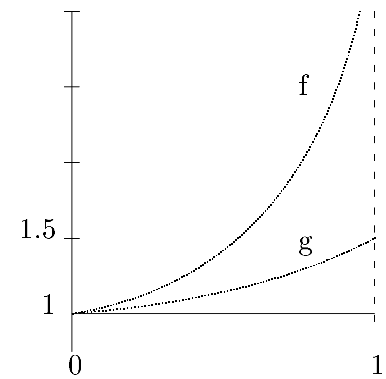
Mathematik für Naturwissenschaftler, Pruscha & Rost
Kap III Lösungen

$\boxed{1.}$ **a)**

x-Wert	0.1	0.2	0.4	0.8	0.999
f(x)	1.0050	1.0206	1.0911	1.6667	22.3663
g(x)	1.005	1.02	1.08	1.32	1.4990



$W_f = [1, \infty)$, $W_g = [1, 1.5]$

In der Tat: Es ist $f(0) = g(0) = 1$, $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$, $g(1) = 1.5$.

b) f und g sind streng monoton wachsend, so dass Umkehrfunktionen existieren.

(i) Für $x \geq 0$ bzw. $y \geq 1$ ist $y = 1/\sqrt{1-x^2}$ nacheinander äquivalent zu

$$y^2 = 1/(1-x^2)\,, \qquad x^2 = (y^2-1)/y^2\,, \qquad x = \sqrt{y^2-1}/y\,.$$

Also lautet die Umkehrfunktion

$$f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\,, \qquad x \in [1, \infty)$$

(ii) Für $x \geq 0$ bzw. $y \in [1, 1.5]$ ist $y = 1 + x^2/2$ nacheinander äquivalent zu

$$x^2 = 2\,(y-1)\,, \qquad x = \sqrt{2}\,\sqrt{y-1}\,.$$

Also lautet die Umkehrfunktion

$$g^{-1}(x) = \sqrt{2}\,\sqrt{x-1}\,, \qquad x \in [1, 1.5]$$

$\boxed{2.}$ Es gilt die relativistische Formel

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad [\text{hier ist } m_0 = 1, \text{ und } v/c \text{ wird gleich } x \text{ gesetzt}]$$

a) Es ist ein x-Wert zu bestimmen mit $f(x) = 1.2$ [bzw. mit $f(x) = 3$]. Gemäß Aufgabe 26 b) ist

$$f^{-1}(1.2) = \sqrt{1 - \frac{1}{1.2^2}} = 0.5528$$

$$f^{-1}(3) = \sqrt{1 - \frac{1}{3^2}} = 0.9428$$

Bei 55.28 bzw. bei 94.28 Prozent der Lichtgeschwindigkeit hat der Körper die Masse 1.2 bzw. 3.

b) (i) Funktion $h(x) = 1$ als Näherung an $f(x)$, mit $x = v/c$ als relative Geschwindigkeit: Der prozentuale Fehler ist kleiner als $p \cdot 100$ % Prozent, falls

$$\frac{f(x) - h(x)}{f(x)} = 1 - \frac{1}{f(x)} \leq p\,, \qquad \text{d. h.} \quad f(x) \leq \frac{1}{1-p}$$

Mit $p = 0.05$ ist

$$f(x_1) = \frac{1}{0.95} \quad \text{für} \quad x_1 = f^{-1}\big(\frac{1}{0.95}\big) =_{26b)} \sqrt{1-0.95^2} = 0.31225$$

Bis zu einer Geschwindigkeit von 31.225 Prozent der Lichtgeschwindigkeit ist der prozentuale Näherungsfehler ≤ 5 Prozent.

(ii) Funktion $g(x) = 1 + x^2/2$ als Näherung an $f(x)$, und zwar für $x \equiv x_1$: Der prozentuale Fehler berechnet sich zu

$$\frac{f(x_1) - g(x_1)}{f(x_1)} = 1 - \frac{g(x_1)}{f(x_1)} =_{(i)} 1 - \frac{1.04875}{1/0.95} = 0.003688 \quad [\cdot 100\%],$$

ist also etwas kleiner als 0.369 Prozent.

