Mathematatik für Naturwissenschaftler, Pruscha & Rost
Kap 9 Lösungen

$\boxed{1.}$ **a)**

Auf das Ergebnis von deMére gelangt man, wenn man als Grundmenge Ω die Menge aller Kombinationen der 6 Elemente $1, ..., 6$ zur Klasse 3 mit Wiederholung wählt (Auswahl von 3 Zahlen aus $\{1, ..., 6\}$ mit Wiederholung ohne Reihenfolge, siehe auch Kapitel 1.3) und $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf Ω.
Für das Ereignis *„Augensumme gleich 12“* sind dann die Kombinationen

6-5-1 6-4-2 6-3-3 5-5-2 5-4-3 4-4-4

günstig.
deMéres Ω kann auch so geschrieben werden:

$$\Omega = \{(i, j, k) \ : \ 1 \leq k \leq j \leq i \leq 6\}.$$

b) Richtig wäre folgendes Ω' (mit $\mathbb{P}'$ = Gleichverteilung auf Ω') gewesen:

$$\Omega' = \big\{(i, j, k) \ : \ i, j, k \in \{1, ..., 6\}\big\}.$$

Die Ereignisse

$$A := \text{„}\textit{Augensumme} = \textit{11}\text{“} \qquad\qquad B := \text{„}\textit{Augensumme} = \textit{12}\text{“}$$

werden dann als 27- bzw. 25-elementige Teilmengen von Ω' identifiziert, námlich

$$\begin{aligned} A = &\ \{\ (i,j,k) : i+j+k = 11\} \\ = &\ \{\ (6,4,1),\ (6,1,4),\ \ (4,6,1),\ (4,1,6),\ (1,6,4),\ (1,4,6), \\ &\quad (6,3,2),\ (6,2,3),\ \ (3,6,2)\ \ (3,2,6),\ (2,6,3),\ (2,3,6), \\ &\quad (5,5,1),\ (5,1,5),\ \ (1,5,5), \\ &\quad (5,4,2),\ (5,2,4),\ \ (4,5,2),\ (4,2,5),\ (2,5,4),\ (2,4,5), \\ &\quad (5,3,3),\ (3,5,3),\ \ (3,3,5), \\ &\quad (4,4,3),\ (4,3,4),\ \ (3,4,4)\ \ \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = &\ \{\ (i,j,k) : i+j+k = 12\} \\ = &\ \{\ (6,5,1),\ (6,1,5),\ \ (5,6,1),\ (5,1,6),\ (1,6,5),\ (1,5,6), \\ &\quad (6,4,2),\ (6,2,4),\ \ (4,6,2),\ (4,2,6),\ (2,6,4),\ (2,4,6), \\ &\quad (6,3,3),\ (3,6,3),\ \ (3,3,6), \\ &\quad (5,5,2),\ (5,2,5),\ \ (2,5,5), \\ &\quad (5,4,3),\ (5,3,4),\ \ (4,5,3),\ (4,3,5),\ (3,5,4),\ (3,4,5), \\ &\quad (4,4,4)\ \ \}. \end{aligned}$$

Es ist dann

$$\mathbb{P}'(A) = \frac{|A|}{|\Omega'|} = \frac{27}{216} = 0.125 \quad \text{ und } \quad \mathbb{P}'(B) = \frac{|B|}{|\Omega'|} = \frac{25}{216} = 0.1157\ .$$

$\boxed{2.}$ **a)**
Die Mengen C und $B\backslash C$ sind disjunkt mit (weil $C \subset B$) $B = C \cup (B\backslash C)$, also ist $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B\backslash C)$, woraus $\mathbb{P}(B\backslash C) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C)$ folgt.

b) Hier betrachten wir die disjunkte Zerlegung von $A \cup B$

$$A \cup B = A \cup \big(B\backslash(A \cap B)\big)$$

und erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\big(B\backslash(A \cap B)\big) \\ &\underset{\text{b) mit } A\cap B\subset B}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).\end{aligned}$$

c) Es ist $1 \geq \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) = 1$, also $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$. Damit folgt aus b)

$$1 = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 2 - \mathbb{P}(A \cap B),$$

also $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$.

d) Es ist, weil $A \cap \overline{B}$ und $A \cap B$ disjunkt,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(A \cap B) \underset{A,B \text{ unabh.}}{=} \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

also

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \cdot (1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\overline{B}).$$

