

Logik

Franz Merkl¹

(Sehr vorläufige Version², 7. Februar 2019)

Inhaltsverzeichnis

1	Sprachebenen	3
2	Syntax einer Sprache 1. Stufe	3
2.1	Alphabet.	3
2.2	Terme und Formeln.	5
2.3	Varianten der Darstellung syntaktischer Objekte	8
2.4	Abkürzungsregeln	12
2.5	Substitution und gebundene Umbenennung	14
2.6	Herleitungen	16
2.7	Erweiterung der Sprache mit Konstantensymbolen	24
3	Theorien 1. Stufe	25
3.1	Die Peanoarithmetik	26
3.2	Die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre	28
3.3	Vollständige Theorien	33
4	Semantik einer Sprache 1. Stufe	36
4.1	Strukturen und Modelle	36
4.2	Äquivalenz von Syntax und Semantik bei Sprachen 1. Stufe	42
4.3	Anwendungen des Gödelschen Vollständigkeitssatzes	50
4.3.1	Definitorische Erweiterungen	51
4.3.2	Klassen in der Mengenlehre	56
4.3.3	Der Satz von Löwenheim-Skolem und der Kompaktheitssatz	60
5	Nonstandardmodelle	64
5.1	Ultrapotenzen	64
5.2	Nonstandard-Analysis	71
6	Induktion und Rekursion in der Mengenlehre	77
6.1	Ordinalzahlen	77
6.2	Induktion in der Mengenlehre	81
6.3	Rekursion in der Mengenlehre	87
6.4	Anwendungen des Rekursionssatzes in der Mengenlehre	93

¹Vielen Dank an Dr. Josef Berger für Verbesserungshinweise und gute Ideen!

²Dies ist nur ein Entwurf eines Logikskripts. Ohne jede Garantie. Für Hinweise auf Fehler aller Art ist der Autor dankbar.

7	Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit	104
7.1	Rekursive Funktionen auf natürlichen Zahlen.	104
7.2	Darstellbarkeit rekursiver Funktionen	113
7.3	Codierung der Prädikatenlogik 1. Stufe	117
7.4	Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz	124
7.5	Das Halteproblem	128
7.6	Ausblick: Der 2. Gödelsche Unvollständigkeitssatz	132

1 Sprachebenen

Die Mathematische Logik beschäftigt sich mit der Analyse des logischen Schließens, mit dem Wechselspiel von Syntax und Semantik mathematischer Formeln, mit rekursiven Strukturen, Berechenbarkeit und Mengenlehre. Diese Analyse geschieht mit Methoden der Mathematik. Untersuchungsgegenstand und Untersuchungsmethode der mathematischen Logik ähneln sich daher sehr, mehr als in anderen Gebieten der Mathematik. Daher ist es nötig, verschiedene Sprachebenen zu unterscheiden, stärker als sonst in der Mathematik: “Objektsprache” und “Metasprache”.

Hierzu eine Analogie: Will man die Grammatik einer natürlichen Sprache analysieren, so braucht man eine weitere Sprache, in der man diese Analyse vornimmt. Zum Beispiel kann man im Englischunterricht in deutscher Sprache über die englische Grammatik sprechen, aber auch über die Bedeutung englischer Wörter und Sätze. Hier entspricht Englisch der Objektsprache; das ist die Sprache, die auf ihre Syntax und Semantik untersucht wird. In dem Beispiel entspricht Deutsch der Metasprache; das ist die Sprache, die man für die Analyse der Grammatik der Objektsprache verwendet und deren Semantik man zum Verständnis der Analyse schon voraussetzen muss. Natürlich kann man im fortgeschrittenen Fremdsprachenunterricht auch in englischer Sprache über die englische Grammatik sprechen, aber dennoch bleibt die Unterscheidung zwischen der Sprache, die analysiert wird, und der Sprache, in der die Analyse vorgenommen wird.

Noch eine weitere Analogie aus der Informatik: Beim Compilerbau, also bei der Entwicklung von Übersetzungsprogrammen einer höheren Programmiersprache (Analogon der Objektsprache) in eine Maschinensprache, braucht man noch eine dritte Programmiersprache, in der der Compiler selbst geschrieben wird (Analogon der Metasprache). Auch hier kann manchmal die Objektsprache eine Kopie der Metasprache sein: Das erste Programm, das ein in einer Programmiersprache S neu geschriebener, effizienter Compiler für S übersetzt, könnte er selbst sein.

In dieser Vorlesung verwenden wir als Metasprache meist die naive Mengenlehre, wie sie auch sonst in der Mathematik üblich ist, oder manchmal auch nur endliche oder konstruktive Fragmente davon, insbesondere wenn wir von syntaktischen Objekten wie Zeichenketten sprechen.

