Mathematik für Naturwissenschaftler, Pruscha & Rost
Kap 6 Lösungen

$\boxed{1.}$ **a)**

$(1+i)\cdot(1-i) \;=\; 1\cdot 1 - 1\cdot(-1) + i\,[1\cdot(-1) + 1\cdot 1] \;=\; 2 + i\,0 \;=\; 2$

Schneller gemäß der Formel $(1+i)\cdot(1-i) \;=\; 1^2 - i^2 \;=\; 1-(-1) = 2$.

b)

$$\frac{1+3\,i}{2-i} \;=\; \frac{1\cdot 2 + 3\cdot(-1)}{2^2+1} + i\,\frac{-1\,(-1) + 2\cdot 3}{2^2+1} \;=\; -\frac{1}{5} + i\,\frac{7}{5}\,.$$

c) Nach der Eulerschen Formel gilt

$$z \;=\; \sqrt{3}\cdot e^{i\,\pi/3} \;=\; \sqrt{3}\,\big(\cos(\pi/3) + i\,\sin(\pi/3)\big) \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{3}{2}\,.$$

Also ist $\mathrm{Re}(z) = \sqrt{3}/2$, $\mathrm{Im}(z) = 3/2$.

$\boxed{2.}$ **a)**

Für $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 \;=\; 1 + \sqrt{3}\,i$ und $r_1 \;=\; |z_1|$, $r_2 \;=\; |z_2|$, $\varphi_1 \;=\; \arg(z_1)$, $\varphi_2 \;=\; \arg(z_2)$ gilt

$$r_1 \;=\; \sqrt{3+1} \;=\; 2\,,\; r_2 \;=\; \sqrt{1+3} \;=\; 2\,,$$
$$\tan(\varphi_1) \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}\,,\; \tan(\varphi_2) \;=\; \sqrt{3}\,, \quad \text{also} \quad \varphi_1 \;=\; \frac{\pi}{6} \equiv 30^o\,,\; \varphi_2 \;=\; \frac{\pi}{3} \equiv 60^o\,.$$

Es folgen für $z = z_1\cdot z_2$

$$|z| \;=\; r_1\cdot r_2 \;=\; 4\,,\; \arg(z) \;=\; \varphi_1 + \varphi_2 \;=\; \frac{\pi}{2} \equiv 90^o$$

(Also ist $z \;=\; 4\,\big(\cos(\pi/2) + i\,\sin(\pi/2)\big) \;=\; 4\,i$).

b) Für $z_1 \;=\; 1+i$, $z_2 \;=\; 1-i$ und r_1, r_2, φ_1, φ_2 wie in a) gilt

$$r_1 \;=\; r_2 \;=\; \sqrt{1+1} \;=\; \sqrt{2}\,,$$
$$\tan(\varphi_1) \;=\; 1\,, \tan(\varphi_2) \;=\; -1\,, \quad \text{also} \quad \varphi_1 \;=\; \frac{\pi}{4} \equiv 45^o\,, \varphi_2 \;=\; -\frac{\pi}{4} \equiv -45^o$$

Es folgen für $z = z_1/z_2$

$$|z| \;=\; \frac{r_1}{r_2} \;=\; 1\,, \arg(z) \;=\; \varphi_1 - \varphi_2 \;=\; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \;=\; \frac{\pi}{2} \equiv 90^o$$

(Also ist $z \;=\; \cos(\pi/2) + i\,\sin(\pi/2) \;=\; i$).

$\boxed{3.}$

Gegeben die beiden komplexen Zahlen

$$z_1 \;=\; r_1\cdot\big(\cos(\alpha) + i\,\sin(\alpha)\big)\,, \qquad z_2 \;=\; r_2\cdot\big(\cos(\beta) + i\,\sin(\beta)\big)\,.$$

a) Mit Hilfe der <u>A</u>dditionstheoreme für sin und cos erhalten wir

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 \;&=\; r_1\cdot r_2\big[\big(\cos(\alpha)\,\cos(\beta) - \sin(\alpha)\,\sin(\beta)\big) + i\,\big(\cos(\alpha)\,\sin(\beta) + \sin(\alpha)\,\cos(\beta)\big)\big] \\ &=_A \;\; r_1\cdot r_2\big[\cos(\alpha+\beta) + i\,\sin(\alpha+\beta)\big] \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$|z_1 \cdot z_2| \;=\; r_1 \cdot r_2 \;=\; |z_1| \cdot |z_2|$$
$$\arg(z_1 \cdot z_2) \;=\; \alpha + \beta \;=\; \arg(z_1) + \arg(z_2)\,.$$

