

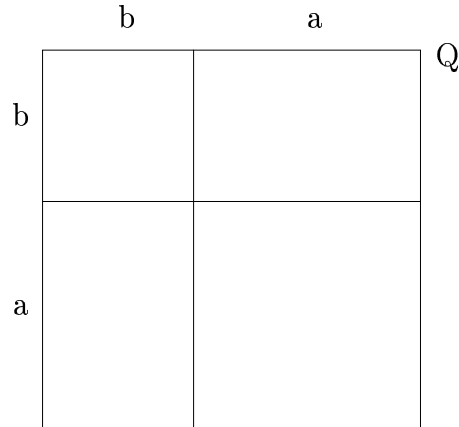
Mathematik für Naturwissenschaftler, Pruscha & Rost

Kap I Lösungen

1 a)

Fläche des Quadrats:

$$\begin{aligned} Q &= (a+b)^2 \\ &\stackrel{4 \text{ Teilflächen}}{=} a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 \\ &= a^2 + 2 a \cdot b + b^2 \end{aligned}$$

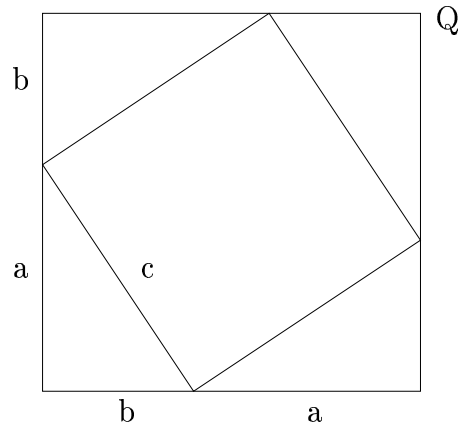


b) Da die Winkelsumme im Dreieck gleich 180° ist, sind die Winkel im eingezeichneten Viereck rechte Winkel.

Fläche des Quadrats:

$$\begin{aligned} Q &\stackrel{5 \text{ Teilflächen}}{=} c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot b \\ &= c^2 + 2 a \cdot b \end{aligned}$$

Mit a) folgt, dass $c^2 = a^2 + b^2$.



2 a) Formel (1) für $b = 1$

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}.$$

Formel (1) für $a = 2$, $b = 1$

$$2^n - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}.$$

b) Setze in (1) $a = 3$, $b = 2$ und $n = 6$ ein. Im Ausdruck (2) fehlt an der rechten Seite von (1) der Term $3^4 \cdot 2 = 162$. Also

$$(2) = \frac{3^6 - 2^6}{3 - 2} - 162 = 729 - 64 - 162 = 503.$$

c) Beweis nach Schema (vollständige Induktion noch nicht bekannt)

$$\begin{aligned} &(a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= a^n + a^{n-1} \cdot b + \dots + a^2 \cdot b^{n-1} + a \cdot b^{n-1} \\ &\quad - a^{n-1} \cdot b - \dots - a^2 \cdot b^{n-1} - a \cdot b^{n-1} - b^n \\ &= a^n - b^n. \end{aligned}$$

3 a)

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 3 \quad 0 : \quad 33 = 3,939... = 3,\overline{93} \\
 \underline{9 \quad 9} \\
 3 \quad 1 \quad 0 \\
 \underline{2 \quad 9 \quad 7} \\
 1 \quad 3 \quad 0 \\
 \underline{\quad 9 \quad 9} \\
 3 \quad 1 \quad 0
 \end{array}$$

b) Setze $a = 4, \overline{321}$. Dann ist

$$1000 \cdot a - 10 \cdot a = 4321, \overline{21} - 43, \overline{21} = 4278, \quad \text{also} \quad 990 \cdot a = 4278$$

Wir erhalten

$$a \equiv 4, \overline{321} = \frac{4278}{990} = \frac{713}{165}$$

4

Gegeben ein Punkt $x \in \mathbb{R}$. Sein Abstand von **1** bzw. von **2** beträgt $|x-1|$ bzw. $|x-2|$.

