Mathematik für Naturwissenschaftler, Pruscha & Rost
Kap 4 Lösungen

1. **a)**

Die Funktion $f(x) = \frac{3x^2+2x}{x^2+x+2}$ hat den Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ (denn $x^2 + x + 2 > x^2 + x + 1/4 = (x+1/2)^2 \geq 0$, der Nenner also > 0); die Ableitungsfunktion lautet nach der Quotientienregel

$$f'(x) = \frac{(x^2+x+2)(6x+2) - (2x+1)(3x^2+2x)}{(x^2+x+2)^2} = \frac{x^2+12x+4}{(x^2+x+2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

denn wiederum ist der Nenner > 0.

b) Für $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$, lautet die Ableitungsfunktion nach der Produktregel und dann nach der Quotientenregel (und Kettenregel)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} = \frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}, \quad x \in (-1,1) \end{aligned}$$

2.

Bestimmt werden soll der Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$.

a) Die Funktion $n \cdot x^{n-1}$ ist Ableitung der Funktion x^n, für $n \geq 0$. Vertauschen wir Summation und Differentiation (was hier erlaubt ist, da eine sog. 'Potenzreihe' vorliegt), so erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^n\right)' =_V \quad \Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big)' =_G \quad \Big(\frac{1}{1-x}\Big)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

wobei wir die Formel der Geometrischen Reihe angewandt haben.

b) Mit fixiertem $x \in (-1,1)$ und mit $a_i = b_i = x^i$ ist gemäß der Cauchy-Formel für Reihenprodukte (Aufgabe 9 in 2.5)

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}.$$

Die linke Seite der Gleichung aber ist –wiederum über die Formel der Geometrischen Reihe– gleich $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$

3.

Betrachtet wird die Funktion $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2, \quad x \in \mathbb{R}$.

a) Es ist $f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$.

1. Für $x \in (-\infty, 0)$ sind x und $x-2$ negativ, d. h. $f'(x) > 0$.
2. Für $x \in (0,2)$ ist x positiv und $x-2$ negativ, d. h. $f'(x) < 0$.
3. Für $x \in (2,\infty)$ sind x und $x-2$ positiv, d. h. $f'(x) > 0$.

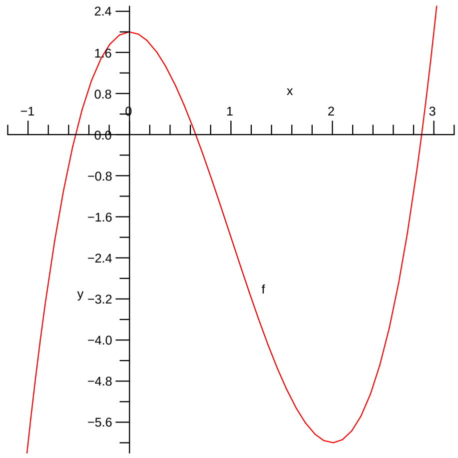
Fazit: f ist auf $(-\infty, 0]$ und $[2, \infty)$ streng monoton wachsend, auf $[0, 2]$ streng monoton fallend.

b) Es ist $f''(x) = 12\,x - 12 = 12\,(x-1)$.

1. Für $x \in (-\infty, 1)$ ist $x - 1$ negativ, d. h. $f''(x) < 0$

2. Für $x \in (1, \infty)$ ist $x - 1$ positiv, d. h. $f''(x) > 0$

Fazit: f ist auf $(-\infty, 1]$ streng konkav, auf $[1, \infty)$ streng konvex.



$\boxed{\textbf{4.}}$

Zunächst die Funktionen und ihre Ableitungen:

$$f_1(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-3/2}, \quad x > 0, \qquad f_1'(x) = -\frac{3}{2}\,x^{-5/2} = -\frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \qquad f_2'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

a) Wir benutzen die Formel

$$T(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

für eine Tangente an den Graphen von $f(x)$ im Punkte a. Für $a_1 = 1/4$ erhalten wir

$$f_1(a_1) = 8, \qquad f_1'(a_1) = -48 \quad \text{also} \quad T_1(x) = 8 - 48\,(x - 1/4) = 20 - 48\,x$$

Für $a_2 = 1/2$ erhalten wir

$$f_2(a_2) = 2, \qquad f_2'(a_2) = -12 \quad \text{also}$$

$$T_2(x) = 2 - 12\,(x - 1/2) = 8 - 12\,x$$

b) Die Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ bedeutet $20 - 48\,x = 8 - 12\,x$, das heißt $36\,x = 12$ oder $x = 1/3$. Für dieses x ist $T_1(1/3) = T_2(1/3) = 4$. Der Schnittpunkt lautet

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{3}, 4\right),$$

siehe die Abbildung 1.

$\boxed{\textbf{5.}}$

Die Weg-Zeit Gleichung lautet $y(t) = v \cdot t + \frac{b}{2} \cdot t^2$, $b = -9.81$ [m/sec^2].