$\boxed{3.}$ **a)** Für die Funktion a) ist $D_f = \mathbb{R}$ und $W_f = (0,1)$. Für $y \in (0,1)$ rechnet man

$$y = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}} \iff e^x = \frac{y}{1-y} \iff x = \ln\big(\frac{y}{1-y}\big)$$

Also ist

$$f^{-1}(x) = \ln\big(\frac{x}{1-x}\big), \quad \text{mit} \quad D_{f^{-1}} = (0,1)\,, \; W_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

b) Für die Funktion b) ist $D_f = (1,\infty)$ und $W_f = \mathbb{R}$. Für $y \in \mathbb{R}$ rechnet man

$$y = \ln(\ln(x)) \iff x = e^{e^y}$$

Also ist

$$f^{-1}(x) = e^{e^x}, \quad \text{mit} \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\,, \; W_{f^{-1}} = (1,\infty)$$

$\boxed{4.}$ Wir behandeln die Funktion

$$f(x) = \ln\frac{x}{1-x} = \ln x - \ln(1-x)\,.$$

a) Definitionsbereich

$$D_f = \big\{x : \frac{x}{1-x} > 0\big\} = \big\{x : x > 0 \text{ und } x < 1\big\} = (0,1)$$

b) Grenzwerte bei Annäherung von x an die Grenzen von $(0,1)$

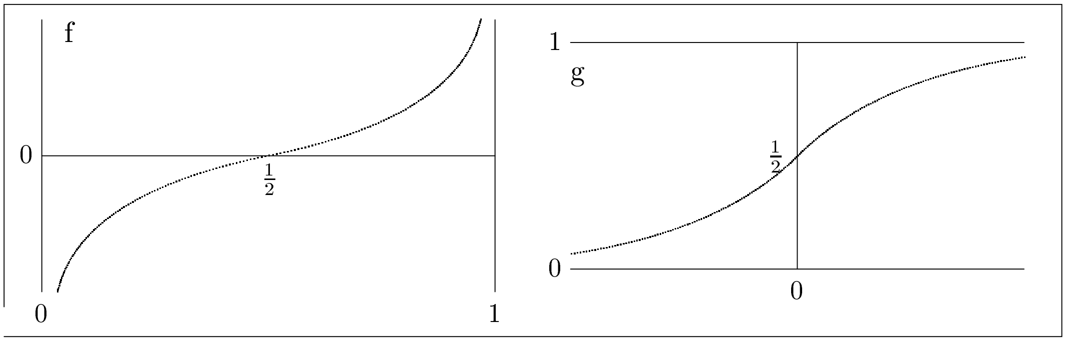
$$\lim_{x\to 0} \ln\frac{x}{1-x} \quad [= {}''\ln 0/1''] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1} \ln\frac{x}{1-x} \quad [= {}''\ln 1/0''] = +\infty$$

Es folgt (mit der Stetigkeitvon f) als Wertebereich

$$W_f = (-\infty, \infty)\,.$$

c) Graphen von f und g



d) Berechnung der Umkehrfunktion der (streng monotonen) Funktion f.
$y = \ln \frac{x}{1-x}$, $x \in (0,1)$, ist nacheinander äquivalent mit

$$e^y = \frac{x}{1-x}\,, \qquad x + x \cdot e^y = e^y\,, \qquad x = \frac{e^y}{e^y+1}$$

Die Umkehrfunktion f^{-1} von f lautet also

$$f^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1}\,.$$

Für die Umkehrfunktion gilt

$$D_{f^{-1}} = W_f = (-\infty, \infty)\,, \quad W_{f^{-1}} = D_f = (0,1)$$

$\boxed{\textbf{5.}}$ Für $h(u) = \ln(u)$, $u \in (0,\infty)$, und $g(x) = x/(1-x)$, $x \in (0,1)$ gilt $W_g = (0,\infty) \subset D_h = (0,\infty)$ (sogar Gleichheit). Die Komposition $h \circ g$ lautet

$$h(g(x)) = \ln\big(\frac{x}{1-x}\big) \equiv f(x)\,, \quad x \in (0,1)\,.$$

Für $g^{-1}(u) = u/(u+1)$, $u \in (0,\infty)$, und $h^{-1}(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, gilt $W_{h^{-1}} = (0,\infty) \subset D_{g^{-1}} = (0,\infty)$ (sogar Gleichheit). Die Komposition $g^{-1} \circ h^{-1}$ lautet

$$g^{-1}(h^{-1}(x)) = \frac{e^x}{e^x+1} \equiv f^{-1}(x) \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

