# Mathematik für Naturwissenschaftler, Pruscha & Rost
# Kap II Lösungen

$\boxed{\textbf{1.}}$

$$\textbf{a)}\quad x_n = \frac{4\,n^3-(n+2)^3}{(2n+1)^3-8} = \frac{n^3\big(4-(1+2/n)^3\big)}{n^3\big((2+1/n)^3-8/n^3\big)} = \longrightarrow_{n\to\infty} \frac{4-1}{2^3} = \frac{3}{8}$$

$$\textbf{b)}\quad x_n = \frac{\sqrt{9\,n^8+n^7+1}}{(3\,n^2+1)^2} = \frac{3\,n^4\sqrt{1+1/(9n)+1/(9n^8)}}{9\,n^4\,\big(1+1/(3n^2)\big)^2} \longrightarrow_{n\to\infty} \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\textbf{c)}\quad x_n = \sqrt[n]{3^n}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n} = 3\cdot\big(\sqrt[n]{n}\big)^2 \longrightarrow_{n\to\infty} 3\cdot 1^2 = 3$$

$\boxed{\textbf{2.}}$

$$\textbf{a)}\qquad x_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\frac{1}{2}\,n\,(n+1) = \frac{1}{2}\big(1+\frac{1}{n}\big) \longrightarrow \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$$

$$\textbf{b)}\qquad x_n = \frac{1}{n!}\ln(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n) = \frac{1}{n!}\ln(n!) \underset{n!\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

b) alternativ: Mit $\ln(i)\le\ln(n)$ für $i\le n$ und wegen $n!>n^2$ für $n>3$ haben wir

$$0\le x_n\le\frac{1}{n^2}\,n\cdot\ln(n) = \frac{1}{n}\,\ln(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ Aus Vorl. II 2.2 wissen wir, dass

$$\lim_{n\to\infty}\big(1+\frac{1}{n}\big)^n = e = \lim_{n\to\infty}\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n+1}$$

**a)** $\qquad x_n = \sqrt{(1+1/n)^n} \longrightarrow \sqrt{e}$

**b)**

$$\lim_{n\to\infty}\big(1-\frac{1}{n}\big)^n =_{Hinweis} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\big(1+\frac{1}{n-1}\big)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n+1}} = \frac{1}{e}$$

**c)** 1. Lösungsweg

$$\lim_{n\to\infty}\big(1-\frac{1}{n^2}\big)^n =_{Hinweis} \lim_{n\to\infty}\Big[\big(1-\frac{1}{n}\big)\big(1+\frac{1}{n}\big)\Big]^n = \lim_{n\to\infty}\Big[\big(1-\frac{1}{n}\big)^n\big(1+\frac{1}{n}\big)^n\Big]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\big(1-\frac{1}{n}\big)^n\lim_{n\to\infty}\big(1+\frac{1}{n}\big)^n =_{a)} \frac{1}{e}\cdot e = 1$$

2. Lösungsweg. Die Bernoullische Ungleichung liefert zunächst

$$\big(1-\frac{1}{n^2}\big)^n \ge 1+n\,\frac{-1}{n^2} = 1-\frac{1}{n}$$

Also gilt die Einschließung

$$1-\frac{1}{n} \le \big(1-\frac{1}{n^2}\big)^n \le 1^n = 1$$

was wegen $(1-1/n)\to 1$ zu $(1-1/n^2)^n \to 1$ führt.

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Die Reihen in a) und b) erweisen sich als sogenannte Teleskop-Summen.

**a)** Wir bezeichnen mit $s_n$ die n-te Partialsumme.

**(i)** 
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_2 - a_1) + (a_1 - a_0)$$
$$= a_n - a_0$$

Also $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_n - a_0 = a - a_0$.

**(ii)** 
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1})$$
$$= a_1 - a_{n+1}$$

Also $\lim_{n\to\infty} s_n = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a_1 - a$.

**b)**
$$\frac{1}{4\,k^2-1} = \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{2k+1} \equiv a_k - a_{k+1}$$

Dabei ist in Hinsicht auf a), Teil ii):

$$a_k = \frac{1}{2}\frac{1}{2k-1}, \quad [\text{dann } a_{k+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{2k+1}\text{; insbesondere} \quad a_1 = \frac{1}{2}], \qquad \lim a_k \equiv a = 0\,.$$

Also liefert a), Teil ii)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4\,k^2-1} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\mathbf{5.}}$ **a)**

**(i)** Es ist $\frac{1}{3} = 0.333\ldots \equiv 0.\overline{3}$. Als unendliche Reihe wird dieser periodische Dezimalbruch wie folgt geschrieben

$$0.\overline{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \ldots \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^k} =_{(*)} \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Bei (*) haben wir ausgenützt, dass es sich um eine geometrische Reihe mit $q = 1/10$ handelt.

