x, P_a y \rangle + 4 \langle P_a x, P_a y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - 4 \langle x, P_a y \rangle + 4 \langle x, P_a \cdot P_a y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - 4 \langle x, P_a y \rangle + 4 \langle x, P_a y \rangle = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} S_a \cdot S_a &= (I_3 - 2P_a) \cdot (I_3 - 2P_a) = I_3^2 - 2P_a I_3 - 2I_3 P_a + 4P_a^2 \\ &= I_3 - 4P_a + 4P_a = I_3, \end{aligned}$$

wieder unter Verwendung von $P_a \cdot P_a = P_a$.

c) Wir können o.E. annehmen, dass $a = e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d.h. es wird an der (x_2, x_3) -Ebene gespiegelt. Damit ist

$$S_a = S_{e^{(1)}} = I_3 - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $\det(S_{e^{(1)}} - \lambda I_3) = (-1 - \lambda) \cdot (1 - \lambda)^2$, woraus die Behauptung folgt.

Begründung für obige Annahme: Sei D Drehmatrix im $\mathbb{R}^3$, die den Vektor a auf $e^{(1)}$ abbildet. Dann ist $S_a = D^{-1} \cdot S_{e^{(1)}} \cdot D$ und

$$\begin{aligned} \det(S_a - \lambda I_3) &= \det(D^{-1} S_{e^{(1)}} D - \lambda I_3) \\ &= \det(D^{-1} (S_{e^{(1)}} - \lambda I_3) D) \\ &= \det D^{-1} \cdot \det(S_{e^{(1)}} - \lambda I_3) \cdot \det D \\ &= \frac{1}{\det D} \cdot \det(S_{e^{(1)}} - \lambda I_3) \cdot \det D \\ &= \det(S_{e^{(1)}} - \lambda I_3), \end{aligned}$$

also haben S_a und $S_{e^{(1)}}$ dasselbe charakteristische Polynom und damit auch dieselben Eigenwerte.

d) S_a hat die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Mit $S_a = I_3 - 2 \cdot \begin{pmatrix} a_1 a_1 & a_2 a_1 & a_3 a_1 \\ a_1 a_2 & a_2 a_2 & a_3 a_2 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3 a_3 \end{pmatrix}$ folgt wegen $\|a\| = 1$, dass

$$\begin{aligned} \text{Spur von } A &= 1 - 2a_1^2 + 1 - 2a_2^2 + 1 - 2a_3^2 \\ &= 3 - 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \\ &= 3 - 2 \cdot 1 = 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \end{aligned}$$

Ferner ist mit **c)**

$$\det S_a = \det(D^{-1} S_{e^{(1)}} D) = \det D^{-1} \det S_{e^{(1)}} \det D = \det S_{e^{(1)}} = -1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3.$$

e) Der Vektor $a := (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$ hat $\|a\| = 1$ und steht senkrecht auf E , denn $\langle a, e^{(3)} \rangle = 0$ und $\langle a, (1, 1, 0)^T \rangle = 0$. Demnach ist

$$S_a = I_3 - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 0$, was man jeweils auch durch Nachrechnen bestätigt, denn es ist

$$S_a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S_a \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

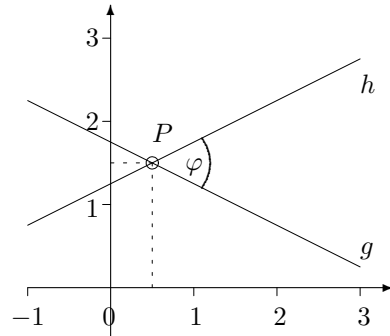
15. a)

Wir setzen g und h gleich ($x, y \neq 0$)

$$a + \lambda x = b + \mu y,$$

haben also

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$



Also

$$\left. \begin{array}{l} 2\lambda - \mu = 0 \\ \lambda - 0.5\mu = 0.5 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \mu = 2\lambda \\ \lambda = -\frac{0.5}{2} = -0.25 \end{array} \implies \mu = -0.5.$$

Der Schnittpunkt ist demnach

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.25 \end{pmatrix} - 0.25 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist

$$\cos \varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{1.5}{\sqrt{5}\sqrt{1.25}} = \frac{1.5}{2.5} = 0.6$$

und damit $\varphi = \arccos 0.6 = 0.9273\dots$, also $\varphi \approx 53,1^\circ$.