$\boxed{\textbf{6.}}$ Es ist per Definition $D_{f_1} = [0,\infty)$, $W_{f_1} = [0,1)$, $D_{f_2} = [1,\infty)$, $W_{f_2} = [0,\infty)$.
$W_{f_1} \subset D_{f_1}$: $\quad f_1(f_1(x)) = \frac{x}{2x+1}$, $x \geq 0$.
$W_{f_2} = D_{f_1}$: $\quad f_1(f_2(x)) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}$, $x \geq 1$.
$W_{f_1} \not\subset D_{f_2}$: $\quad f_2(f_1(x))$, $x \geq 0$, nicht definiert.
$W_{f_2} \not\subset D_{f_2}$: $\quad f_2(f_2(x))$, $x \geq 1$, nicht definiert

$\boxed{\textbf{7.}}$ Gegeben das Polynom

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_p \cdot x^p \qquad (p \geq 1,\ a_p = 1)$$

a) Es ist für $x_p \neq 0$

$$P(x) = x^p \cdot \big(\frac{a_0}{x^p} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \ldots + 1\big) \equiv x^p \cdot Q(p)$$

Ferner gilt für $p \geq 1$

$$\lim_{x\to\infty} x^p = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^p = \begin{cases} \infty & p \text{ gerade} \\ -\infty & p \text{ ungerade} \end{cases}$$

sowie für $x \to \pm\infty$

$$\frac{a_j}{x^{p-j}} \longrightarrow 0 \qquad (p-j \geq 1)$$

Also $Q(p) \longrightarrow 1$ für $x \to \pm\infty$, so dass

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} x^p = \infty$$

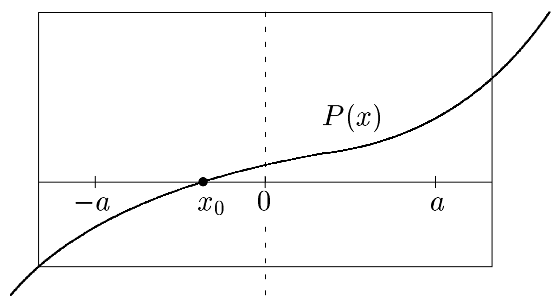
$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} x^p = \begin{cases} \infty & p \text{ gerade} \\ -\infty & p \text{ ungerade} \end{cases}$$

b) Beispiele: $P(x) = 1 + x^2$, $P(x) = 1 + x^4$, oder ähnlich. Hier ist $P(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Wegen a) gilt für ungerades p:

Es existiert ein $a > 0$, so dass $\begin{cases} P(-a) & < 0 \\ P(a) & > 0 \end{cases}$.

Aufgrund der Stetigkeit von P gibt es zu dem „Zwischenwert" 0, $P(-a) < 0 < P(a)$, ein Wert x_0, $-a < x_0 < a$, mit $P(x_0) = 0$.



• Zu den folgenden Aufgaben:

Die Additionstheoreme für sin und cos lauten

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \tag{S}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \tag{C}$$

8.

a)
$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos(x+x) =_{(C)} \cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot\sin(x) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - 1 + \cos^2(x) = 2\cos^2(x) - 1\end{aligned}$$

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \frac{\big(\cos^2(x) - \sin^2(x)\big)/\cos^2(x)}{\big(\cos^2(x) + \sin^2(x)\big)/\cos^2(x)} = \frac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

b)
$$\begin{aligned}\sin(2x) &= \sin(x+x) =_{(S)} \sin(x)\cdot\cos(x) + \sin(x)\cdot\cos(x) = 2\sin(x)\cdot\cos(x) \\ &= \frac{2\sin(x)\cdot\cos(x)/\cos^2(x)}{\big(\cos^2 + \sin^2(x)\big)/\cos^2(x)} = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}\end{aligned}$$

9.