2 Syntax einer Sprache 1. Stufe

Wir beginnen mit den einfachsten syntaktischen Strukturen einer Objektsprache, genauer gesagt einer Sprache 1. Stufe. Der Zusatz “1. Stufe” bedeutet, dass man nur Variablen für Objekte hat, jedoch keine Variablen für Aussagen über Objekte.

2.1 Alphabet.

Definition 2.1 (Alphabet einer Sprache 1. Stufe) *Das Alphabet einer Sprache erster Stufe besteht aus folgenden verschiedenen Arten von Symbolen:*

- dem Symbol $\rightarrow$, “Implikationspfeil” genannt;
- dem Symbol $\forall$, “Allquantor” genannt;
- dem Symbol $\perp$, “Falsum” genannt;
- endlich oder unendlich vielen “Variablen”³, im Moment bezeichnet mit $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$
- endlich oder unendlich vielen “Prädikatensymbolen”, im Moment bezeichnet mit $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \dots$. Jedem Prädikatensymbol p wird eine Zahl $s(p) \in \mathbb{N}_0$ zugeordnet, seine “Stelligkeit”.⁴
- endlich oder unendlich vielen “Funktionssymbolen”, im Moment bezeichnet mit $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \dots$. Auch jedem Funktionssymbol f wird eine Stelligkeit $s(f) \in \mathbb{N}_0$ zugeordnet.
- In einer “Sprache erster Stufe mit Gleichheit” zeichnet man noch ein spezielles 2-stelliges Funktionssymbol $=$ aus, “Gleichheitszeichen” genannt.

Man kann das Falsum $\perp$ auch als ein spezielles 0-stelliges Prädikatensymbol auffassen. 0-stellige Funktionssymbole werden auch Konstantensymbole genannt.

Während die Symbole $\rightarrow, \forall, \perp$ und $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ in allen Sprachen erster Stufe vorkommen, unterscheiden sich verschiedene Sprachen in der Wahl ihrer Prädikatensymbole, Funktionssymbole und deren Stelligkeiten.

Alternativ zur Einführung unendlich vieler verschiedener Variablen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$ kann man (Objekt-)variablen auch als Zeichenketten einführen, z.B. mit der folgenden rekursiven Definition:

Rekursive Definition 2.2 (Variablen als Zeichenketten) ⁵ Jede Objektvariable erhält man dadurch, dass man die folgenden Regeln endlich oft anwendet:

- Das Zeichen $\mathbf{x}$ ist eine Variable.
- Ist v eine Variable, so ist auch $|v$ eine Variable.

Man kann dann $\mathbf{x}_1$ als andere Schreibweise für $\mathbf{x}$ auffassen, $\mathbf{x}_2$ als andere Schreibweise für $| \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_3$ als andere Schreibweise für $|| \mathbf{x}$, etc.

Beispiele:

³Genauer: “Objektvariablen”, also Variablen der Objektsprache, im Gegensatz zu “Metavariablen”

⁴Man beachte, dass p hier eine *Metavariablen* ist, also eine Variable in der Metasprache, die für eines der Prädikatensymbole $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \dots$ steht. Metavariablen werden hier *kursiv* dargestellt, Symbole der Objektsprache dagegen **fettgedruckt**.

⁵Rekursive Definitionen unterscheiden sich von anderen Definitionen dadurch, dass die zu definierenden Gegenstände durch wiederholte Anwendung der definierenden Regeln erhalten werden. Wir werden das im Folgenden nicht jedesmal erwähnen, weil es mit dem Begriff “rekursive Definition” schon implizit gemeint ist.

1. Die Sprache der Mengenlehre besitzt (neben dem Falsum $\perp$) nur ein einziges Prädikatsymbol $\in$, “Elementsymbol” genannt. Es ist zweistellig.
2. Die Sprache der Arithmetik besitzt die folgenden Prädikaten- und Funktionssymbole:

Symbol	Typ	Name
$\perp$	nullstelliges Prädikatsymbol	Falsum
$=$	zweistelliges Prädikatsymbol	Gleichheitszeichen
0	Konstantensymbol	Nullsymbol
N	einstelliges Funktionssymbol	Nachfolgersymbol
$+$	zweistelliges Funktionssymbol	Pluszeichen
$\cdot$	zweistelliges Funktionssymbol	Malzeichen

Die Grundsymbole der Sprachen sind hier minimalistisch gewählt.⁶ Weitere Symbole kommen später als definierte Symbole dazu.