$\boxed{3.}$
Sei $\Omega = \{0,1\}^n = \{(x_1, ..., x_n) \;:\; x_i \in \{0,1\}, i = 1, ..., n\}$ und $\mathbb{P}\big(\{(x_1, ..., x_n)\}\big) := \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, wobei $k := \sum_{i=1}^{n} x_i$ (= Anzahl der 1en in $(x_1, ..., x_n)$).
Sei $\Omega' = \{0, 1, ..., n\}$ und

$$X : \Omega \longrightarrow \Omega', \quad X(x_1, ..., x_n) := x_1 + ... + x_n.$$

Dann ist für festes $k \in \{0, 1, ..., n\}$

$$p_k := \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}\Big(\{(x_1, ..., x_n) \in \Omega \;:\; \sum_{i=1}^{n} x_i = k\}\Big) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

denn es gibt $\binom{n}{k}$ n-Tupel mit genau k Einsen [wähle aus n möglichen Positionen (Kugeln mit den Zahlen 1 bis n) k Positionen (Kugeln) ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge aus; dazu gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten (siehe Kapitel 1.3). Auf diese ausgewählten Positionen kommen dann die 1en].

$\boxed{\textbf{4.}}$

Die Grundmenge Ω besteht aus $C_5(25)$ Kombinationen

$$\Omega = \{(i_1, ..., i_5) \ : \ 1 \leq i_1 < ... < i_5 \leq 25\}.$$

Es ist $|\Omega| = \binom{25}{5} = 53130$. O.E. sind die Kugeln mit den Nummerns 1 bis 5 `rot`, 6 bis 10 `gelb`, u.s.w. Sei $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf Ω.

a) Mit $A :=$ *„alle gezogenen Kugeln sind* `rot`*"* $= \{(1, 2, 3, 4, 5)\}$ ist $|A| = 1$, also

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{|\Omega|} = 0.00001882.$$

b) Mit $B :=$ *„alle gezogenen Kugeln haben die gleiche Farbe"*
$= \{(1, 2, 3, 4, 5), (6, ..., 10), (11, ..., 15), (16, ..., 20), (21, ..., 25)\}$ ist $|B| = 5$, also

$$\mathbb{P}(B) = \frac{5}{|\Omega|} = 0.00009411.$$

c) Mit $C :=$ *„alle gezogenen Kugeln haben verschiedene Farben"*
$= \{(1, 6, 11, 16, 21), (2, 6, 11, 16, 21), (3, 6, 11, 16, 21), ...\}$ ist $|C| = 5^5 = 3125$, also

$$\mathbb{P}(C) = \frac{3125}{|\Omega|} \approx 0.058818.$$

$\boxed{\textbf{5.}}$

Die Grundmenge Ω besteht aus $C_6(49)$ Kombinationen

$$\Omega = \{(i_1, ..., i_6) \ : \ 1 \leq i_1 < ... < i_6 \leq 49\}.$$

Es ist $|\Omega| = \binom{49}{6} = 13983816$. Sei $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf Ω.
Seien A_4, A_5, A_6 die Ereignisse *„genau 4 (bzw. 5, bzw. 6) Richtige"*. Dann ist

$$\begin{aligned} |A_4| &= \binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 13545 \\ |A_5| &= \binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} = 258 \\ |A_6| &= \binom{6}{6} \cdot \binom{43}{0} = 1, \end{aligned}$$

also

a) $\mathbb{P}(A_5) = \frac{|A_5|}{|\Omega|} \approx 0.00001845.$

b) $\mathbb{P}(A_4) = \frac{|A_4|}{|\Omega|} \approx 0.00096862.$

c) $\mathbb{P}(A_4 \cup A_5 \cup A_6) \underset{A_4, A_5, A_6 \text{ paarw. disj.}}{=} \mathbb{P}(A_4) + \mathbb{P}(A_5) + \mathbb{P}(A_6) \approx 0.0009871.$

[Man hätte zur Lösung auch gleich die Hypergeometrische Verteilung $H(N, S, n)$ bemühen können mit

$N = 49$ (= Anzahl der Kugeln)
$S = 6$ (= Anzahl der getippten Zahlen)
$n = 6$ (= Anzahl der gezogenen Kugeln)

Dann ist $\mathbb{P}(A_k) = H(49,6,6)(\{k\}) = \frac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$.]