Setze $x = u + v$, $y = u - v$. Dann ist

$$u = \frac{x+y}{2} \qquad v = \frac{x-y}{2} \tag{*}$$

a) $\sin(x) + \sin(y) \;=\; \sin(u+v) + \sin(u-v)$

$$=_{(S)} \quad \sin(u)\cdot\cos(v) + \cos(u)\cdot\sin(v) + \sin(u)\cdot\cos(v) - \cos(u)\cdot\sin(v)$$
$$= \quad \sin(u)\cdot\cos(v) + \sin(u)\cdot\cos(v) \;=\; 2\,\sin(u)\cdot\cos(v)$$
$$=_{(*)} \quad 2\,\sin\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\cdot\cos\Big(\frac{x-y}{2}\Big)$$

b) $\cos(x) + \cos(y) \;=\; \cos(u+v) + \cos(u-v)$

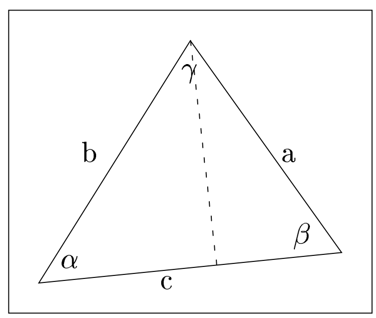
$$=_{(C)} \quad \cos(u)\cdot\cos(v) - \sin(u)\cdot\sin(v) + \cos(u)\cdot\cos(v) + \sin(u)\cdot\sin(v)$$
$$= \quad \cos(u)\cdot\cos(v) + \cos(u)\cdot\cos(v) \;=\; 2\,\cos(u)\cdot\cos(v)$$
$$=_{(*)} \quad 2\,\cos\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\cdot\cos\Big(\frac{x-y}{2}\Big)$$

$\boxed{\textbf{10.}}$ Es gilt

$$\tan(x+y) =_{Def} \quad \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$$
$$=_{(S),(C)} \quad \frac{\sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y)}{\cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y)}$$
$$= \frac{\frac{\sin(x)\cdot\cos(y)}{\cos(x)\cdot\cos(y)} + \frac{\cos(x)\cdot\sin(y)}{\cos(x)\cdot\cos(y)}}{\frac{\cos(x)\cdot\cos(y)}{\cos(x)\cdot\cos(y)} - \frac{\sin(x)\cdot\sin(y)}{\cos(x)\cdot\cos(y)}}$$
$$= \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cdot\frac{\sin(y)}{\cos(y)}} =_{Def} \quad \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\cdot\tan(y)}$$

Die Rechnung ist gültig, solange $x + y \neq \frac{\pi}{2} \pm k\cdot\pi$, d. h. auch $\tan(x)\cdot\tan(y) \neq 1$.

$\boxed{\textbf{11.}}$ Man errichtet als Hilfsgröße die Höhe h auf der Seite c. Die Seitenlänge c wird auf aufgeteilt in $c = c_1 + c_2$.



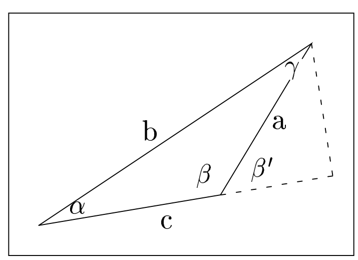
a)

$$\sin(\alpha) \;=\; \frac{h}{b}, \quad \sin(\beta) \;=\; \frac{h}{a} \Longrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \;=\; \frac{a}{b}$$

b)

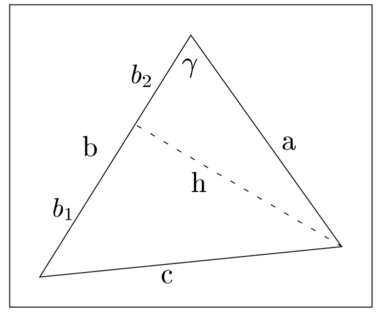
$$\cos(\alpha) \;=\; \frac{c_1}{b}, \quad \cos(\beta) \;=\; \frac{c_2}{a} \Longrightarrow c \;=\; c_1 + c_2 \;=\; a\cdot\cos(\beta) + b\cdot\cos(\alpha)$$