(i) Gesucht ist die Punktmenge $M \subset \mathbb{R}$ mit

$$(*) \quad |x-1| < \frac{3}{4}|x-2| \quad \text{für alle } x \in M.$$

(ii) Fallunterscheidungen

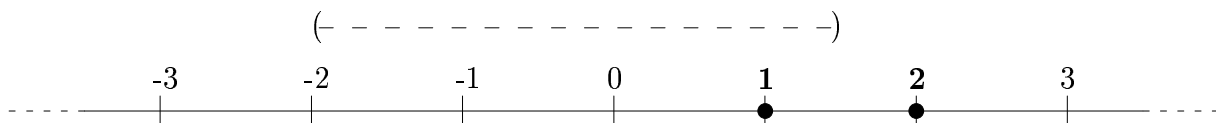
	$x < 1$	$1 \leq x \leq 2$	$x > 2$
$ x-1 $	$1-x$	$x-1$	$x-1$
$ x-2 $	$2-x$	$2-x$	$x-2$

$x < 1$: Ungleichung (*) lautet $1-x < \frac{3}{4}(2-x)$ oder $x > -2$
 $1 \leq x \leq 2$: Ungleichung (*) lautet $x-1 < \frac{3}{4}(2-x)$ oder $x < \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$
 $x > 2$: Ungleichung (*) lautet $x-1 < \frac{3}{4}(x-2)$ oder $x < -2$,
 Letzteres ein Widerspruch zu $x > 2$ (!)

Gemäß der ersten beiden Zeilen ergibt sich die Lösungsmenge

$$M = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 1\frac{3}{7}\}$$

(iii)



Probe:

Für $x = -2$ gilt $1 - (-2) = 3/4 (2 - (-2))$.

Für $x = 1 \frac{3}{7}$ gilt $1 \frac{3}{7} - 1 = \frac{3}{4} (2 - 1 \frac{3}{7})$.

5

$$\frac{10^6 \cdot a^{-3} \cdot b^7}{10^{-8} \cdot a^{-2} \cdot b^6} = 10^{6-(-8)} \cdot a^{-3-(-2)} \cdot b^{7-6} = 10^{14} \cdot a^{-1} \cdot b,$$

also $z_1 = 14, z_2 = -1, z_3 = 1$.

6.

Einsetzen von f, g, h ergibt ($a, x > 0$)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{10^{-5} \cdot a^{5/2} \cdot x^4 \cdot 10^6 \cdot a^{-3/2} \cdot x^{1/3}}{10^2 \cdot a^{-3} \cdot x^{7/3}}} &= \sqrt{10^{-5+6-2} \cdot a^{5/2-3/2+3} \cdot x^{4+1/3-7/3}} \\ &= \sqrt{10^{-1} \cdot a^4 \cdot x^2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot a^2 \cdot x \end{aligned}$$

7.

a) Mit $M = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}, r = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}, \gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{sec}^2)$ rechnet man

$$F = 6.67 \cdot \frac{5.97}{6.37^2} \cdot 10^{-11} \cdot 10^{24} \cdot 10^{-12} \cdot m_0 = 0.9813 \cdot 10^{24-23} \cdot m_0 = 9.813 \cdot m_0.$$

Also ist $g = 9.813$ in den Einheiten

$$\frac{m^3}{\text{kg} \cdot \text{sec}^2} \cdot \frac{\text{kg}}{m^2} = \frac{m}{\text{sec}^2}.$$

b) Es ist $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3, 1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g}, 1 \text{ sec}^2 = (1/3.6) \cdot 10^{-3} \text{ min}^2$. Also folgt

$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{\text{kg} \cdot \text{sec}^2} = 6.67 \cdot 3.6 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10^6}{10^3 \cdot 10^{-3}} \frac{\text{cm}^3}{\text{g} \cdot \text{min}^2} = 2.4012 \cdot 10^{-4} \frac{\text{cm}^3}{\text{g} \cdot \text{min}^2}.$$

8

Unter Verwendung des Binomischen Lehrsatzes (BLS)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \sum_{k=0}^4 \binom{5}{k} \cdot 3^k &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \cdot 3^k - \binom{5}{5} \cdot 3^5 =_{BLS} (1+3)^5 - 243 \\ &= 1024 - 243 = 781 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \sum_{k=1}^5 \binom{6}{k} \cdot 3^k \cdot 7^{6-k} &= \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} \cdot 3^k \cdot 7^{6-k} - \binom{6}{0} \cdot 3^0 \cdot 7^6 - \binom{6}{6} \cdot 3^6 \cdot 7^0 \\ &=_{BLS} (3+7)^6 - 7^6 - 3^6 = 10^6 - 7^6 - 3^6 = 881\,622 \end{aligned}$$

c)

$$\sum_{i=0}^5 \binom{5}{i} 4^i - \sum_{i=0}^4 \binom{5}{i} 2^i \cdot 3^{5-i} =_{BLS} (4+1)^5 - [(2+3)^5 - \binom{5}{5} \cdot 2^5] = 2^5 = 32$$

9 a) I. F. befinden sich über und unter dem langen Bruchstrich jeweils k Faktoren.
Sei $k \leq m$ (sonst siehe (ii) unten).