$\boxed{6.}$ **a)**

Zu zeigen ist jeweils $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k\in\Omega} p_k = 1$.

i) Binomialverteilung zu den Parametern n und $p \in [0,1]$: Hier ist $p_k = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, k \in \Omega = \{0,1,...,n\}$. Aufgrund des Binomischen Lehrsatzes ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1^n = 1.$$

ii) Geometrische Verteilung zum Parameter $p \in (0,1)$: Hier ist $p_k = p\cdot(1-p)^k, k \in \Omega = \{0,1,...\} = \mathbb{N}_0$. Aufgrund der Summenformel für die geometrische Reihe ergibt sich

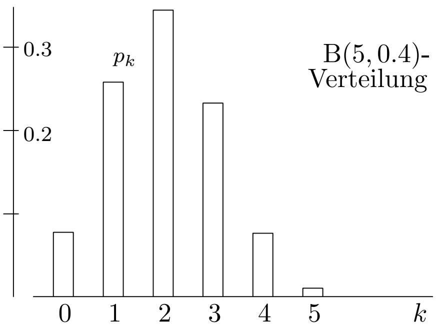
$$\sum_{k=0}^{\infty} p\cdot(1-p)^k = p\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = p\cdot\frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1.$$

iii) Poisson-Verteilung zum Parameter $\lambda > 0$: Hier ist $p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k \in \Omega = \{0,1,...\} = \mathbb{N}_0$. Aufgrund der Summenformel für die Exponentialreihe ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1.$$

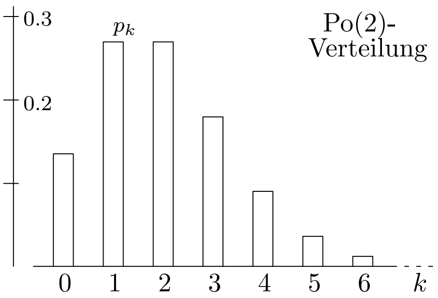
b) Es ist mit $p_k = \binom{5}{k}\cdot 0.4^k\cdot 0.6^{5-k}, k = 0,...,5$

k	0	1	2	3	4	5
p_k	0.07776	0.2592	0.3456	0.2304	0.0768	0.01024



c) Es ist mit $p_k = e^{-2}\cdot\frac{2^k}{k!}, k = 0,1,...$

k	0	1	2	3	4	5	6
p_k	0.1353	0.2707	0.2707	0.1804	0.0902	0.0361	0.0120



$\boxed{7.}$

Bezeichne X_{Aa}, X_{AA}, X_{aa} die Anzahlen der jeweiligen Typen bei $n = 6$ Kreuzungen. X_{Aa}, X_{AA}, X_{aa} sind Binomialverteilt zu den Parametern $n = 6$ und

$$p_{Aa} = \tfrac{1}{2}, \quad p_{AA} = \tfrac{1}{4}, \quad p_{aa} = \tfrac{1}{4}.$$

a) Es ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{aa} \geq 3) &= \mathbb{P}(X_{aa} = 3) + \mathbb{P}(X_{aa} = 4) + \mathbb{P}(X_{aa} = 5) + \mathbb{P}(X_{aa} = 6) \\ &= \binom{6}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{6}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 0.1694.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{Aa} \leq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X_{Aa} \geq 4) \\ &= 1 - \left[\binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\right] \\ &= 1 - [0.234375 + 0.09375 + 0.015625] = 0.65627.\end{aligned}$$

c)

$$\mathbb{P}(\text{„}\textit{jedesmal Merkmal A}\text{“}) = \mathbb{P}(X_{aa} = 0) = \binom{6}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^6 = 0.17798.$$

d)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{„}\textit{mindestens einmal Merkmal A}\text{“}) &= 1 - \mathbb{P}(\text{„}\textit{keinmal Merkmal A}\text{“}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_{aa} = 6) = 1 - \binom{6}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 0.99976.\end{aligned}$$

$\boxed{8.}$ **a)**

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\Phi_{\mu,\sigma^2}(x) &= \int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu,\sigma^2}(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \varphi_{0,1}(s)\,ds = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile die Substitution $\frac{t-\mu}{\sigma} = s,\ dt = \sigma ds$ vorgenommen haben.

b) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt ($\mathbb{P}$ bezeichne die Standardnormalverteilung)

$$\begin{aligned}\Phi(-x) &= \mathbb{P}\big((-\infty, -x]\big) = 1 - \mathbb{P}\big((-x, \infty)\big) = 1 - \int_{-x}^{\infty} \varphi_{0,1}(t)dt \\ &= 1 + \int_{x}^{-\infty} \varphi_{0,1}(s)ds = 1 - \int_{-\infty}^{x} \varphi_{0,1}(s)ds = 1 - \Phi(x),\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile die Substitution $-t = s,\ dt = -ds$ vorgenommen und verwendet haben, dass $\varphi_{0,1}(s) = \varphi_{0,1}(-s)$.

Für $\gamma \in (0,1)$ gilt per Definition $\gamma = \Phi(u_\gamma), 1 - \gamma = \Phi(u_{1-\gamma})$. Also ist

$$\Phi(u_{1-\gamma}) = 1 - \gamma = 1 - \Phi(u_\gamma) = \Phi(-u_\gamma).$$

Da Φ streng monoton, also invertierbar ist, folgt $u_{1-\gamma} = -u_\gamma$.

$\boxed{9.}$ **a)**

Die Sonnenscheindauer werde durch die $N(\mu, \sigma^2)-$verteilte Zufallsvariable X beschrieben. Es ist dann $X^* := \frac{X-\mu}{\sigma}$ $N(0,1)$-verteilt und

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > \mu + d\cdot\mu) &= \mathbb{P}\Big(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{d\cdot\mu}{\sigma}\Big) = \mathbb{P}\Big(X^* > \frac{d\cdot\mu}{\sigma}\Big) \\ &= 1 - \mathbb{P}\Big(X^* \leq \frac{d\cdot\mu}{\sigma}\Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{d\cdot\mu}{\sigma}\Big) = 1 - \Phi(1.25) = 1 - 0.894 = 0.106.\end{aligned}$$

An 10.6% aller Sommertage wird eine Meldung ausgegeben.

b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > \mu + d\cdot\mu) \underset{\text{s.o.}}{=} 1 - \Phi\Big(\frac{d\cdot\mu}{\sigma}\Big) &= 0.05 \\ \iff \Phi\Big(\frac{d\cdot\mu}{\sigma}\Big) &= 0.95 \\ \iff \frac{d\cdot\mu}{\sigma} &= 1.645 \\ \iff d = \frac{1.645}{\mu}\cdot\sigma &= \ 0.8225.\end{aligned}$$

Eine Meldung wird dann ab einer Sonnenscheindauer von $\mu + d\cdot\mu \approx 11.7$ Stunden gemacht.

$\boxed{10.}$ **a)**

Der Wertebereich von $X = X_1 + X_2$ ist $\Omega' = \{2, 3, 4, ..., 12\}$ und es ist

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

,

z.B.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=3) &= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 2) + \mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 1) \\ &\underset{X_1,X_2 \text{ unabh.}}{=} \mathbb{P}(X_1 = 1)\cdot\mathbb{P}(X_2 = 2) + \mathbb{P}(X_1 = 2)\cdot\mathbb{P}(X_2 = 1) \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{36}.\end{aligned}$$

b) Der Wertebereich von $X = |X_1 - X_2|$ ist $\Omega' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und es ist

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

,

z.B.

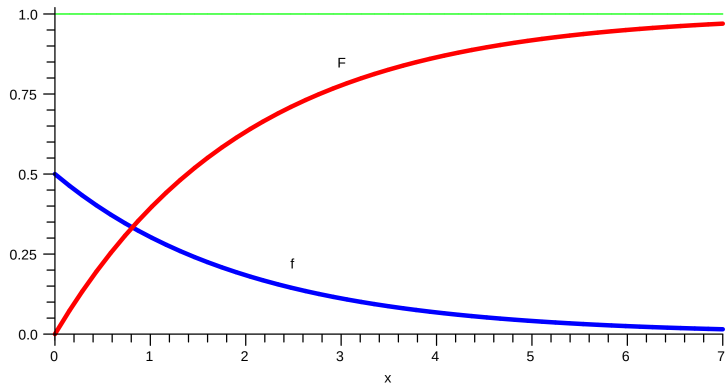
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=0) &= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 2) + ... + \mathbb{P}(X_1 = 6, X_2 = 6) \\ &\underset{X_1,X_2 \text{ unabh.}}{=} \mathbb{P}(X_1 = 1)\cdot\mathbb{P}(X_2 = 1) + ... + \mathbb{P}(X_1 = 6)\cdot\mathbb{P}(X_2 = 6) \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + ... + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{6}{36}.\end{aligned}$$