Bemerkung: Für $\beta \in (\pi/2, \pi)$ und $\beta' = \pi - \beta$ gilt $\sin(\beta) = \sin(\beta')$ und $\cos(\beta) = -\cos(\beta')$. Es gelten a) und b) [Letzteres mit einem c_2, das negativ ist]



c) **(i)** $\gamma \in (0, \pi/2)$. Durch Ziehen der Höhe h wird b aufgeteilt in $b = b_1 + b_2$. Pythagoras im rechts liegenden rechtwinkligen Dreieck liefert

$$(*) \qquad b_2^2 \,=\, a^2 - h^2\,, \quad \text{ferner:} \quad b_2 \,=\, a\cdot\cos(\gamma)\,.$$



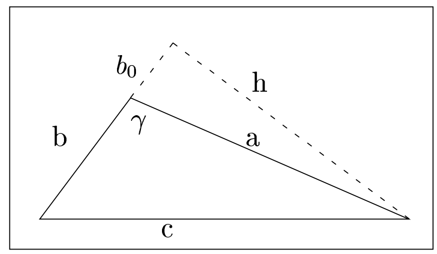
Pythagoras im links liegenden rechtwinkligen Dreieck liefert

$$\begin{aligned} c^2 \,&=\, h^2 + b_1^2 \,=\, h^2 + (b-b_2)^2 \\ &=\, h^2 + b^2 + b_2^2 - 2\,b\cdot b_2 \\ &=_{(*)} \;\; h^2 + b^2 + (a^2-h^2) - 2\,b\cdot a\cdot\cos(\gamma) \\ &=\, a^2 + b^2 - 2\,a\cdot b\cdot\cos(\gamma)\,. \end{aligned}$$

ii) $\gamma\in(\pi/2,\pi)$. Durch Ziehen der Höhe h entstehen zwei ineinander liegende rechtwinklige Dreiecke. Pythagoras im kleinen rechtwinkligen Dreieck liefert

$$(**) \qquad b_0^2 \,=\, a^2 - h^2\,, \quad \text{ferner:} \quad b_0 \,=\, a\cdot\cos(\pi-\gamma) \,=\, -\,a\cdot\cos(\gamma)\,.$$

Pythagoras im großen rechtwinkligen Dreieck liefert



$$\begin{aligned} c^2 \,&=\, h^2 + (b+b_0)^2 \,=\, h^2 + b^2 + b_0^2 + 2\,b\cdot b_0 \\ &=_{(**)} \;\; h^2 + b^2 + (a^2-h^2) - 2\,b\cdot a\cdot\cos(\gamma) \\ &=\, a^2 + b^2 - 2\,a\cdot b\cdot\cos(\gamma)\,. \end{aligned}$$

Im Fall $\gamma = \pi/2$ haben wir wegen $cos(\pi/2) = 0$ den Satz von Pythagoras, d. i. $c^2 = a^2 + b^2$.

- Die Gleichungen der Aufgaben 12 und 13 sind in diesem Sinne zu verstehen:

Es gibt stets einen Wert des Ausdrucks auf rechten Seite der Gleichung (eventuell auf einem Nebenzweig liegend), der gleich der linken Seite ist.

12.

a) Setze $u = \arcsin(x)$, $v = \arcsin(y)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sin\big(\arcsin(x) + \arcsin(y)\big) &\equiv \sin(u+v) \;=_{(S)}\;\; \sin(u)\,\cos(v) + \sin(v)\,\cos(u) \\ &=\, \sin(u)\,\sqrt{1-\sin^2(v)} + \sin(v)\,\sqrt{1-\sin^2(u)} \,=\, x\,\sqrt{1-y^2} + y\,\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Anwendung von arcsin auf beide Seiten liefert die Behauptung.

b) Setze $u = \arccos(x)$, $v = \arccos(y)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \cos\big(\arccos(x) + \arccos(y)\big) &\equiv \cos(u+v) \;=_{(C)}\;\; \cos(u)\,\cos(v) - \sin(u)\,\sin(v) \\ &=\, \cos(u)\,\cos(v) - \sqrt{1-\cos^2(u)}\,\sqrt{1-\cos^2(v)} \,=\, x\,y - \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

Anwendung von arccos auf beide Seiten liefert die Behauptung.