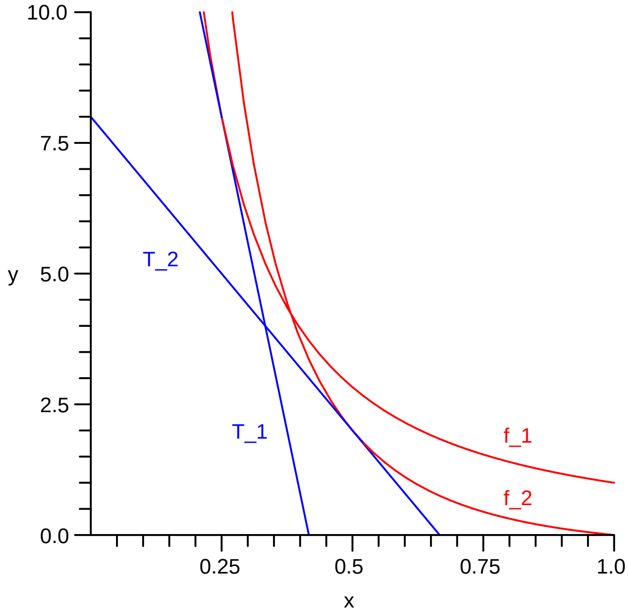


Abbildung 1: Funktionen f_1, f_2 mit Tangenten

a) Geschwindigkeit zur Zeit t in [m/sec]

$$y'(t) \;=\; v + b \cdot t \;=\; v - 9.81 \cdot t$$

Beschleunigung zur Zeit t in [m/sec^2]

$$y''(t) \;=\; b \;=\; -9.81\,.$$

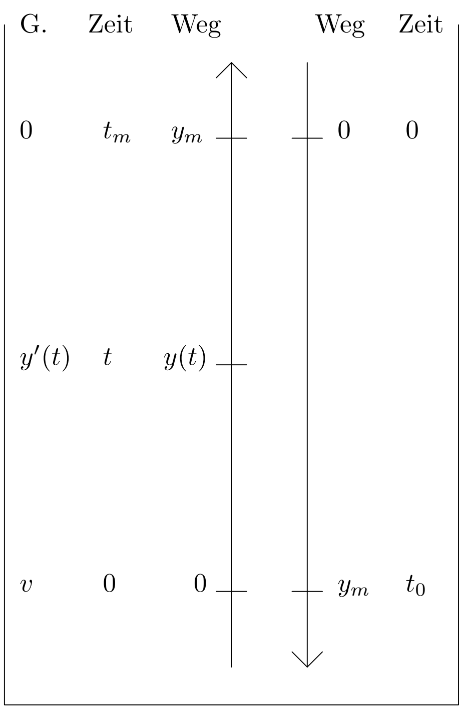
Wir haben also eine konstant nach unten gerichtete Erdbeschleunigung.

b) Im maximalen Punkt ist die Geschwindigkeit gleich 0, zu einem Zeitpunkt t_m, der sich wie folgt berechnet:

$$0 \;=\; y'(t_m) \;=_{a)}\; v - 9.81 \cdot t_m\,, \quad \text{also } t_m \;=\; \frac{v}{9.81}$$

Die maximale Höhe (Wurfhöhe) berechnet sich zu

$$y_m \equiv y(t_m) \;=\; v \cdot t_m + \frac{b}{2} \cdot t_m^2 \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{9.81}\,.$$



d) Auflösen der letzten Gleichung nach v ergibt

$$v \;=\; \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot y_m} \;=_{y_m=20}\; \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 20} \;=\; 19.81 \;\; [\text{m/sec}]\,.$$

c) Im Höhepunkt des Wurfes stellen wir Weg und Zeit auf 0; ferner ist dann die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$. Die Weg-Zeit Gleichung lautet jetzt $y(t) \;=\; \frac{1}{2}\,9.81 \cdot t^2$. Der Ort $y = y_m$ werde zur Zeit t_0 erreicht. Dann gilt

$$y(t_0) \;=\; \frac{1}{2}\,9.81 \cdot t_0^2 \;=\; y_m \;=_{b)}\; \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{9.81}\,, \quad \text{also} \quad t_0^2 \;=\; \frac{v^2}{9.81^2}$$

Wir erhalten $t_0 = \frac{v}{9.81} = t_m$, Letzteres nach b). Alternativ erhalten wir dieses t_0 auch als zweite Nullstelle von $y(t)$, d. h. aus $y(t_0) = v \cdot t_0 + b/2 \cdot t_0^2 = 0,\ t_0 \neq 0$.

Für den Aufstieg (von 0 nach y_m) braucht der Stein genauso viel Zeit wie für den Fall (von y_m nach 0). Nach der Zeit $2 \cdot \frac{v}{9.81}$ hat der Stein seinen Anfangsort erreicht.

6.

Wir schreiben nacheinander die Gesetze Weg(Zeit), Geschw.(Zeit), Beschl.(Zeit) nieder.

a) $y(t) = t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2t) \quad t \geq 0$

$v(t) \equiv y'(t) = 1 - \sqrt{2}\cos(2t)$

$b(t) \equiv v'(t) = 2\sqrt{2}\sin(2t)$

b) Es ist $v(t) < 0$ für $\sqrt{2}\cos(2t) > 1$, das heißt für (*) $\cos(2t) > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Bekanntlich gilt $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Also ist (*) gültig für $0 \leq 2\,t < \frac{\pi}{4}$, das heißt für $0 \leq t < \frac{\pi}{8}$.