b) Unter Benutzung der Bezeichnungen und des Ergebnisses von a): Die komplexe Zahl $z = z_1/z_2$, wobei $z_2 \neq 0$ vorausgesetzt wird, ist Lösung von $z_1 = z \cdot z_2$. Setzt man $z = r\,\big(\cos(\gamma) + i\,\sin(\gamma)\big)$, dann gilt

$$r_1 \;=_{a)}\; r \cdot r_2\,, \quad \text{d. h.} \quad \Big|\frac{z_1}{z_2}\Big| \equiv r \;=\; \frac{r_1}{r_2} \;=\; \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\alpha \;=_{a)}\; \gamma + \beta\,, \quad \text{d. h.} \quad \arg\Big(\frac{z_1}{z_2}\Big) \equiv \gamma \;=\; \alpha - \beta \;=\; \arg(z_1) - \arg(z_2)\,.$$

4.

Für $z_1 + z_2 \;=\; (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$ gilt per Definition der e^z Funktion

$$\mathrm{Re}(e^{z_1+z_2}) \;=\; e^{x_1+x_2} \cdot \cos(y_1+y_2)\,, \quad \mathrm{Im}(e^{z_1+z_2}) \;=\; e^{x_1+x_2} \cdot \sin(y_1+y_2)\,.$$

Anwendung der <u>A</u>dditionstheoreme für sin und cos liefert dann

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} \;&=\; e^{x_1+x_2} \cdot \big(\cos(y_1+y_2) + i\,\sin(y_1+y_2)\big) \\ &=_A\; e^{x_1}\,e^{x_2} \cdot \big(\cos(y_1)\cdot\cos(y_2) - \sin(y_1)\cdot\sin(y_2) + \\ &\qquad\qquad i\,[\sin(y_1)\cdot\cos(y_2) + \sin(y_2)\cdot\cos(y_1)\,]\big) \\ &=\; e^{x_1} \cdot \big(\cos(y_1) + i\,\sin(y_1)\big) \cdot e^{x_2} \cdot \big(\cos(y_2) + i\,\sin(y_2)\big) \;=\; e^{z_1} \cdot e^{z_2}\,. \end{aligned}$$

5.

Ausgangspunkt ist die Differentialgleichung

$$U'(t) \;=\; R \cdot I'(t) + L \cdot I''(t) + I(t)/C\,. \tag{1}$$

Unsere Aufgabe ist es, bei gegebenen Konstanten U_0, ω, L, C, R diese Differentialgleichung nach $I(t)$ aufzulösen. Dazu schreiben wir $U(t)$ in komplexer Schreibweise als

$$U(t) \;=\; U_0 \cdot e^{i\,\omega\,t}\,.$$

Für die Ableitungen komplexwertiger Funktionen (einer reellwertigen Veränderlichen t) gelten die bekannten Ableitungsregeln. In unserem Fall erhält man via Eulerscher Formel

$$\begin{aligned} \big(e^{i\omega t}\big)' \;&=\; \big(\cos(\omega t) + i\,\sin(\omega t)\big)' \;=\; \omega \cdot (-\sin(\omega t) + i\,\cos(\omega t)) \\ &=\; i\,\omega\,(\cos(\omega t) + i\,\sin(\omega t)) \;=\; i\,\omega\,e^{i\omega t}\,. \end{aligned}$$

Es gilt dann für die Ableitung von $U(t)$

$$U'(t) \;=\; U_0\,i\,\omega\,e^{i\,\omega\,t}\,.$$

Wir stellen die Stromstärke im Kreis in der Form

$$I(t) \;=\; I_0 \cdot e^{i\,(\omega\,t - \varphi)}$$

dar, wobei $I_0 > 0$ und die Phasenverschiebung φ zu berechnen sind. Die Ableitungen sind

$$I'(t) \;=\; I_0\,i\,\omega\,e^{i\,(\omega\,t-\varphi)}\,, \qquad I''(t) \;=\; I_0\,(-\omega^2)\,e^{i\,(\omega\,t-\varphi)}\,.$$

Eingesetzt in (1) ergibt sich

$$U_0\, i\, \omega e^{i\omega t} \;=\; R\, I_0\, i\, \omega\, e^{i\omega t} \cdot e^{-i\,\varphi} + L\, I_0\, (-\omega^2)\, e^{i\omega t}\, e^{-i\,\varphi} + (I_0/C)\, e^{i\omega t}\, e^{-i\,\varphi}\,.$$

Nach Multiplikation mit $(e^{-i\omega t} e^{i\varphi})/(I_0 i\omega)$ ergibt sich

$$\frac{U_0}{I_0}\, e^{i\,\varphi} \;=\; R - \frac{\omega L}{i} + \frac{1}{i\,\omega\, C}\,,$$

oder wegen $-1/i = i$

$$\frac{U_0}{I_0}\, e^{i\,\varphi} \;=\; R + i\,\Big(\omega\, L - \frac{1}{\omega\, C}\Big)\,. \tag{2}$$

b) Die Größe $I_0 = I_0(\omega)$ ist nach 6.2.3 gleich

$$I_0 \;=\; \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega\, C}\right)^2}}\,.$$