13.

a) Setze $u = \arctan(x)$, $v = \arctan(y)$. Dann gilt

$$\tan\big(\arctan(x) + \arctan(y)\big) \equiv \tan(u+v) \;=_{Aufg.10}\;\; \frac{\tan(u)+\tan(v)}{1-\tan(u)\cdot\tan(v)} \;=\; \frac{x+y}{1-x\cdot y}$$

Anwendung von arctan auf beide Seiten liefert die Behauptung.

b) Im Fall $x \cdot y \nearrow 1$ lese man die rechte Seite von a) als $\lim_{z\to\infty} \arctan(z) = \pi/2$. Die linke Seite von a) ergibt für $x \cdot y = 1$ ebenfalls $\pi/2$, und zwar aufgrund von

$$\tan(u) = x = 1/y = 1/\tan(v) = \cot(v) = \tan(\pi/2 - v)\,,$$

woraus $\arctan(x) = \pi/2 - \arctan(1/x)$ folgt.

$\boxed{\textbf{14.}}$

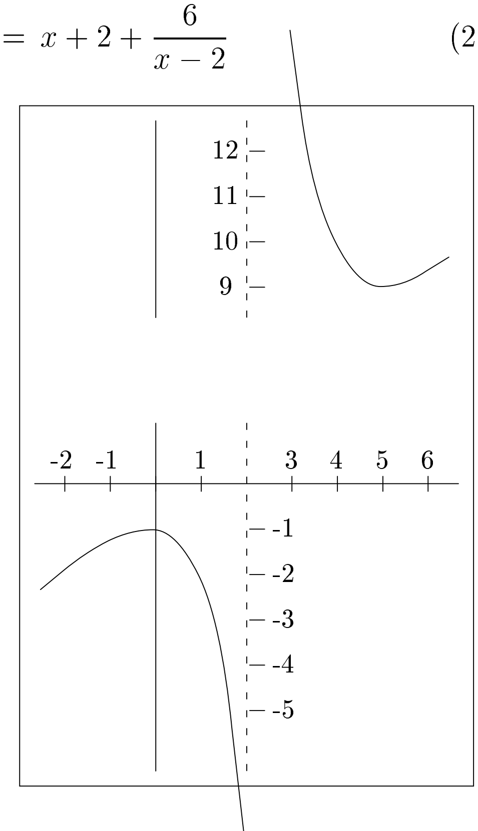
a) f ist nur für $x = 2$ <u>nicht</u> definiert, also $D = (-\infty, 2) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) Man schreibe für $x \neq 0$

$$f(x) \;=\; \frac{x(x+2/x)}{x(1-2/x)} = = \frac{x+2/x}{1-2/x} \tag{1}$$

Alternativ für $x \neq 2$

$$f(x) \;=\; \frac{(x+2)(x-2)+6}{x-2} = = x+2+\frac{6}{x-2} \tag{2}$$



(i) Es folgt wegen $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ aus (1), dass

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \;=\; -\infty$$

(ii) Es folgt wegen $\lim_{x\searrow 2} \frac{1}{x-2} = +\infty$ und $\lim_{x\nearrow 2} \frac{1}{x-2} = -\infty$ aus (2), dass

$$\lim_{x\searrow 2} f(x) \;=\; +\infty$$

$$\lim_{x\nearrow 2} f(x) \;=\; -\infty$$

c)

x	-3	-2	-1	0	1	1.5	2	2.5	3	4	5	6
f(x)	-2.2	-1.5	-1	-1	-3	-8.5	–	16.5	11	9	9	9.5

$\boxed{\textbf{15.}}$

• Die Funktion $f(x)$, $x \geq -1$, lässt sich nach Erweiterung von Zähler und Nenner schreiben als

$$f(x) \;=\; \frac{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{x\cdot\left(1+\sqrt{x+1}\right)} \;=\; \frac{1-(x+1)}{x\cdot\left(1+\sqrt{x+1}\right)} \;=\; \frac{-x}{x\cdot\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$$

a) f ist definiert für $x \neq 0$.

$$f(x) = \frac{-1}{1+\sqrt{x+1}} \quad \text{für } x \neq 0$$

b) f besitzt bei $x=0$ den links- und rechtsseitigen Grenzwert $-\frac{1}{2}$, denn

$$\lim_{x \to 0,\, x \neq 0} f(x) = \frac{-1}{1+\sqrt{0+1}} = -\frac{1}{2}$$

Mit $f(0) = -\frac{1}{2}$ ist f bei $x=0$ stetig ergänzbar.