Das auf der Zahlengerade nächstliegende t-Intervall, für welches (*) gilt, liegt rechts von $\pi/2$.

c) Es ist $b(t) = \max$ für $\sin(2t) = 1$, das heißt für $2\,t = \pi/2$ bzw. $t = \pi/4$. Der Wert von $b(t)$ beträgt $b(\pi/4) = 2\sqrt{2} \approx 2.828$

Die auf der Zahlengerade nächstliegende t-Stelle ist rechts von $\pi/2$.

7.

a) Hier lauten die Bewegungsgesetze

Weg(Zeit): $y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(2t) - t, \quad t \geq 0$

Geschw(Zeit): $v(t) \equiv y'(t) = -\sqrt{2}\sin(2t) - 1$

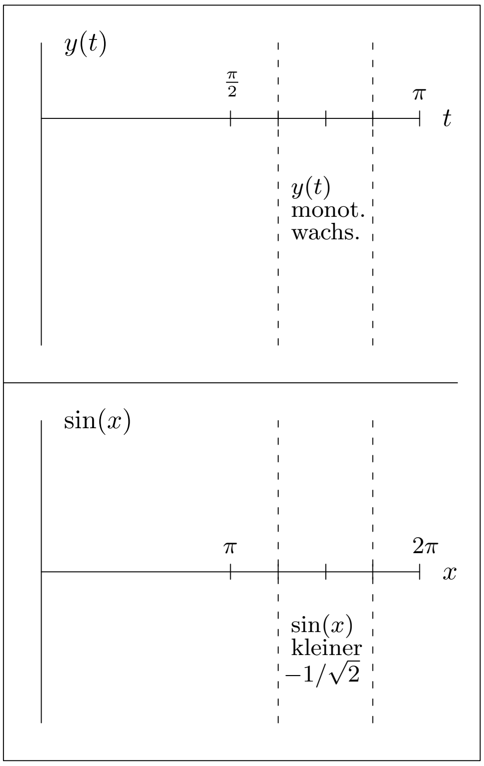
Beschl(Zeit): $b(t) \equiv v'(t) = -2\sqrt{2}\cos(2t)\,.$

b) Es ist $v(t) > 0$ für $-\sqrt{2}\sin(2t) > 1$, d. h. für $\sin(2t) < -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Bekanntlich ist $\sin(5\pi/4) = \sin(7\pi/4) = -1/\sqrt{2}$, so dass

$$v(t) > 0 \quad \text{für} \quad \frac{5\pi}{4} < 2t < \frac{7\pi}{4}$$

$$\text{d. h. für} \quad \frac{5\pi}{8} < t < \frac{7\pi}{8}\,.$$

c) Die Beschleunigung $b(t)$ ist maximal für $\cos(2t) = -1$, d. h. für $2t = \pi$ bzw. $t = \frac{\pi}{2}$. Der Wert der Beschleuinigung ist $b(\pi/2) = 2\sqrt{2} \approx 2.828$.



8.

Man beachte, dass das (sonst z. B. x genannte) Argument, nach dem abgeleitet werden soll, hier a bzw. b lautet, und dass x_i bzw. y_i feste (konstante) Größen sind.

a) Differenzieren von $Q(a)$ nach a ergibt

$$Q'(a) \;=\; -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a) \qquad\qquad [Q''(a) \;=\; 2\,n \;>\; 0]$$

Nullsetzen liefert die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - a) \;=\; \sum_{i=1}^{n} y_i - n\cdot a \;=\; 0 \qquad \text{oder} \quad a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \;\equiv\; \bar{y}\,.$$

Das ist das arithmetische Mittel (oder: der Mittelwert) der y_i.
Zahlenbeispiel: $y_1,\ldots,y_6 = 1.1, 2.6, 1.2, 0.9, 3.6, 2.2$. Man erhält $\bar{y} \;=\; \frac{1}{6}\cdot 11.6 \;=\; 1.9333$.

b) Differenzieren von $R(b)$ nach b ergibt

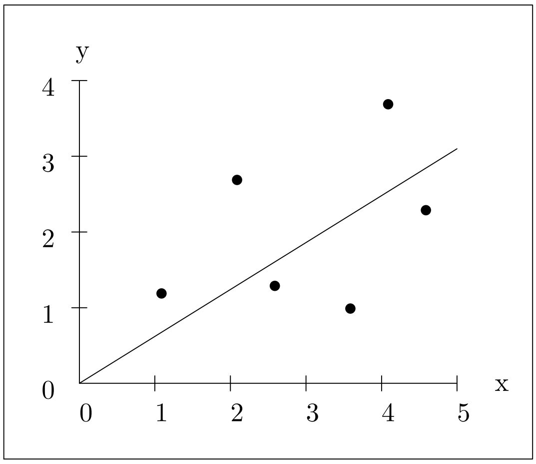
$$R'(b) \;=\; -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - b\cdot x_i)\cdot x_i \qquad\qquad [R''(b) \;=\; 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \;>\; 0].$$

Nullsetzen liefert die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - b\cdot x_i)\cdot x_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} y_i\cdot x_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \;=\; 0 \qquad \text{oder} \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i\cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \equiv \hat{b}$$