**(ii)** Es ist $\frac{17}{111} = 0.153153153\ldots \equiv 0.\overline{153}$. Als unendliche Reihe wird dieser periodische Dezimalbruch wie folgt geschrieben

$$0.\overline{153} = \frac{153}{1000} + \frac{153}{1000^2} + \ldots \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\frac{153}{1000^k} = \frac{153}{1000}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1000^k}$$
$$=_{(*)} \frac{153}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{153}{999} = \frac{17}{111}$$

Bei (*) haben wir ausgenützt, dass es sich um eine geometrische Reihe mit $q = 1/1000$ handelt.

**b)** Sei $s$ ein Dezimalbruch, $0 \leq s < 1$. Dann gibt es eine Folge $z_1, z_2, \ldots$ von ganzen Zahlen,

$$0 \leq z_k \leq 9\,, \quad \text{für alle } k \geq 1\,,$$

so dass

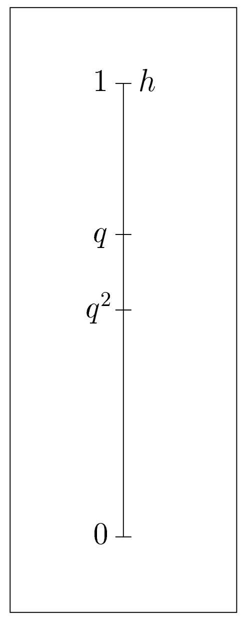
$$s \;=\; 0.z_1 z_2 \ldots \;\equiv\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{10^k}$$

gilt. Die Folge $s_n$ der Partialsummen, das ist

$$s_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{10^k}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

weist diese folgenden Eigenschaften auf.
(i) monoton. In der Tat, da $s_{n+1} - s_n = z_{n+1}/10^{n+1} \geq 0$, so ist $s_n \leq s_{n+1}$ für jedes $n$.
(ii) beschränkt. In der Tat, es ist $0 \leq s_n \leq \sum_{k=1}^{n} (9/10)^k < 1$ für alle $n$.
Nach dem Hauptsatz über monotone Folgen konvergiert $s_n$ und damit die Reihe $s$.

**6.**




1. Fallstrecke $1 \cdot h$
2. Fallstrecke $q \cdot h$
3. Fallstrecke $q^2 \cdot h$

... ...

**a)** Gesamt**fall**strecke

$$W_f \;=\; h \cdot \big(1 + q + q^2 + \ldots\big) \;=\; h \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$
$$\;=\; h \cdot \frac{1}{1-q} \quad \text{[Geometrische Reihe]}$$

Die Werte $q = 3/4$ und $h = 1$ eingesetzt, ergibt $W_f \;=\; 4$.

1. Steigstrecke $q \cdot h$
2. Steigstrecke $q^2 \cdot h$
3. Steigstrecke $q^3 \cdot h$

... ...

**b)** Gesamt**steig**strecke

$$W_s \;=\; h \cdot \big(q + q^2 + q^3 + \ldots\big) \;=\; h\, q \sum_{k=0}^{\infty} q^k \;=\; h \cdot q \cdot \frac{1}{1-q} \quad \text{[Geometrische Reihe]}$$

Die Werte $q = 3/4$ und $h = 1$ eingesetzt, ergibt $W_f \;=\; 3$. Die Gesamtstrecke beträgt

$$W \;=\; W_s + W_f \;=\; h \cdot \frac{1+q}{1-q} \;=\; 7\,,$$

Letzteres nach Einsetzen von $q = 3/4$ und $h = 1$.

$\boxed{7.}$

**a)** Wegen $\frac{1}{k}\,(0.5)^k = \frac{1}{k}\frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^k}$ stellt die konvergente geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ eine konvergente Majorante dar: Die Reihe a) ist also konvergent

Oder Quotientenkriterium: Mit den positiven Reihengliedern $a_k = \frac{1}{k}\frac{1}{2^k}$ folgt die Konvergenz der Reihe aus

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{k \cdot 2^k}{(k+1)\cdot 2^{k+1}} = \frac{1}{2}\,\frac{k}{k+1} \le \frac{1}{2}\,.$$

**b)** Wegen $\frac{1}{k}\,(1.5)^k > \frac{1}{k}$ und wegen der (bestimmten) Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist auch die Reihe b) (bestimmt) divergent.