- Zur Funktion $g(x)$: Wegen $x^2 - 3x + 2 = (x-2)\cdot(x-1)$ ist

$$g(x) = \frac{(x-3)(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-1)}$$

a) Die Funktion g ist definiert für $x \neq 2$, $x \neq 1$; $g(x) = x - 3$ für $x \neq 2$, $x \neq 1$.
b) Ergänze g stetig durch $g(2) = -1$ und $g(1) = -2$. Dann ist $g(x) = x - 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und g ist definiert und stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

- Die Funktion $h(x)$ lautet mit Fallunterscheidung

$$h(x) = \frac{x^3}{|x^3| + x^4} = \begin{cases} \frac{x^3}{-x^3+x^4} = \frac{1}{-1+x} & , \quad x < 0 \\ \frac{x^3}{x^3+x^4} = \frac{1}{1+x}, & \quad x > 0 \end{cases}$$

a) h ist definiert für $x \neq 0$
b) h besitzt bei $x = 0$ keinen Grenzwert, denn

$$\lim_{x \nearrow 0} h(x) = \frac{1}{-1+0} = -1 \quad \text{[linksseitiger Limes]}$$

$$\lim_{x \searrow 0} h(x) = \frac{1}{1+0} = 1 \quad \text{[rechtsseitiger Limes]}$$

Es ist keine stetige Ergänzung bei $x=0$ möglich.

$\boxed{\textbf{16.}}$ **a)** Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, lautet die Funktion $g(x)$ (d. h. der Differenzenquotient) an der Stelle $x \neq x_0$,

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{(x_0 - x)/(x_0 \cdot x)}{x - x_0} = -\frac{1}{x\,x_0} \longrightarrow_{x \to x_0} -\frac{1}{x_0^2}$$

[Aus diesem Ergebnis folgt, dass $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x > 0$ (tatsächlich gültig für $x \neq 0$)].

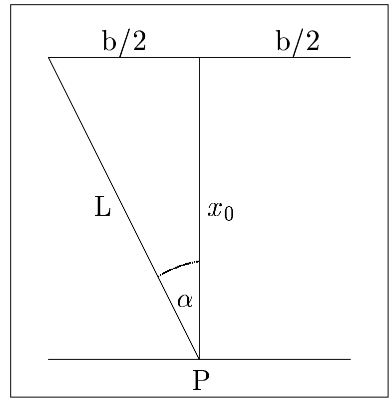
b) Für die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, lautet die Funktion $g(x)$ (d. h. der Differenzenquotient) an der Stelle $x \neq x_0$,

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

$$= \frac{x - x_0}{(x - x_0)\cdot\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \longrightarrow_{x \to x_0} \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

[Aus diesem Ergebnis folgt, dass $\quad f'(x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{x}},\; x > 0$].

$\boxed{\textbf{17.}}$



a) Für die maximale Entfernung x_0 gilt

$$\tan(\alpha) \;=\; \frac{b/2}{x_0}\,, \quad \text{so dass} \quad x_0 \;=\; \frac{b/2}{\tan(\alpha)}$$

Für $b = 7.32$ [m] und $\alpha = 10^o$ erhalten wir

$$x_0 = 20.757 \quad [m]$$

b) Die Torecke hat vom Schützen einen Abstand L [m], sein Schuß mit Geschwindigkeit v_0 [m/sec] erreicht die Ecke in der Zeit $t_0 = L/v_0$ [sec]. Dabei ist

$$L \;=\; \frac{x_0}{\cos(\alpha)}\,, \quad \text{so dass} \quad t_0 \;=\; \frac{x_0}{v_0 \cdot \cos(\alpha)}$$