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^k} \binom{m}{k} &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{m \cdot m \cdot \dots \cdot m} = \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{m}\right) \\ &<_{(k \geq 2)} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \\ &= \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

b) (i) Für $k = 0$ und $k = 1$ gilt $\frac{1}{m^k} \binom{m}{k} = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} [= 1]$.

(ii) Für $k = m+1, \dots, n$ gilt $\frac{1}{m^k} \binom{m}{k} = 0$.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m &=_{BLS} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} =_{(ii)} \sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} <_{(i), a)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &=_{BLS} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Beachte beim $<$ -Zeichen, dass (wegen $n \geq 2$) auf mindestens einen Summanden der Aufgabenteil a) zutrifft.

10. Es handelt sich um ein Permutationsproblem.

Die Plätze 1,3,5,7,9,11 der bunten Reihe werden von Buben, die Plätze 2,4,6,8,10 von den Mädchen eingenommen.

Buben und Mädchen können jeweils untereinander ihre Plätze tauschen (permutieren).

Anzahl = $P_6(6) \cdot P_5(5) = 6! \cdot 5! = 720 \cdot 120 = 86\,400$.

11. Es handelt sich um Permutationen bzw. Kombinationen von $n = 6$ Elementen mit Wiederholungen.

a) $P_5^W(6) = 6^5 = 7776$

b) $C_5^W(6) = \binom{6+5-1}{5} = 252$

12.

Die Positionen der 11 Buchstaben im Wort werden mit 1,2,...,11 durchnummeriert. Es handelt sich um Kombinationsprobleme.

a) Die 7 Positionen der A's legen das Wort eindeutig fest (Die B's kommen auf die restlichen 4 Positionen). Beispiel **BAAABBAABAA**

$$\text{Anzahl Wörter} = \binom{11}{7} = \left[\binom{11}{4} = \right] \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330$$

b) Die 6 Positionen der A's und die 3 Positionen der B's unter den restlichen 5 legen das Wort fest. (Oder: Die 3 Positionen der B's und die 2 Positionen der C's unter den

restlichen 8). Beispiel BACABBAACAA

$$\begin{aligned}\text{Anzahl Wörter} &= \binom{11}{6} \cdot \binom{5}{3} = \binom{11}{3} \cdot \binom{8}{2} \\ &= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 165 \cdot 28 = 4620\end{aligned}$$

13. Bei der Auswahl von Vorlesungen handelt es sich um ein Kombinationsproblem:

a) Anzahl = $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{7}{4} = 6 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 35 = 31\,500$.

b) Anzahl = $(6+4+1) \cdot (10+5+1) \cdot (15+6+1) \cdot (35+21+7+1) = 11 \cdot 16 \cdot 22 \cdot 64 = 247\,808$.

14. Es handelt sich um Kombinationsprobleme.

a) Ein Spieler erhält 10 aus 32 Karten, wobei die Reihenfolge der Zuteilung keine Rolle spielt: Kombinationen von 32 Elementen zur Klasse 10 ohne Wiederholungen. Ihre Anzahl ist

$$C_{10}(32) = \binom{32}{10} = \frac{32 \cdot 31 \cdot \dots \cdot 24 \cdot 23}{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = 64\,512\,240 \quad [\text{ca. } 64.5 \text{ Millionen}]$$

b) Wir nehmen an, die Spieler seien unterscheidbar. Der erste Spieler erhält 10 aus 32 Karten, der zweite erhält 10 aus den restlichen 22 Karten, der dritte Spieler erhält 10 aus den restlichen 12 Karten. Die Anzahl insgesamt ist

$$C_{10}(32) \cdot C_{10}(22) \cdot C_{10}(12) = \binom{32}{10} \cdot \binom{22}{10} \cdot \binom{12}{10} \approx 3 \cdot 10^{15}$$

Werden die Spieler nicht in 1., 2. und 3. Spieler unterschieden, so ist die Anzahl noch durch $3! = 6$ zu dividieren.