2.2 Terme und Formeln.

Aus Variablen und Funktionssymbolen bildet man *Terme* nach den folgenden Regeln:

Rekursive Definition 2.3 (Terme und darin vorkommende Variablen) *Gegeben das Alphabet einer Sprache erster Stufe, definieren wir Terme t und die Menge $\text{freeVar}(t)$ der darin vorkommenden Variablen in dieser Sprache nach den beiden folgenden Regeln:*

1. Jede Variable v ist ein Term. In ihm kommt genau die Variable v vor: $\text{freeVar}(v) = \{v\}$.
2. Ist f ein n -stelliges Funktionssymbol⁷ ($n \in \mathbb{N}_0$) und ist $t_1, \dots, t_n$ eine Liste von n Termen, so ist auch die Verkettung

$$ft_1 \dots t_n$$

ein Term. In ihm kommen genau die Variablen vor, die in mindestens einem der t_j vorkommen:

$$\text{freeVar}(ft_1 \dots t_n) = \bigcup_{j=1}^n \text{freeVar}(t_j)$$

⁶Der Leser fragt sich vielleicht, warum man auf $+$ und $\cdot$ als Grundsymbole nicht verzichten kann und sie nicht etwa als rekursiv definierte Symbole einführt. Der Grund dafür ist, dass die Formulierung der dazu nötigen Rekursion eine genügend komplexe Sprache voraussetzt. Mehr dazu später.

⁷Gemeint ist natürlich ein Funktionssymbol der betrachteten Sprache. Solange wir nur von *einer* Sprache reden, braucht das nicht explizit gesagt zu werden.

Beispiel: Zwei Beispiele für Terme in der Sprache der Arithmetik sind $+x+|x||x$ und $+NN0NNN0$. In der üblichen mathematischen Sprache würde man dafür eher etwa $x + (y + z)$ und $2 + 3$ schreiben, wenn man zur besseren Lesbarkeit x für x , y für $|x$ und z für $||x$ verwendet. Im Term $+x+|x||x$ kommen die Variablen x , $|x$ und $||x$ vor, während in $+NN0NNN0$ keine Variable vorkommt.

Aus Termen bildet man *Primformeln* und *Formeln* nach den folgenden Regeln:

Rekursive Definition 2.4 (Primformeln, Formeln und darin frei vorkommende Variablen) Gegeben das Alphabet einer Sprache erster Stufe, definieren wir Primformeln und Formeln ϕ dieser Sprache sowie die Menge $\text{freeVar}(\phi)$ der darin frei vorkommenden Variablen durch die folgenden Regeln:

1. Ist p ein n -stelliges Prädikatsymbol ($n \in \mathbb{N}_0$) und ist $t_1, \dots, t_n$ eine Liste von n Termen, so ist die Verkettung

$$pt_1 \dots t_n$$

eine Formel. In ihr kommen genau die Variablen frei vor, die in mindestens einem der t_j vorkommen:

$$\text{freeVar}(pt_1 \dots t_n) = \bigcup_{j=1}^n \text{freeVar}(t_j)$$

Die nach dieser Regel gebildeten Formeln heißen auch *Primformeln*. Insbesondere ist das Falsum $\perp$ eine Primformel ohne freie Variablen.

2. Sind ϕ und ψ zwei Formeln, so ist die Verkettung

$$\rightarrow \phi\psi$$

eine Formel, zu lesen als “ ϕ impliziert ψ ”. In ihr kommen genau die Variablen frei vor, die in ϕ oder ψ frei vorkommen:

$$\text{freeVar}(\rightarrow \phi\psi) = \text{freeVar}(\phi) \cup \text{freeVar}(\psi)$$

3. Ist v eine Variable und ϕ eine Formel, so ist die Verkettung

$$\forall v\phi$$

eine Formel, zu lesen als “Für alle v gilt ϕ ”. In ihr kommen alle Variablen frei vor, die auch in ϕ frei vorkommen, mit Ausnahme von v :

$$\text{freeVar}(\forall v\phi) = \text{freeVar}(\phi) \setminus \{v\}$$

Die Variable v kommt also in $\forall v\phi$ zwar vor, aber nicht *frei*, sondern *gebunden*. Der Allquantor $\forall$ bindet also die quantifizierte Variable.