Sie wird maximal, wenn der Nenner minimal wird, d. h. für

$$\omega_0 \;=\; \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}\,, \quad \text{mit dem maximalen Wert} \quad I_0(\omega_0) \;=\; \frac{U_0}{R}\,.$$

Im Sondefall $R = 0$, das ist der Wechselstrom-Keis mit L und C, kommt es bei der Resonanzfrequenz ω_0 zu $I_0(\omega_0) = \infty$ („Resonanzkatastrophe“).

6. Wir lösen die Differentialgleichung

$$f''(t) + 2\,\beta\, f'(t) + \omega^2\, f(t) \;=\; 0 \qquad k \;=\; 2\,\beta, \quad D = \omega^2, \tag{3}$$

nach der Funktion $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, auf.

a) Ansatz: $f(t) \;=\; f_0 \cdot e^{i\,\nu\, t}$ mit dem Anfangswert $f_0 \;=\; f(0) \;>\; 0$ und mit der –zu bestimmenden– Größe ν. Es gilt

$$f'(t) \;=\; f_0 \cdot i \cdot \nu \cdot e^{i\,\nu\, t} \;=\; i \cdot \nu \cdot f \qquad f''(t) \;=\; f_0 \cdot i^2 \cdot \nu^2 \cdot e^{i\,\nu\, t} \;=\; -\,\nu^2 \cdot f\,.$$

Nach Kürzen durch $f(t)$ wird dann aus (3)

$$-\,\nu^2 + 2\,\beta\, i \cdot \nu + \omega^2 \;=\; 0 \quad \text{oder} \quad \nu^2 + b \cdot \nu + c \;=\; 0 \quad \text{mit} \;\; b = -2\,\beta\, i,\;\; c = -\omega^2.$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung lautet

$$\begin{aligned} \nu \;&=\; \frac{1}{2}\big(-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,c}\big) \;=\; \frac{1}{2}\big(2\,\beta\, i \pm \sqrt{4\,\beta^2\, i^2 + 4\omega}\big) \\ &=\; \beta\, i \pm \sqrt{\omega^2 - \beta^2}\,, \end{aligned}$$

wobei wir $\omega^2 = D > k^2/4 = \beta^2$ vorausgesetzt hatten. Wir erhalten

$$f(t) \;=\; f_0 \cdot e^{-\,\beta\, t} \cdot e^{\pm\, i\,\nu\, t}\,, \qquad \nu \;=\; \sqrt{\omega^2 - \beta^2} = \sqrt{D - k^2/4}\,.$$

b) Mit Hilfe der Eulerschen Gleichung ergibt dies

$$\left.\begin{matrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{matrix}\right\} \;=\; f_0 \cdot e^{-\,\beta\, t} \cdot \big(\cos(\nu\, t) \pm \sin(\nu\, t)\big)\,.$$

Linearkombinationen zur Gewinnung der beiden Lösungen in 4.4.2 (Punkt 2) sind

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\, f_0}\,\big(f_1(t) + f_2(t)\big) \;&=\; e^{-\,\beta\, t} \cdot \cos(\nu\, t) \\ \frac{1}{i\, f_0}\,\big(f_1(t) - f_2(t)\big) \;&=\; e^{-\,\beta\, t} \cdot \sin(\nu\, t)\,. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{7.}}$ Unter Benutzung von Formel 2. aus 6.4 rechnet man für $k, l \in \mathbb{N}$, die beiden Fälle $k \neq l$ und $k = l$ getrennt behandelnd,

$$\begin{aligned}
2 \cdot \int_0^{2\pi} \cos(kt) \cdot \cos(lt)\, dt \underset{2.}{=} & \int_0^{2\pi} \cos((k-l)t)\, dt + \int_0^{2\pi} \cos((k+l)t)\, dt \\
\underset{k \neq l}{=} & \frac{1}{k-l} \cdot \sin((k-l)t)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{k+l} \cdot \sin((k+l)t)\Big|_0^{2\pi} = 0 + 0\,, \\
\underset{k = l}{=} & \int_0^{2\pi} 1\, dt + \int_0^{2\pi} \cos(2kt)\, dt = 2\pi + \frac{1}{2k} \cdot \sin(2kt)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi + 0\,.
\end{aligned}$$

Unter Benutzung der Formel 1. aus 6.4 rechnet man für $k, l \in \mathbb{N}$

$$2 \cdot \int_0^{2\pi} \sin(kt) \cdot \sin(lt)\, dt \underset{1.}{=} \int_0^{2\pi} \cos((k-l)t)\, dt - \int_0^{2\pi} \cos((k+l)t)\, dt = \begin{cases} 0 - 0\,, & k \neq l \\ 2\pi - 0\,, & k = l\,, \end{cases}$$

die letzten Gleichheitszeichen jeweils wie oben begründet.

