Mathematik für Naturwissenschaftler, Pruscha & Rost
Kap V Lösungen

1. Zu berechnen ist das Integral $I = \int \sin(t) \cdot \cos(t)\, dt$. Mit c_1, c_2,... werden Konstanten bezeichnet.

(i) Wir benutzen die Formel (sin-Additionstheorem) $\sin(t) \cdot \cos(t) = \frac{1}{2} \sin(2t)$ und erhalten

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \sin(2t)\, dt = -\frac{1}{4} \cos(2t) + c_1 = -\frac{1}{4} \left(\cos^2(t) - \sin^2(t) \right) + c_1 = \frac{1}{2} \sin^2(t) - \frac{1}{4} + c_1$$

(ii) Mit $x = \sin(t)$, $dx = \cos(t) \cdot dt$, gilt

$$I_2 = \int x\, dx = \frac{1}{2} x^2 + c_2 = \frac{1}{2} \sin^2(t) + c_2$$

I_2 unterscheidet sich von I_1 durch Konstanten.

(iii) Mit $x = \cos(t)$, $dx = -\sin(t) \cdot dt$, gilt

$$I_3 = -\int x\, dx = -\frac{1}{2} x^2 + c_3 = -\frac{1}{2} \cos^2(t) + c_3 = \frac{1}{2} \sin^2(t) - \frac{1}{2} + c_3$$

I_3 unterscheidet sich von I_1, I_2 durch Konstanten.

(iv) Partielle Integration liefert

$$I_4 = \int \sin(t) \cdot \cos(t)\, dt = \sin(t) \cdot \sin(t) - \int \cos(t) \cdot \sin(t)\, dt$$

Es folgt $2\, I_4 = \sin^2(t) + c_4$ also $I_4 = \frac{1}{2} \sin^2(t) + c_5$, was sich wiederum von den vorangehenden Lösungen nur durch Konstanten unterscheidet.

2. **a)**

$$\int_0^{\ln(a)} \left(e^x + e^{-x} \right) dx = \left[e^x - e^{-x} \right]_0^{\ln(a)} = e^{\ln(a)} - e^{-\ln(a)} = a - \frac{1}{a}$$

b) Mit der Substitution $t = x^3 + 2$, $dt = 3\, x^2\, dx$ erhält man

$$\int x^2 \cdot \sin(x^3 + 2)\, dx = \frac{1}{3} \int \sin(t)\, dt + c = -\frac{1}{3} \cos(t) + c = -\frac{1}{3} \cos(x^3 + 1) + c$$

3 **a)** Mit dem Ansatz

$$\frac{2}{x \cdot (x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} = \frac{(a+b) \cdot x + 2\, a}{x \cdot (x+2)}$$

erhalten wir $a + b = 0$, $a = 1$, d. h. $a = 1$, $b = -1$, so dass

$$\int_1^2 \frac{2}{x \cdot (x+2)}\, dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \left[\ln(x) - \ln(x+2) \right]_1^2 = \ln(3) - \ln(2) = \ln(3/2)$$

b) Mittels partielle Integration erhalten wir

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln(x)\, dx \;=\; \ln(x) \cdot \ln(x) - \int \ln(x) \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

Es folgt

$$2 \int \frac{\ln(x)}{x}\, dx \;=\; \ln^2(x) + c_1\,, \quad \text{das heißt} \quad \int \frac{\ln(x)}{x}\, dx \;=\; \frac{1}{2}\ln^2(x) + c_2$$

$\boxed{4.}$ **a)** Substitution $t = x^3$, d. h. $x^2\, dx = \frac{1}{3}\, dt$; ferner $x = 0, x = 2 \to t = 0, t = 8$.

$$\int_0^2 x^2\, e^{x^3}\, dx \;=_{Subst}\; \frac{1}{3}\int_0^8 e^t\, dt \;=\; \frac{1}{3}\, e^t\,\Big|_0^8 \;=\; \frac{1}{3}\,[e^8 - 1]$$

b) Setze $g(x) = x\sqrt{x}+1 = x^{3/2}+1$ (> 0 für $0 \le x \le 1$). Wegen $g'(x) = \frac{3}{2}\, x^{1/2} \;=\; \frac{3}{2}\sqrt{x}$ ist dann

$$\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}\, dx \;=\; \int_0^1 \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx \;=\; \ln g(x)\,\Big|_0^1 \;=\; \ln(x\sqrt{x}+1)\,\Big|_0^1 \;=\; \ln 2$$