Das ist der sog. Regressionskoeffizient, der die Steigung der (durch den Ursprung gehenden) Ausgleichsgeraden durch die (x,y)-Punktwolke angibt.
Zahlenbeispiel: $(x_1, y_1), \ldots, (x_6, y_6) = (1.0, 1.1), (2.0, 2.6), (2.5, 1.2), (3.5, 0.9), (4.0, 3.6), (4.5, 2.2)$. Man erhält

$$\hat{b} \;=\; \frac{36.75}{59.75} \;=\; 0.6151\,.$$



$\boxed{\textbf{9.}}$

Zu diskutieren ist die Funktion

$$f(x) \;=\; (x-1)^2 - (x-1)^3 \;=\; (x-1)^2\cdot(2-x)$$

a) Ableitungen:

$$f'(x) \;=\; 2\,(x-1) - 3\,(x-1)^2 \;=\; (x-1)\cdot(5-3x)$$
$$f''(x) \;=\; 2 - 6\,(x-1) \;=\; 8 - 6\,x \;=\; 2\,(4-3\,x)$$

b) Kurvendiskussion:

1. Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$, da $f(x)$ ein Polynom.
2. Nullstellen von f: $f(x) = 0$ für $x = 1$ und $x = 2$.
3. Extremumsstellen von f:
   $f'(x) \;=\; 0$ für $x = 1$ und $x = 5/3$.
   $f''(1) \;=\; 2 > 0$: strenges lokales Minimum bei $x = 1$.

$$f''(5/3) \;=\; -2 < 0: \text{ strenges lokales Maximum bei } x = 5/3.$$

4. Krümmung der Kurve:

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x < 4/3 \\ = 0 & \text{für } x = 4/3 \,, \\ < 0 & \text{für } x > 4/3 \end{cases} \quad \text{das heißt} \quad \begin{cases} f \text{ streng konvex auf } (-\infty, 4/3] \\ \text{Wendepunkt bei } x = 4/3 \\ f \text{ streng konkav auf } [4/3, \infty) \end{cases}$$

5. Grenzwerte:

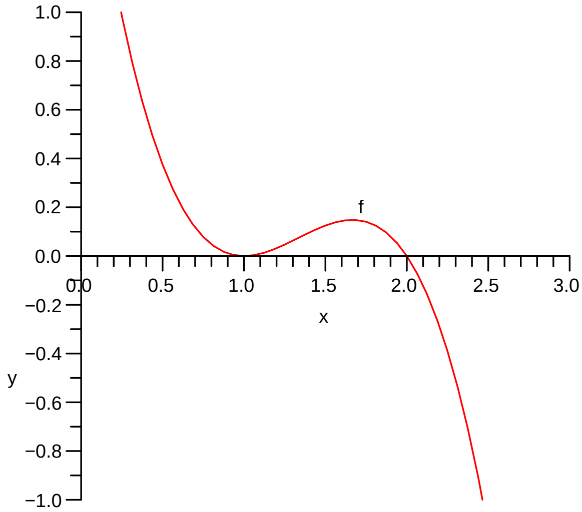
Wegen $f(x) = -x^3 + (ax^2 + bx + c)$ mit geeigneten a, b, c gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \;=\; \infty$$

6. Schaubild:

$[f(0) = 2,\ f(0.5) = 0.375,$
$f(1) = 0,\ f(4/3) = 0.074,$
$f(5/3) = 0.148,\ f(2) = 0,$
$f(2.5) = -1.125\ ]$



10.

Zu analysieren ist die Funktion $f(x) \;=\; x \cdot e^{-x} \;=\; \frac{x}{e^x}$.

a) Erste und zweite Ableitung unter Verwendung der Produktregel

$$f'(x) \;=\; -x \cdot e^{-x} + e^{-x} \;=\; (1-x) \cdot e^{-x}$$

$$f''(x) \;=\; -(1-x) \cdot e^{-x} - e^{-x} \;=\; (x-2) \cdot e^{-x}$$

b) Kurvendiskussion:

1. Maximaler Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$.

2. Nullstellen. $f(x) = 0$ für $x = 0$ ($e^{-x} > 0$ für alle x).

3. Extremums-Stellen. $f'(x) = 0$ für $x = 1$. Wegen $f''(1) = -e^{-1} < 0$ liegt bei $x = 1$ ein strenges lokales Maximum vor $[f(1) = 1/e \approx 0.368]$.

4. Krümmung, Wendepunkte. Es ist

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x < 2 \\ = 0 & \text{für } x = 2 \,. \\ > 0 & \text{für } x > 2 \end{cases} \quad \text{Also ist } f \begin{cases} \text{(streng) konkav auf} & (-\infty, 2] \\ \text{(streng) konvex auf} & [2, \infty) \end{cases}$$

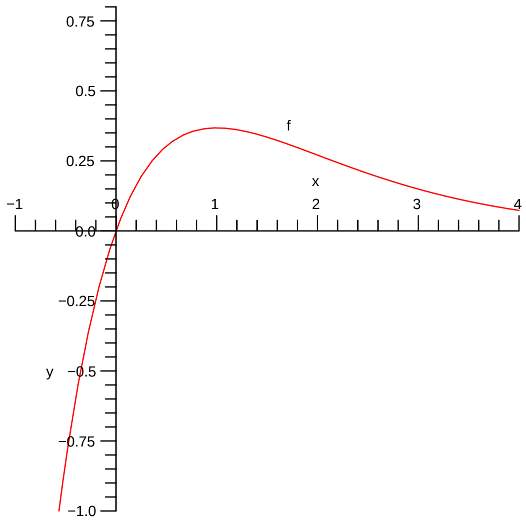
f hat einen Wendepunkt bei $x = 2$ $\quad [f(2) = 2/e^2 \approx 0.271]$.