Die Chance auf einen Einschuss besteht bei $t_0 < 1.2$, das heißt bei

$$v_0 \;>\; \frac{x_0}{1.2 \cdot \cos(\alpha)} \;=_{a)}\; \frac{b/2}{1.2 \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha)} \;=\; \frac{b/2}{1.2 \cdot \sin(\alpha)}\,.$$

Das bedeutet zahlenmäßig, mit $b = 7.32$ [m] und $\alpha = 10^o$,

$$v_0 \;>\; 17.564 \quad [m/sec] \;=\; 63.231 \quad [km/h]\,.$$

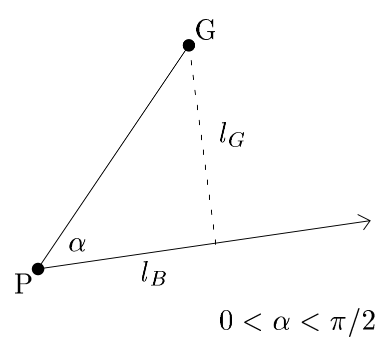
$\boxed{\textbf{18.}}$

Beim Abfangen des Balles betrage die Lauf*zeit* des Balls (und des Gegners) gleich t_0. Die Länge der Lauf*wege* von Ball und Gegner werden mit l_B und l_G bezeichnet. Es gilt

$$t_0 \;=\; \frac{l_G}{v_G} \;=\; \frac{l_B}{v_B}\,, \quad \text{also} \quad \frac{l_G}{l_B} \;=\; \frac{v_G}{v_B}$$

a) Es ist

$$\frac{l_G}{l_B} \;=\; \tan(\alpha) \;=\; \frac{v_G}{v_B}\,, \quad \text{also} \quad v_G \;=\; v_B \cdot \tan(\alpha)$$



b) Hier ist

$$\frac{l_G}{l_B} = \sin(\alpha) = \frac{v_G}{v_B}, \quad \text{also} \quad v_G = v_B \cdot \sin(\alpha)$$

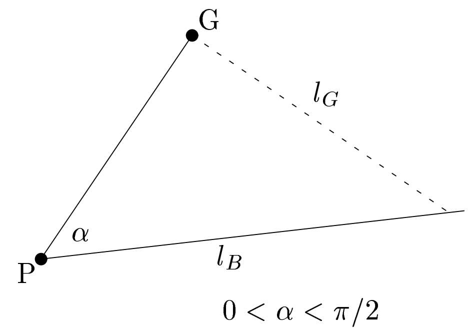
c) Für $0 < \alpha < \pi/2$ gilt

$$\sin(\alpha) > 0,\ 0 < \cos(\alpha) < 1,\ \tan(\alpha) > 0.$$

Es ist dann

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} > \sin(\alpha)\,,$$

so dass v_G im Fall a) größer ist als im Fall b). Die Alternative b) ist also für G die Günstigere (Größere Chance, den Ball abzufangen).



$\boxed{\textbf{19.}}$

Die Parabelstücke lauten

$$\begin{aligned} f(x) &= 11 - a \cdot x^2\,, & 0 \le x \le 12\,, \\ g(x) &= 3 + b \cdot (x-24)^2\,, & 12 \le x \le 24\,, \end{aligned} \tag{1}$$

mit Koeffizienten $a > 0$, $b > 0$.

a) Der 'stetige' Anschluss bei $x = 12$ liefert die Bestimmungsgleichung für a, b, nämlich

$$11 - a \cdot 12^2 = 3 + b \cdot (12-24)^2$$

$$8 = (a+b) \cdot 12^2$$

$$a + b = \frac{8}{144} = \frac{1}{18}$$

Alle Parabeln f und g der Gestalt (1), deren positive Koeffizienten a, b die Gleichung $a + b = \frac{1}{18}$ erfüllen, leisten den stetigen Anschluss bei $x = 12$.

b) Sollen die Parabeln gleiche 'kongruente' Form haben, so muss $f(12) = g(12) = (11+3)/2 = 7$ sein. Es folgt dann

$$11 - a \cdot 12^2 = 7 \quad \text{das heißt} \quad a = \frac{4}{144} = \frac{1}{36}$$

$$3 + b \cdot 12^2 = 7 \quad \text{das heißt} \quad b = \frac{4}{144} = \frac{1}{36}$$