$\boxed{5.}$ **a)** Mit $f(x) = x^4 + 2\,x^2 + 1 \;=\; (x^2+1)^2 \; (> 0)\;,\; f'(x) \;=\; 2\,(2\,x^3 + 2\,x)$ ist

$$\int \frac{2\,x^3 + 2\,x}{x^4 + 2\,x^2 + 1}\, dx \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx \;=\; \frac{1}{2}\,\ln(f(x)) \;=\; \frac{1}{2}\,\ln(x^4 + 2\,x^2 + 1) \;=\; \ln(x^2+1)$$

b) Wegen $x^2 + x - 6 = 0$ für $x = 2$ und $x = -3$ ist

$$\int \frac{x}{x^2+x-6}\, dx \;=\; \int \frac{x}{(x-2)(x+3)}\, dx \equiv \int \Big(\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}\Big)\, dx\,.$$

Für a, b erhält man aus (Gleichsetzen der Zähler)

$$1 \cdot x + 0 \;=\; a \cdot (x+3) + b \cdot (x-2) \;=\; (a+b)\cdot x + (3\,a - 2\,b)$$

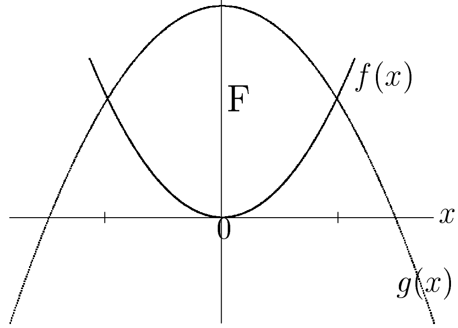
durch Koeffizientenvergleich $a + b = 1,\ 3\,a - 2\,b = 0$, also $a = 2/5,\ b = 3/5$. Es folgt deshalb

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+x-6}\, dx \;&=\; \frac{2}{5}\int \frac{1}{x-2}\, dx + \frac{3}{5}\int \frac{1}{x+3}\, dx \;=\; \frac{2}{5}\,\ln(x-2) + \frac{3}{5}\,\ln(x+3)\\ &=\; \ln\big((x-2)^{2/5} \cdot (x+3)^{3/5}\big) \qquad [x > 2]\end{aligned}$$

$\boxed{6.}$ Mit zweimaliger partieller Integration (p. I.) erhält man

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \cos x\, dx \;&=_{p.I.}\; x^2 \cdot \sin x - 2\int x \cdot \sin x\, dx\\ &=_{p.I.}\; x^2 \cdot \sin x + 2\,x \cdot \cos x - 2\int \cos x\, dx\\ &=\; x^2 \cdot \sin x + 2\,x \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x \;=\; (x^2 - 2) \cdot \sin x + 2\,x \cdot \cos x\end{aligned}$$

$\boxed{7.}$ Für $f(x) = x^4$ und $g(x) = 6 - x^2$ hat man das nebenstehende (nicht Maßstabsgetreue) Schaubild



a) Die Schnittpunkte der Kurvenverläufe erhält man aus $x^4 + x^2 - 6 = 0$ oder, mit $s = x^2$, aus $s^2 + s - 6 = 0$ zu

$$s = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

Wegen $s = x^2 \geq 0$ gilt nur die Lösung $s = x^2 = 2$; Die Schnittpunkte lauten also $(-\sqrt{2}, 4)$ und $(\sqrt{2}, 4)$.

b) Der Inhalt F der Fläche „zwischen den Kurven" ist gleich

$$\begin{aligned} F &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \big(g(x) - f(x)\big)\, dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \big(6 - x^2 - x^4\big)\, dx \\ &= \Big[6\,x - \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{5}\,x^5\Big]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 2\,\Big[6\,\sqrt{2} - \frac{1}{3}\,2\,\sqrt{2} - \frac{1}{5}\,4\,\sqrt{2}\Big] = 2\,\sqrt{2}\,\frac{68}{15} \approx 12.822 \end{aligned}$$

$\boxed{8.}$

a) Die Reihe (1) stellt gemäß Aufgabe IV 19 für $|x| < 1$ die Taylorreihe der Funktion $-\ln(1-x)$ dar.

b) Es gilt $\frac{1}{n}\,x^n = \int_0^x t^{n-1}\,dt$, so dass mit der erlaubten <u>V</u>ertauschung