5. Grenzwerte. Wegen $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e^x} = \begin{cases}0\\ \infty\end{cases}$ gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} \underset{l'Hosp.}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$$

6. Schaubild (Graph von f):



11.

a) Die ersten drei Ableitungen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\,x^2 + x^2\cdot\ln(x)$ lauten

$$f'(x) = 2\,x + 2\,x\cdot\ln(x)\,, \quad f''(x) = 4 + 2\,\ln(x)\,, \quad f'''(x) = \frac{2}{x}$$

b) Kurvendiskussion:

1. $D = (0,\infty)$

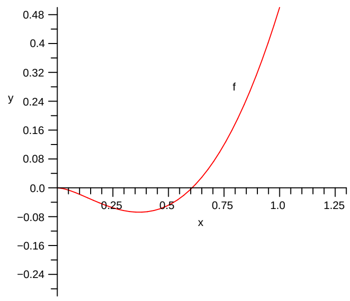
2. $f(x) = 0$ für $\frac{1}{2} + \ln(x) = 0$, d. h. für $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

3. $f'(x) = 0$ für $1 + \ln(x) = 0$, d. h. für $x = \frac{1}{e}$. Wegen $f''(1/e) = 2 > 0$ liegt bei $x = 1/e$ ein lokales Minimum vor.

4. $f''(x) = 0$ für $2 + \ln(x) = 0$, d. h. für $x = \frac{1}{e^2}$. Wegen $f'''(1/e^2) > 0$, bzw. wegen des Vorzeichenwchsels für f'' von − nach + bei $x = 1/e^2$, liegt bei $x = 1/e^2$ ein Wendepunkt vor, von konkavem zu konvexem Krümmungssinn.

5. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, Letzeres wegen $\lim_{x\to 0} x\cdot\ln(x) = 0$.

6. Schaubild

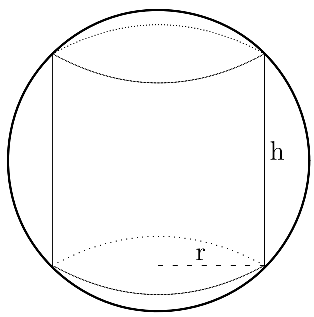


12.

a) Der Satz von Pythagoras liefert im „großen“ Dreieck bzw. im „kleinen“ Dreieck

$$(2\,r)^2 + h^2 = (2\,R)^2$$

$$r^2 + \frac{1}{4}h^2 = R^2\,.$$



Jedenfalls gilt $r^2 = R^2 - \frac{1}{4}\,h^2$.

b) Das Volumen des eingeschriebenen Zylinders ist

$$V = \pi\,r^2\,h\,.$$

Eliminieren von r^2 gemäß a) liefert

$$V \equiv V(h) = \pi\,R^2\,h - \frac{1}{4}\,\pi\,h^3\,, \qquad h > 0\,.$$

Ableiten und Nullsetzen der Ableitung ergibt

$$V'(h) \;=\; \pi\, R^2 - \frac{3}{4}\,\pi\, h^2$$

$$V'(h) \;=\; 0 \quad \text{für} \quad h^2 \;=\; \frac{4}{3}\, R^2\,.$$

Es folgt

$$h \;=\; \frac{2}{\sqrt{3}}\; R\,.$$

Wegen

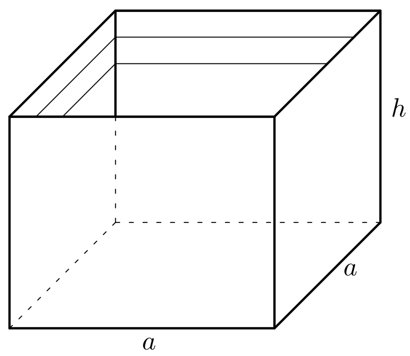
$$V''(h) \;=\; -\,\frac{3}{2}\,\pi\, h < 0$$

liegt für dieses h tatsächlich ein lokales Maximum vor.
c) Mit $h = (2/\sqrt{3})\, R$ ist $r^2 \;=\; R^2 - \frac{1}{3}\, R^2 \;=\; \frac{2}{3}\, R^2$ oder

$$r \;=\; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\; R\,.$$

Also gilt $h = \sqrt{2}\, r$.

13.