15 a) Aus $n = 64$ Feldern werden $k = 8$ als Standorte der 8 Türme ausgewählt, wobei (bei der Auswahl) die Reihenfolge keine Rolle spielt: Kombinationen von 64 Elementen zur Klasse 8 ohne Wiederholungen. Ihre Anzahl ist

$$\begin{aligned}C_8(64) &= \binom{64}{8} = \frac{64 \cdot 63 \cdot \dots \cdot 58 \cdot 57}{8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \quad [= 2 \cdot 3 \cdot 57 \cdot 58 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 62] \\ &= 4\,426\,165\,368 \quad [\text{ca. } 4.4 \text{ Milliarden}]\end{aligned}$$

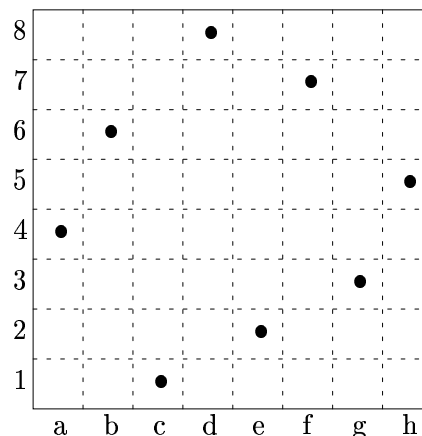
b) Auf jeder der 8 Vertikalen a,b,...,h und der 8 Horizontalen 1,2,...,8 kommt jeweils ein Turm zu stehen

a-Linie: 8 Möglichkeiten

b-Linie: 7 Möglichkeiten (weil eine Horizontale schon besetzt ist)

...

h-Linie: 1 Möglichkeit (weil 7 Horizontalen schon besetzt sind).



Die Anzahl insgesamt ist also gleich der Anzahl der Permutationen von 8 Elementen ohne Wiederholung:

$$P_8(8) = 8! = 40\,320$$

16. (i) Für die 15 A-T Paare stehen 15 aus 30 Plätzen des Stranges zur Verfügung (Die 15 G-T Paare nehmen dann die anderen 15 Plätze ein). Dazu gibt es

$$C_{15}(30) = \binom{30}{15} = \frac{30!}{15! \cdot 15!} \approx 1.551 \cdot 10^8 \quad [\text{ca. 155 Millionen}]$$

Möglichkeiten.

(ii) Da es zwei unterscheidbare Stränge gibt (Strang 1 und Strang 2), gibt es bei *jedem* der 30 Paare (A-T bzw. G-C) die Alternativen A auf Strang 1 oder auf Strang 2 (bzw. G auf Strang 1 oder 2). Dies beläuft sich auf

$$2^{30} \approx 1.074 \cdot 10^9 \quad [\text{ca. 1 Milliarde}]$$

Möglichkeiten. Insgesamt haben wir also

$$2^{30} \cdot C_{15}(30) \approx 1.665 \cdot 10^{17} \quad \text{verschiedene solcher Doppelstränge}$$

17.

Turmhöhe $H = 330 \text{ [m]} = 0.33 \text{ [km]}$

Erdradius (Äquator) $R = 6378.160 \text{ [km]}$

Abstand am Boden A

Abstand an der Spitze $A + \Delta$

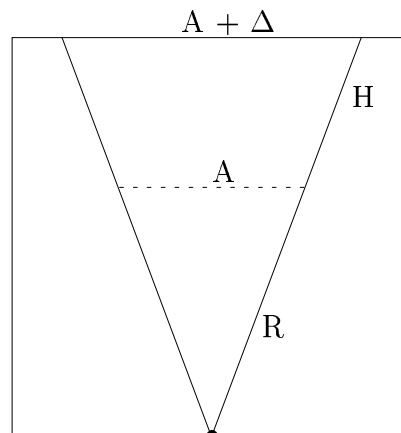
Gefragt ist nach $\Delta/A \cdot 100 \%$.

Der Strahlensatz liefert

$$\frac{A + \Delta}{A} = \frac{H + R}{R}, \quad \text{das heißt} \quad \frac{\Delta}{A} = \frac{H}{R}.$$

Die verlangte Prozentzahl lautet

$$\frac{\Delta}{A} \cdot 100 = \frac{33}{6378.16} = 0.0052 \%.$$



18

Kosten für

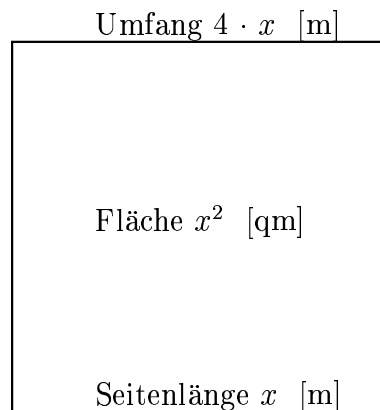
Alternative 1: $1 \times \text{Fläche} = x^2 \text{ EUR}$