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1}\,dt \;=_V\; \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n\,dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-x)\,, \quad 0 < 1-x < 2\,, \quad \text{d. h. } |x| < 1 \end{aligned}$$

$\boxed{9.}$

a) Setze $F(x) = \int_0^x e^{\alpha\,t}\,dt$. Für $\alpha = 0$ ist $F(x) = x \to \infty$ bei $x \to \infty$. Sei deshalb nun $\alpha \neq 0$. Dann ist

$$F(x) = \frac{1}{\alpha}\,e^{\alpha\,t}\Big|_0^x = \frac{1}{\alpha}\,\big(e^{\alpha\,x} - 1\big) \longrightarrow \begin{cases} \infty & \text{für } \alpha > 0 \\ -\frac{1}{\alpha} & \text{für } \alpha < 0 \end{cases}$$

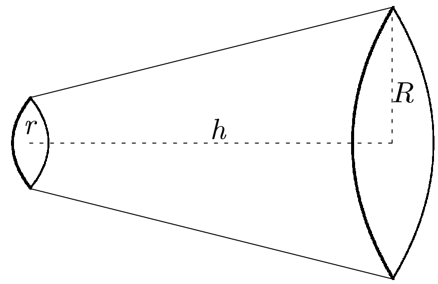
bei $x \to \infty$, denn es gilt $e^{\alpha\,x} \to \begin{cases} \infty & \text{für } \alpha > 0 \\ 0 & \text{für } \alpha < 0 \end{cases}$. Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{\alpha t}\,dt$ existiert genau für $\alpha < 0$, mit Wert $-\frac{1}{\alpha}$.

b) Setze $F(x) = \int_1^x t^{\alpha}\,dt$. Für $\alpha = -1$ ist $F(x) = \ln(x) \to \infty$ bei $x \to \infty$. Sei deshalb nun $\alpha \neq -1$. Dann ist

$$F(x) = \frac{1}{\alpha+1}\,t^{\alpha+1}\Big|_1^x = \frac{1}{\alpha+1}\,\big(x^{\alpha+1} - 1\big) \longrightarrow \begin{cases} \infty & \text{für } \alpha + 1 > 0 \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \text{für } \alpha + 1 < 0 \end{cases}$$

bei $x \to \infty$, denn es gilt $x^a \to \begin{cases} \infty & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a < 0 \end{cases}$. Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty t^\alpha \, dt$ existiert genau für $\alpha < -1$, mit Wert $-\frac{1}{\alpha+1}$.

$\boxed{\textbf{10.}}$



a) Setze $f(x) = r + m \cdot x$, mit $m = \frac{1}{h}(R-r)$ (beachte $f(0) = r$, $f(h) = R$).

b) Die Kreisfläche $F(x)$ an der Stelle x ist

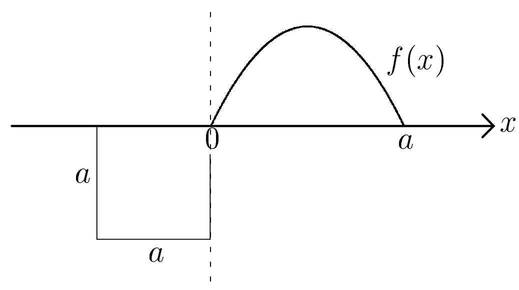
$$F(x) = \pi\,(f(x))^2 = \pi\,(r + m \cdot x)^2$$

Das Volumen V des Kegelstumpfes ist

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h F(x)\,dx =_S \frac{\pi}{m}\int_r^R u^2\,du = \frac{\pi}{3\,m}\big[u^3\big]_r^R = \frac{\pi}{3\,m}\big(R^3 - r^3\big) \\ &= \frac{1}{3}\,\pi\,h\,\frac{R^3 - r^3}{R - r} = \frac{1}{3}\,\pi\,h\,\big(R^2 + R\,r + r^2\big) \end{aligned}$$

Dabei wurde bei S die Substitution $u = r + m\,x$ durchgeführt.

$\boxed{\textbf{11.}}$ Die Fläche „unter der Kurve“ $f(x) = a \cdot x - x^2$, $0 \le x \le a$, ist gleich



$$\int_0^a (a\,x - x^2)\,dx = \Big[\frac{1}{2}\,a\,x^2 - \frac{1}{3}\,x^3\Big]_0^a = \frac{1}{6}\,a^3$$

Es wird also $\frac{1}{6}\,a^3 = a^2$ gefordert, was zu einem ausgeglichenen Flächentausch für $a = 6$ führt.