Die Oberfläche der Schachtel mit quadratischer Grundfläche und ohne Deckel berechnet sich zu $F = a^2 + 4\, a \cdot h \equiv F_0$. Daraus folgt

$$(*) \qquad h \;=\; \frac{F_0 - a^2}{4\, h} \;=\; \frac{1}{4}\, \Big[\frac{F_0}{a} - a\Big]$$

a) Für das Volumen der Schachtel gilt $V \;=\; a^2 \cdot h$.
Mittels (*) erhalten wir das Volumen als Funktion der Seitenlänge a zu

$$V \;\equiv\; V(a) \;=\; \frac{1}{4}\, [F_0\, a - a^3]$$

Ableiten und Nullsetzen ergibt

$$V'(x) \;=\; \frac{1}{4}\, F_0 - \frac{3}{4}\, a^2 \;=\; 0 \quad \text{für} \quad a^2 \;=\; \frac{F_0}{3} \quad \text{bzw.} \quad a \;=\; \sqrt{\frac{F_0}{3}} \qquad (**)$$

[Wegen $V''(a) \;=\; -\,\frac{3}{2}\, a < 0$ liegt ein Maximum vor]
b) Mit Hilfe von (*) und (**) erhalten wir

$$h \;=\; \frac{\sqrt{3}}{4}\, \frac{F_0 - F_0/3}{\sqrt{F_0}} \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F_0}{3}} \;=\; \frac{1}{2}\, a$$

[Es ist dann $V(a) \;=\; \frac{1}{2}\, a^3$].

14.

a) Aufgrund von $e^0 = 1$ lieg der Fall '0/0' vor.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{x} \;=\; 2\, \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{1} \;=\; 4\, e^0 \;=\; 4$$

b) Es liegt der Fall '∞/∞' vor.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{(1/2)1/\sqrt{x}} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Alternativ: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\,\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$ usw.

c) Es liegt –zweimal hintereinander– der Fall '0/0' vor.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{2\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{2} = -\frac{e^0}{2} = -\frac{1}{2}$$

d) Wegen $\cos(\pi/2) = 0$ und $\sin(\pi/2) = 1$ liegt –zweimalmal hintereinander– der Fall '0/0' vor.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{(x-\pi/2)+\cos x}{(\pi-2\,x)^2} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{-4\,(\pi-2\,x)} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{8} = 0\,.$$

$\boxed{\textbf{15.}}$

a) $f(x) = \sqrt{x}\cdot\ln x = \frac{\ln x}{x^{-1/2}},\ \ x > 0.$

Für $x \to 0$ liegt der Fall „∞/∞" vor. Anwendung von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-1/2})'} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = -2\lim_{x\to 0}\frac{x^{3/2}}{x} = -\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0\,.$$

b) $f(x) = \frac{\cos x}{\pi-2\,x},\ \ x\in[0,b).$

(i) Für $x = 0$ sind Zähler und Nenner von f positiv. Für positive x bleibt der Nenner größer Null für $\pi - 2\,x > 0$, d. h. für $x < \pi/2 \equiv b$.

(ii) Für $x \to \pi/2$ liegt der Fall „0/0" vor. Anwendung von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to\pi/2} f(x) = \lim_{x\to\pi/2}\frac{(\cos x)'}{(\pi-2\,x)'} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{-\sin x}{-2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\pi/2}\sin x = \frac{1}{2}\,.$$

$\boxed{\textbf{16.}}$ Mit der Abkürzung $b = c_0 - 1$ ist

$$y(t) = \frac{e^{\alpha\,t}}{e^{\alpha\,t}+b} = \frac{1}{1+b\,e^{-\alpha\,t}}\,, \qquad t \geq 0$$

Wegen $b > -1$ gilt $y(t) > 0$ für alle $t \geq 0$.

a) Mittels Quotientenregel gelangt man zu

$$\begin{aligned} y'(t) &= \alpha\,\frac{b\,e^{-\alpha\,t}}{\left(1+b\,e^{-\alpha\,t}\right)^2} = \alpha\,\frac{1}{1+b\,e^{-\alpha\,t}}\cdot\frac{\left(1+b\,e^{-\alpha\,t}\right)-1}{1+b\,e^{-\alpha\,t}} \\ &= \alpha\,y(t)\cdot\left(1-\frac{1}{1+b\,e^{-\alpha\,t}}\right) = \alpha\,y(t)\,\big(1-y(t)\big) \end{aligned}$$

das ist die sog. *Logistische Differentialgleichung.*

b) Wegen $e^{-\alpha\,0} = 1$ ist

$$y(0) = \frac{1}{1+b} = \frac{1}{c_0} \equiv y_0\,, \qquad y'(0) =_{a)} \alpha\,y_0\,(1-y_0) = \alpha\,\frac{1}{c_0}\,\big(1-\frac{1}{c_0}\big)$$

Wegen $e^{-\alpha\,t} \longrightarrow 0$ für $t \to \infty$ ist

$$y(t) \longrightarrow 1\,, \qquad y'(t) \longrightarrow_{a)} \alpha\,(1-1) = 0 \quad \text{für } t\to\infty\,.$$

c) 1. Fall $c_0 > 1$, d. i. $y_0 < 1$. Dann ist $b = c_0 - 1 > 0$ und $b\,e^{-\alpha t} > 0$. Also $y(t) < 1$ für alle $t \geq 0$, und damit nach a)

$$y'(t) \;=\; \alpha\, y(t)\,(1 - y(t)) > 0 \quad \text{für alle } t \geq 0$$

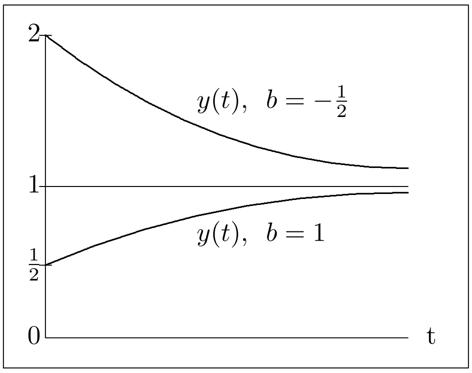
Demnach ist $y(t)$, $t \geq 0$, streng monoton wachsend in t.