$\boxed{11.}$ **a)**

Es ist $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & : \ x \geq 0 \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases} \quad$ und $\quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}x} & : \ x \geq 0 \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases}$

und $\quad \mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - F(2) = e^{-\frac{1}{2}2} = e^{-1} \approx 0.368.$

Das Schaubild zeigt die Dichte f und die Verteilungsfunktion F im Fall $\lambda = \frac{1}{2}$.



b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{b\to\infty} \big[- e^{-\lambda x} \big]_0^b = \lim_{b\to\infty} (-e^{-\lambda b} + 1) = 1.$

c) Mittels partieller Integration erhält man mit $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0,$

$$\int x f(x)dx = \int x\lambda e^{-\lambda x} dx = -xe^{-\lambda x} + \int e^{-\lambda x} dx = -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$$

$$\text{und} \quad \int x^2 f(x)dx = \int x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -x^2 e^{-\lambda x} + 2 \int x e^{-\lambda x} dx$$

$$= -x^2 e^{-\lambda x} - 2\Big(\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \Big).$$

Also ist

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \big[- xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \big[- be^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda} \big] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{und} \quad \mathbb{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2 f(x)dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \big[- b^2 e^{-\lambda b} - \frac{2}{\lambda} b e^{-\lambda b} - \frac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda b} + \frac{2}{\lambda^2} \big] = \frac{2}{\lambda^2},$$

also $\quad Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$

$\boxed{\textbf{12.}}$ **a)**

Vorbemerkung: Für $|x| < 1$ folgt mittels des Cauchyprodukts (siehe Kapitel 2.3)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^2} &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...) \\
&= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \\
\frac{1}{(1-x)^3} &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...) \cdot (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...) \\
&= 1 + (1+2)x + (1+2+3)x^2 + (1+2+3+4)x^3 + ... \\
&\underset{(1.4.2)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2} x^k = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = \sum_{k=1}^{\infty}(k(k-1)+k)x^k = x^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} + x \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Sei X geometrisch-verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$, also $\mathbb{P}(X=k) = p \cdot (1-p)^k,\ k = 0, 1, ...$ Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^k = p(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \\
&\underset{\text{s.o. mit } x=1-p}{=} \frac{p(1-p)}{p^2} = \frac{1-p}{p} \\
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(1-p)^k \\
&\underset{\text{s.o. mit } x=1-p}{=} p\Big(\frac{2(1-p)^2}{p^3} + \frac{1-p}{p^2}\Big) = \frac{2(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p}.
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - E(X)^2 = \frac{2(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} - \Big(\frac{1-p}{p}\Big)^2 \\
&= \frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{p(1-p)}{p^2} = \frac{1 - 2p + p^2 + p - p^2}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.
\end{aligned}$$

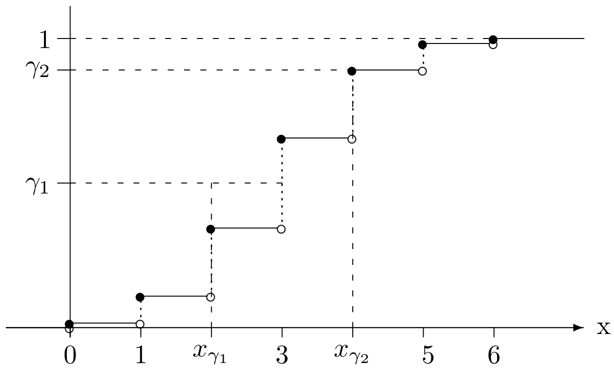
b) Sei X Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, also $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, ...$ Dann ist

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda \\
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k(k-1)+k) \frac{\lambda^k}{k!} \;=\; e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \;=\; e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \;=\; \lambda^2 + \lambda.
\end{aligned}
$$

und somit $\qquad Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \;=\; \lambda.$

$\boxed{\textbf{13.}}$ **a)**

Wir skizzieren das γ-Quantil für zwei verschiedene γ_1, γ_2 am Beispiel der Verteilungsfunktion der $B(6, 0.5)$-Verteilung.