**c)** Anwendung des Quotientenkriteriums, mit den positiven Reihengliedern $a_k = k^2/k!$, liefert

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)!}\,\frac{k!}{k^2} = \frac{(k+1)^2}{k+1}\,\frac{1}{k^2} = \frac{k+1}{k^2} = \frac{1}{k}\,\big(1+\frac{1}{k}\big) \longrightarrow 0$$

bei $k \to \infty$. Also ist die Reihe c) konvergent.

**d)** Wegen $1/\sqrt{k} \ge 1/k$ für alle $k \ge 1$ und der (bestimmten) Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ ist auch die Reihe d) (bestimmt) divergent.

**e)** Nach Aussage des Quotientenkriteriums ist die Reihe konvergent, denn

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(2\,k)!}{3^{2k}}\,\frac{3^{2k+2}}{(2k+2)!} = \frac{3^2}{(2k+1)(2k+2)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\boxed{8.}$ Wir setzen $a_k = (-1)^{k+1}\,\frac{x^k}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$.

**a)** Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist für jedes $x$ mit $-1 < x \le 1$ konvergent. In der Tat.

$x = 0$: Dann alle $a_k = 0$, Reihenwert also gleich 0.

$0 < |x| < 1$: Anwendung des Quotientenkriteriums liefert

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(-1)^{k+2}x^{k+1}/(k+1)}{(-1)^{k+1}x^k/k}\right| = \frac{k}{k+1}\,|x| \le |x| < 1 \quad \text{für alle } k \ge 1 \ (k_0 = 1)$$

*Hinweis:* Es reicht nicht aus, $|a_{k+1}/a_k| < 1$ für alle $k \ge k_0$ nachzuweisen.

$x = 1$: Dann ist die Folge $a_k = (-1)^{k+1} 1/k$ alternierend, mit einer monotonen Nullfolge $1/k$. Das Leibniz-Kriterium garantiert die Konvergenz der Reihe.

**b)** Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist für jedes $x$ mit $|x| > 1$ und für $x = -1$ divergent. In der Tat.

$x = -1$: Dann

$$a_k = (-1)^{k+1}\frac{(-1)^k}{k} = (-1)^{2k+1}\frac{1}{k} = -\frac{1}{k}\,,$$

und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ $[= -\infty]$ ist die (divergierende) negative harmonische Reihe.

$|x| > 1$: Dann ist $|x| = 1 + c$, $c > 0$, und unter Benutzung der Bernoulli-Ungleichung

$$|a_k| = \frac{|x|^k}{k} = \frac{(1+c)^k}{k} \geq \frac{1 + k\,c}{k} = c + \frac{1}{k} \longrightarrow_{k\to\infty} c > 0$$

Die Folge $a_k$ ist also keine Nullfolge, so dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert.

Hinweis: Später wird sich zeigen, dass für $-1 < x \leq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x) \qquad \text{[Logarithmusreihe]}$$

**9.** **a)** Es ist $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} =$

$n = 0$: $a_0 \cdot b_0$

$n = 1$: $a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0$

$n = 2$: $a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0$

$n = 3$: $a_0 \cdot b_3 + a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + a_3 \cdot b_0$

$n = 4$: $a_0 \cdot b_4 + a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_1 + a_4 \cdot b_0$

... ... ...

Summation $a_0\,(b_0 + b_1 + b_2 + \ldots) + a_1\,(b_0 + b_1 + b_2 + \ldots) + a_2\,(b_0 + b_1 + b_2 + \ldots) + \ldots$

Ausklammern $(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + \ldots) \equiv$

$$\equiv \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$$

**b)** Nach Vorlesung (siehe III 2.2 unten; Anwendung des Quotientenkriteriums) ist die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$ konvergent für jedes $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} &=_{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, x^k\, y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k} \\
&=_{BLS} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}\,,
\end{aligned}$$

wobei wir beim letzten = Zeichen den Binomischen Lehrsatz angewandt haben.