2. Fall $c_0 < 1$, d. i. $y_0 > 1$. Dann ist $b = c_0 - 1 < 0$ und $-1 < b\,e^{-\alpha t} < 0$. Also $y(t) > 1$ für alle $t \geq 0$, und damit nach a)

$$y'(t) \;=\; \alpha\, y(t)\,(1 - y(t)) < 0$$

für alle $t \geq 0$. Demnach ist $y(t)$, $t \geq 0$, streng monoton fallend in t.

3. Fall $c_0 = 1$, d. i. $y_0 = 1$. Dann ist $b = 0$ und $y(t) = 1$ konstant für alle $t \geq 0$.



d) Berechnung des Wendepunkts (t_W, y_W):
Aus der Differentialgleichung $y' = \alpha\, y - \alpha\, y^2$ gewinnt man

$$y'' \;=\; \alpha\, y' - 2\,\alpha\, y\, y' \;=\; \alpha\, y'\,(1 - 2\,y)\,,$$

das heißt $y'' = 0$ für $y_W = \frac{1}{2}$. Zu diesem y-Wert gehört ein Wert t_W gemäß $(b = c_0 - 1 > 0)$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + b\cdot e^{-\alpha\, t_W}}\,, \quad \text{d. h.} \quad 2 \;=\; 1 + b\cdot e^{-\alpha\, t_W} \quad \text{bzw.} \quad t_W \;=\; \frac{1}{\alpha}\,\ln(b)\,.$$

$\boxed{\textbf{17.}}$

Das Taylorpolynom T_4 mit Entwicklungsstelle x_0 lautet

$$\begin{aligned} T_4 f(x; x_0) \;=\; & f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot(x - x_0)^2 \\ & + \frac{1}{6} f'''(x_0)\cdot(x - x_0)^3 + \frac{1}{24} f''''(x_0)\cdot(x - x_0)^4 \end{aligned} \tag{1}$$

Auswertungen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ und ihrer Ableitungen an der Stelle $x_0 = 1/2$: $f\big(\frac{1}{2}\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{1/2}}\,, & f'\big(\tfrac{1}{2}\big) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{x\sqrt{x}} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{x^{3/2}}\,, & f''\big(\tfrac{1}{2}\big) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}\,\frac{1}{x^2\sqrt{x}} = \frac{3}{8}\,\frac{1}{x^{5/2}}\,, & f'''\big(\tfrac{1}{2}\big) &= \frac{3}{\sqrt{2}} \\ f''''(x) &= -\frac{15}{16}\,\frac{1}{x^3\sqrt{x}} = -\frac{15}{16}\,\frac{1}{x^{7/2}}\,, & f''''\big(\tfrac{1}{2}\big) &= -\frac{15}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für T_4 in Gleichung (1)

$$T_4 f\big(x, \frac{1}{2}\big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[1 + \big(x - \frac{1}{2}\big) - \frac{1}{2}\,\big(x - \frac{1}{2}\big)^2 + \frac{1}{2}\,\big(x - \frac{1}{2}\big)^3 + \frac{5}{8}\,(x - 1/2)^4\Big]$$

$\boxed{\textbf{18.}}$

a) Die Ableitungen von $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \neq 1$, lauten

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Letzteres wird durch Induktion über n bewiesen, nämlich

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' \underset{I.V.}{=} \frac{n!\,(n+1)}{(1-x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{(n+1)+1}}$$

b) Mit $f^{(n)}(0) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ lautet die Taylorreihe von $f(x)$, mit Entwicklungsstelle 0,

$$Tf(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\,\frac{1}{n!}\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \equiv 1 + x + x^2 + \ldots$$

Für $|x| < 1$ ist dies die geometrische Reihe mit Reihenwert $1/(1-x)$. Also

$$Tf(x,0) = f(x) \quad \text{für alle } |x| < 1\,.$$

Man sagt: $f(x) = 1/(1-x)$ wird für $|x| < 1$ durch $Tf(x,0)$ dargestellt.

$\boxed{\textbf{19.}}$

Setze $f(x) = -\ln(1-x)$, $x \in (-1,1)$. Es ist $f(0) = 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)}, \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = 2\,\frac{1}{(1-x)^3}, \quad f'''(0) = 2$$

$$f''''(x) = 2\cdot 3\,\frac{1}{(1-x)^4}, \quad f''''(0) = 2\cdot 3$$

$$f^{(5)}(x) = 2\cdot 3\cdot 4\,\frac{1}{(1-x)^5}, \quad f^{(5)}(0) = 2\cdot 3\cdot 4$$

Durch Induktion kann bewiesen werden, dass

$$f^{(n)}(x) = (n-1)!\,\frac{1}{(1-x)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (n-1)!$$