$\boxed{\textbf{8.}}$ Unter Benutzung von Formel 3. aus 6.4 rechnet man für $k, l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
2 \cdot \int_0^{2\pi} \cos(kt) \cdot \sin(lt)\, dt \underset{3.}{=} & \int_0^{2\pi} \sin((k-l)t)\, dt + \int_0^{2\pi} \sin((k+l)t)\, dt \\
\underset{k \neq l}{=} & -\frac{1}{k-l} \cdot \cos((k-l)t)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k+l} \cdot \cos((k+l)t)\Big|_0^{2\pi} \\
= & -\frac{1}{k-l} \cdot (1-1) - \frac{1}{k+l} \cdot (1-1) = 0 + 0\,, \\
\underset{k = l}{=} & 0 - \frac{1}{2k} \cdot \cos(2kt)\Big|_0^{2\pi} = 0 - \frac{1}{2k} \cdot (1-1) = 0\,.
\end{aligned}$$

Schließlich rechnet man

$$\int_0^{2\pi} \cos(kt)\, dt \underset{k \geq 1}{=} \frac{1}{k} \cdot \sin(kt)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{k} \cdot (0 - 0) = 0\,,$$

und analog für $\int \sin(kt) dt$ anstatt $\int \cos(kt) dt$.

$\boxed{\textbf{9.}}$ Vorbemerkung: Wir setzen $F(t) = -t \cdot \cos(t) + \sin(t)$ und rechnen mittels partieller Integration, dass

$$(*) \qquad \int t \cdot \sin(t)\, dt = F(t)$$

gilt. Die Funktion $f(t) = t - \pi$, $0 < t \leq 2\pi$, ist nach Fortsetzung eine ungerade Funktion, so dass $S(t)$ eine reine Sinusreihe wird (alle $a_k = 0$). Dann gilt wegen $\int_0^{2\pi} \sin(kt) dt = 0$ und mit der Substitution $u = k \cdot t$

$$\begin{aligned}
\pi \cdot b_k = & \int_0^{2\pi} (t - \pi) \cdot \sin(kt)\, dt = \int_0^{2\pi} t \cdot \sin(kt)\, dt \\
= & \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi k} u \cdot \sin(u)\, du =_{(*)} \frac{1}{k^2} F(u)\Big|_0^{2\pi k} \\
= & \frac{1}{k^2} \cdot \big[F(2\pi k) - F(0)\big] = \frac{1}{k^2}[-2\pi k - 0] = -\frac{2\pi}{k}\,.
\end{aligned}$$

Also $b_k = -\frac{2}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Es folgt

$$S(t) = -2\left(\sin(t) + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \ldots\right) = \begin{cases} t - \pi\,, & 0 < t < 2\pi \\ 0 & t = 2\pi k \end{cases}.$$

$\boxed{\textbf{10.}}$ Die Funktion $f(t) = t^2$, $-\pi \leq t \leq \pi$, ist nach Fortsetzung eine gerade Funktion, so dass $S(t)$ eine reine Cosinusreihe wird (alle $b_k = 0$). Das zweite folgende Gleichheitszeichen (*) lässt sich durch Vergleich von Flächenstücken begründen. Zunächst rechnet man für $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
\pi \cdot a_k &= \int_0^{2\pi} f(t)\, \cos(t)\, dt \underset{(*)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(kt)\, dt \\
&\underset{k\geq 1}{=} \frac{1}{k}\, t^2 \cdot \sin(kt)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} 2\,t \cdot \sin(kt)\, dt \\
&= \frac{1}{k^2}\, 2\,t \cdot \cos(kt)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} 2\, \cos(kt)\, dt \\
&= (-1)^k\, \frac{2\pi + 2\pi}{k^2} = (-1)^k\, \frac{4\pi}{k^2}\,.
\end{aligned}$$

Für $k = 0$ ergibt sich $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt = \frac{2}{3}\, \pi^2$. Es folgt

$$S(t) = 4 \cdot \Big(\frac{1}{12}\, \pi^2 - \cos(t) + \frac{1}{4} \cos(2t) - \frac{1}{9} \cos(3t) \pm \ldots\Big) = t^2\,, \qquad -\pi \leq t \leq \pi\,.$$

Bemerkung: Es ist $S(0) = 0$, d. h.

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \mp \ldots\,.$$