*Hinweis:* Später wird sich zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

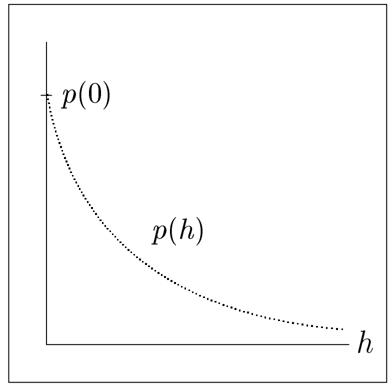
$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \qquad \text{[Exponentialreihe]}$$

gilt. Aussage b) bedeutet dann, dass $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.

**10.** **a)** Wir wenden die barometrische Höhenformel an.

$$p(100) = 760 \cdot e^{-c \cdot 100} = 760 \cdot e^{-125 \cdot 10^{-4}} = 760 \cdot e^{-0.0125} = 760 \cdot 0.98757 = 750.56 \ \ [Torr]$$

$$p(20000) = 760 \cdot e^{-c \cdot 20000} = 760 \cdot e^{-25000 \cdot 10^{-4}} = 760 \cdot e^{-2.50} = 760 \cdot 0.08208 = 62.38 \ \ [Torr]$$




**b)** Aus $p(h) = p(0) \cdot e^{-ch}$ folgt mit der Abkürzung $q(h) = p(h)/p(0)$, dass

$$h = -\frac{1}{c} \cdot \ln q(h)$$

**c)**
$q = 0.8$: $h = (10^4/1.25) \cdot 0.22314 = 1785.14$ [m]
$q = 0.4$: $h = (10^4/1.25) \cdot 0.91629 = 7330.32$ [m]

**d)** Nach b) ist [wegen der strengen Monotonie der Funktion ln, siehe Kap. III 2.3 unten] die Aussage

$380 \leq p(h) \leq 684$ [Torr]

äquivalent mit

$-(1/c) \ln(684/760) \leq h \leq -(1/c) \ln(380/760)$,

das heißt mit

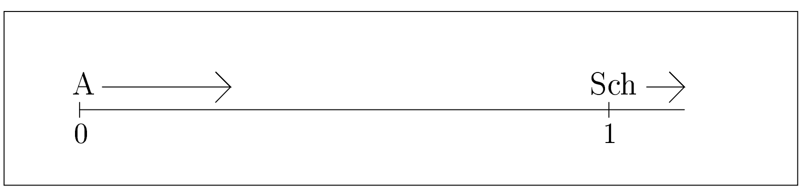
$842.88 \leq h \leq 5545.18$ [m].

**11.**

**a)** Das Argument des Zenon beweist nur Folgendes.

- Zu unendlich vielen Zeitpunkten (zu denen A die Ausgangsposition von Sch jeweils erreicht hat) hat A die Sch nicht eingeholt.

Es beweist nicht, dass er sie *nie* einholt.




**b)** Wir nehmen an, der A läuft $m$ mal schneller als die Sch, die zu Beginn –wenn A die Position 0 einnimmt– einen Vorsprung von 1 hat. A erreicht die Ausgangsposition der Sch jeweils bei

$$(*) \qquad 1\,,\ 1 + \frac{1}{m}\,,\ 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}\,,\ \ldots \qquad \text{[Wegstrecken des A]}$$

Die Summe $s$ dieser Wegstrecken des A stellt eine geometrische Reihe dar, nämlich

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{m}} = \frac{m}{m-1}$$

Die entsprechende Summe der Wegstrecke der Schnecke ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m^k} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{m}} = \frac{1}{m-1} = s - 1$$

Die Position $s$ –vom Nullpunkt gemessen– nehmen A und Sch also gemeinsam ein; bei Position $s$ (bzw. zum Zeitpunkt $t = s/v_A$, wenn $v_A$ die Geschwindigkeit des A ist) holt A die Sch ein.
Auflösung des Paradoxons:
Zu allen Zeitpunkten $< t$ (bzw. bei allen Positione $< s$) hat A die Sch nicht eingeholt.
Zu allen Zeitpunkten $> t$ (bzw. bei allen Positione $> s$) hat A die Sch überholt.

Alternative Berechnung der Position $s$ (setzt das Einholen aber bereits voraus). Zum Zeitpunkt des Einholens muss gelten:

$$\frac{s-1}{v_{Sch}} = \frac{s}{v_A} \implies s - 1 = \frac{s}{m} \implies s = \frac{m}{m-1}$$