b) Es ist $\;\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1},\; k = 0, 1, \ldots$. Für $\gamma = \frac{1}{2}$ gilt

$$\mathbb{P}(X \leq 0) = \frac{1}{2} = \gamma < \frac{3}{4} = \mathbb{P}(X \leq 1), \qquad \text{also ist der Median } M = x_{0.5} = 0.$$

$\boxed{\textbf{14.}}$ **a), b)**

Als gleichwahrscheinlich sind anzusehen: Jede der Rangzahlen $1, ..., n$ (Werte von R_1 bzw.

R_2); jede der $\frac{n(n-1)}{2}$ Produkte $i \cdot j, i, j = 1, ..., n, i \neq j$ (Werte von $R_1 \cdot R_2$). Es ist dann also

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R_1) = \mathbb{E}(R_2) &= \frac{1}{n}(1 + 2 + ... + n) \;=\; \frac{n+1}{2} \\
\mathbb{E}(R_1^2) = \mathbb{E}(R_2^2) &= \frac{1}{n}(1^2 + 2^2 + ... + n^2) \;=\; \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \\
\mathbb{E}(R_1 \cdot R_2) &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} i \cdot j \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \Big[(1 + ... + n) \cdot (1 + ... + n) - (1^2 + ... + n^2) \Big] \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \Big[\Big(\frac{n(n+1)}{2} \Big)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Big].
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
cov(R_1, R_2) &= \mathbb{E}(R_1 \cdot R_2) - \mathbb{E}(R_1) \cdot \mathbb{E}(R_2) \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \Big[\Big(\frac{n(n+1)}{2} \Big)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \Big(\frac{n(n+1)}{2} \Big)^2 \cdot \frac{n-1}{n} \Big] \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \Big[\Big(\frac{n(n+1)}{2} \Big)^2 (1 - 1 + \frac{1}{n}) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Big] \\
&= \frac{1}{n-1} \Big[\Big(\frac{n+1}{2} \Big)^2 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \Big]
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\sqrt{Var(R_1)} \cdot \sqrt{Var(R_2)} = Var(R_1) \;&=\; \mathbb{E}(R_1^2) - \mathbb{E}(R_1)^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \Big(\frac{n+1}{2} \Big)^2.
\end{aligned}$$

Also eingesetzt

$$\rho(R_1, R_2) = \frac{cov(R_1, R_2)}{\sqrt{Var(R_1)} \cdot \sqrt{Var(R_2)}} = -\frac{1}{n-1}.$$

$\boxed{\textbf{15.}}$ **a), b)**

Wir verwenden, dass für $\lambda_n \longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Big(1 + \frac{\lambda_n}{n}\Big)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{\lambda}.$$

Dann ist (wegen $np_n \longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ gilt $p_n \longrightarrow 0$)

$$\begin{aligned}
b(k; n, p_n) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \;&=\; \frac{n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(np_n)^k}{n^k} \cdot \big(1 - p_n\big)^{n-k} \\
&= \underbrace{\frac{1}{k!(1-p_n)^k}}_{\longrightarrow 1/k!} \cdot \underbrace{\frac{n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{n^k}}_{\longrightarrow 1} \cdot \underbrace{(np_n)^k}_{\longrightarrow \lambda^k} \cdot \underbrace{\Big(1 - \frac{np_n}{n}\Big)^n}_{\longrightarrow e^{-\lambda}} \\
&\longrightarrow e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.
\end{aligned}$$

b) Sei X_n eine $B(n, p_n)$-verteilte und X eine $Po(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable, $np_n \longrightarrow \lambda > 0$. Wegen a) ist dann für jedes feste $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X = k).$$

Dies könnte den Schluss nahelegen, dass auch

$$\mathbb{E}(X_n) \longrightarrow \mathbb{E}(X) \quad \text{und} \quad Var(X_n) \longrightarrow Var(X).$$

In diesem Fall ergibt sich

$$\mathbb{E}(X_n) = np_n \longrightarrow \lambda, \quad \text{also } \mathbb{E}(X) = \lambda,$$
$$Var(X_n) = np_n(1 - p_n) = np_n - np_n^2 \longrightarrow \lambda + 0 = \lambda, \quad \text{also } Var(X) = \lambda.$$