Alternative 2:

$2 \times \text{Umfang} + \text{Festkosten} = 8 \cdot x + 105 \text{ EUR}$

Kostengleichheit herrscht für ein x mit

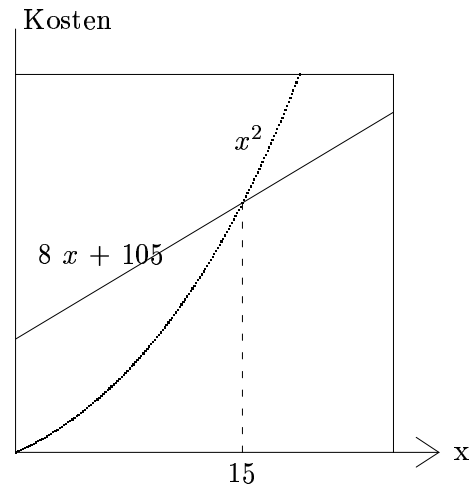
$$x^2 - 8 \cdot x - 105 = 0$$



Die positive Lösung dieser quadratischen Gleichung lautet

$$x = 4 + \sqrt{\frac{64}{4} + 105} = 4 + \sqrt{121} = 15 \text{ [m]}$$

Bei $x < 15 \text{ [m]}$ ist die Alternative 1, bei $x > 15$ die Alternative 2 die Kosten-günstigere; siehe die (nicht maßstabsgetreue) nebenstehende Skizze.



19. a)

Wir rechnen in der Einheit h [Stunde]. Die Umlaufzeiten des St-Zeigers und des Mi-Zeigers sind

$$t_{St} = 12 \text{ [h]}, \quad t_{Mi} = 1 \text{ [h]}$$

Wir nehmen den Umfang des Ziffernblatt-Kreises als 1 an.

Geschwindigkeiten: $v_{St} = 1/t_{St}$, $v_{Mi} = 1/t_{Mi}$.

Strecken, die zum Zeitpunkt t_1 des erneuten Zusammentreffens zurückgelegt wurden:

$$\begin{aligned} \text{St-Zeiger} \quad v_{St} \cdot t_1 &= t_1/t_{St}, \\ \text{Mi-Zeiger} \quad v_{Mi} \cdot t_1 &= t_1/t_{Mi}. \end{aligned}$$

Letztere ist um 1 (d.h. um einen Umlauf) größer als die Erstere. Damit ergibt sich die Gleichung

$$1 + \frac{t_1}{t_{St}} = \frac{t_1}{t_{Mi}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{t_1} = \frac{1}{t_{Mi}} - \frac{1}{t_{St}}$$

Es folgt

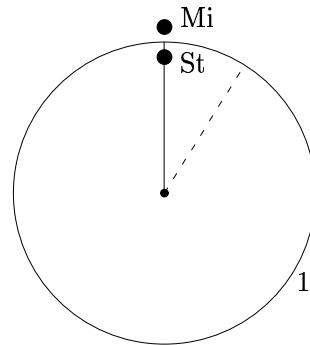
$$t_1 = \frac{1}{1/t_{Mi} - 1/t_{St}} = \frac{12}{11} \text{ [h]} = 1 \frac{1}{11} \text{ [h]}$$

Dem entspricht eine Uhrzeit von

$$1 \text{ Uhr und } 60 \cdot \frac{1}{11} = 1 \text{ Uhr und } 5.\overline{45} \text{ [min]}.$$

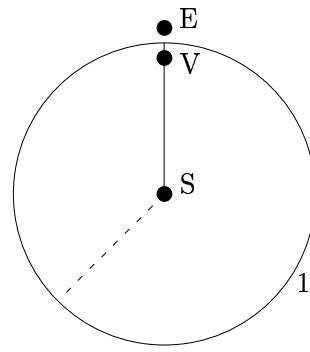
b)

Wir rechnen in der Einheit (Erd)Tage. Die Umlaufzeiten der Erde und der Venus sind



$$t_E = 365.25 \text{ [Tage]}, \quad t_V = 224.70 \text{ [Tage]}$$

Wir nehmen den Umfang der (als kreisförmig und gemeinsam gedachten) Bahn als 1 an.



Ganz analog zu a) ergibt sich für den Zeitpunkt t_1 der nächsten Konjunktion die Gleichung

$$\frac{1}{t_1} = \frac{1}{t_V} - \frac{1}{t_E}, \quad \text{also} \quad t_1 = \frac{1}{1/t_V - 1/t_E} = 583.93 \text{ [(Erd)Tage]}$$