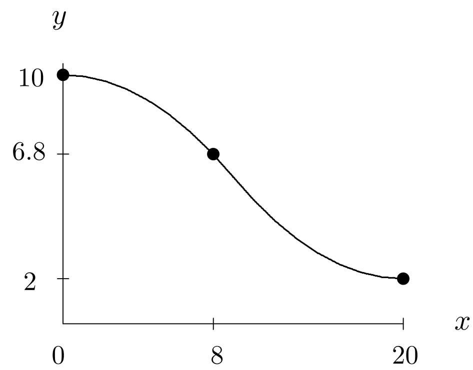
Für die Taylorreihe von f an der Entwicklungsstelle $x = 0$ erhält man dann

$$Tf(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,(x-0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!}\,x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,x^n\,.$$

$\boxed{\textbf{20.}}$

Die zwei Parabeln lauten

$$f(x) = 10 - a \cdot x^2$$
$$g(x) = 2 + b \cdot (x-20)^2$$



Stetiger Anschluss bei $x = 8$ verlangt

$f(8) = g(8);$

das liefert die erste Bestimmungsgleichung

$10 - a \cdot 64 = 2 + b \cdot 144$ bzw.

$$64 \cdot a + 144 \cdot b = 8 \qquad \text{(1.Gleichung)}$$

für a, b.

Knickfreier Anschluss bei $x = 8$ verlangt die Stetigkeit der Ableitungsfunktionen bei $x = 8$: $f'(8) = g'(8)$. Mit $f'(x) = -2\,a\,x$ und $g'(x) = 2\,b\,(x-20)$ liefert das die zweite Bestimmungsgleichung $-2\,a \cdot 8 = -2\,b \cdot 12$ bzw.

$$-16 \cdot a + 24 \cdot b = 0 \qquad \text{(2.Gleichung)}$$

1.Gleichung + 4×2.Gleichung: $144\,b + 96\,b = 8$ oder

$$b = \frac{1}{30}, \qquad a \underset{2.Gl.}{=} \frac{3}{2} \cdot b = \frac{1}{20}$$

Die gesuchten zwei Parabelstücke lauten also

$$f(x) = 10 - \frac{1}{20}x^2, \quad 0 \le x \le 8 \qquad [f(8) = 6.8]$$
$$g(x) = 2 + \frac{1}{30}(x-20)^2, \quad 8 \le x \le 20 \qquad [g(8) = 6.8]$$

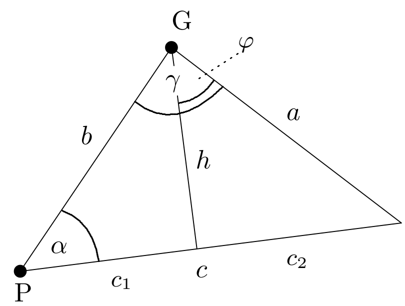
$\boxed{\textbf{21.}}$

a) Durch Ziehen der Höhe h gilt für die Strecke c

$$c = c_1 + c_2 \qquad [c_2 \text{ ist negativ für negatives } \varphi]$$

Es gilt für die einzelnen Strecken

$$\begin{aligned} c_1 &= h \cdot \cot\,\alpha \\ c_2 &= h \cdot \tan\,\varphi \qquad (2) \\ a &= h/\cos\,\varphi \end{aligned}$$



Es folgt $c = c_1 + c_2 = h \cdot (\cot\alpha + \tan\varphi)$. Wie in Aufg. 18 in 3.5 gilt $v_G/v_B = a/c$ und mit (2)

$$\frac{a}{c} = \frac{h}{\cos\varphi} \cdot \frac{1}{h \cdot (\cot\alpha + \tan\varphi)}$$

so dass

$$v_G = \frac{1}{\cos\varphi \cdot \cot\alpha + \sin\varphi} \cdot v_B \qquad (3)$$

b) Der Fall der Aufg. 18a) in 3.5 ergibt sich durch Setzen von $\varphi = 0$; dann heißt (3)

$$v_G = \frac{1}{\cot\alpha} \cdot v_B = \tan\alpha \cdot v_B$$

Der Fall der Aufg 18b) in 3.5 ergibt sich durch Setzen von $\varphi = \alpha$; dann gemäß (3)

$$v_G = \frac{1}{\cos\alpha \cdot \cot\alpha + \sin\alpha} \cdot v_B = \sin\alpha \cdot v_B$$

c) v_G wird (bei gegebenem α und v_B) gemäß Gleichung (3) minimal, falls die Nenner-Funktion

$$f(\varphi) = \cos\varphi \cdot \cot\alpha + \sin\varphi \qquad \text{als Funktion von } \varphi \text{ maximal wird.}$$

Aus $f'(\varphi) = -\sin\varphi \cdot \cot\alpha + \cos\varphi = 0$ folgt $\tan\varphi = \tan\alpha$ bzw. $\varphi = \alpha$. In der Tat, die Funktion tan ist auf $(-\pi/2, \pi/2)$ streng monoton wachsend, also bijektiv. [Man stellt noch fest, dass $f''(\alpha) = -1/\sin\alpha < 0$]. Wegen $\gamma = \pi/2 - \alpha + \varphi$ ergibt sich schließlich $\gamma = \pi/2$. Am günstigsten für G ist also eine Laufrichtung senkrecht $\overline{PG}$.