Beispiele:

1. $= +\mathbf{x}|\mathbf{x}+|\mathbf{x}\mathbf{x}$ ist eine Formel in der Sprache der Arithmetik, Kommutativgesetz genannt, mit den freien Variablen $\mathbf{x}$ und $|\mathbf{x}$. Man liest das zum Beispiel so: “*Es sind gleich: Die Summe von $\mathbf{x}$ und $|\mathbf{x}$ mit der Summe von $|\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}$.*” Üblicherweise schreibt man eher $x + y = y + x$ dafür. Eine quantifizierte Version davon lautet $\forall \mathbf{x} \forall |\mathbf{x} = +\mathbf{x}|\mathbf{x} + |\mathbf{x}\mathbf{x}$, in ihr kommen keine Variablen mehr frei vor.
2. In der üblichen Sprache der Mathematik gibt es nicht nur *Quantoren*, die Variablen binden, sondern auch *Funktionssymbole*, die Variablen binden. Zum Beispiel ist n eine gebundene Variable im Term $\sum_{n=1}^m n^k$, die Variablen m und k sind dagegen darin frei. Ebenso ist die Variable x in $\int_a^b f(x) dx$ gebunden, die Variablen a und b sind dagegen darin frei. Hier wird f als ein einstelliges Funktionssymbol aufgefasst, nicht als eine Funktionsvariable, die es ja in Sprachen 1. Stufe nicht gibt. Das Differentialsymbol d spielt in Verbindung mit dem Integralsymbol $\int$ also die Rolle eines *Bindungsoperators* für Variablen. Bei unserer minimalistischen Wahl der Grundsymbole brauchen wir keine Funktionssymbole, die Variablen binden, obwohl wir sie später als definierte Symbole durchaus verwenden.
3. In der üblicherweise verwendeten Sprache der Mengenlehre ist

$$\{x : x \subseteq y\}$$

ein Term, Potenzmenge von y genannt. In ihm kommt die Variable x gebunden vor, die Variable y dagegen frei. Solche *Klassenterme* $\{x : \phi(x)\}$ kommen in unserer minimalistischen Version der Sprache der Mengenlehre nicht vor, sondern treten erst später als definierte Symbole auf. Für den Moment halten wir nur fest, dass auch der Klassentermkonstruktor $\{ : \}$ ein Bindungsoperator für Variablen ist, der den Typ Variablen $\times$ Formeln $\rightarrow$ Terme hat, also als Input eine Variable und eine *Formel* ϕ (nicht etwa einen Term) bekommt, und als Output einen Term liefert.

4. Die Zeichenkette

$$\forall |\mathbf{x} \rightarrow \in |\mathbf{x}\mathbf{x} \perp, \tag{1}$$

ist eine Formel in der Sprache der Mengenlehre. Mit der Notation x statt $\mathbf{x}$ und y statt $|\mathbf{x}$ kann man sie so lesen: “*Für alle y folgt aus $y \in x$ ein Widerspruch.*” Sie wird üblicherweise eher geschrieben als

$$\forall y : y \notin x$$

oder gar als $x = \emptyset$. In der Formel (1) kommt die Variable $\mathbf{x}$ frei vor, die Variable $|\mathbf{x}$ ist darin dagegen gebunden.

Übung 2.5 *Geben Sie eine sinnvolle rekursive Definition für die Menge $\text{boundVar}(\phi)$ der in einer Formel ϕ gebundenen Variablen an.*

Übung 2.6 Übersetzen Sie die folgenden Formeln der Sprache der Arithmetik in eine Notation, die in der Mathematik eher gebräuchlich ist:

$$\forall x \forall |x| \forall ||x| = + + x |x| |x + x + |x| |x \quad (2)$$

$$\forall x \forall |x| \forall ||x| = \cdot + x |x| |x + \cdot x| |x \cdot |x| |x \quad (3)$$

Wie werden die Formeln üblicherweise genannt?

2.3 Varianten der Darstellung syntaktischer Objekte

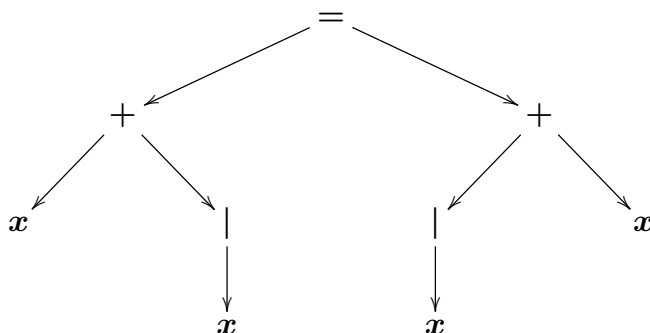
Darstellung in mathematischer Umgangssprache. Bis jetzt haben wir Terme und Formeln als *Zeichenketten* in *Präfixnotation* dargestellt: der Konstruktor eines Ausdrucks steht immer links von der Argumenteliste. Das hat die folgenden Vorteile:

- Es sind keine Klammern zur Gliederung der Ausdrücke nötig.
- Die Syntaxanalyse (engl.: “parsing”) einer nach den rekursiven Definitionen gebildeten Zeichenkette kann mit einem sehr einfachen Algorithmus gelöst werden: Zuerst liest man das am weitesten links stehende Symbol, den “Konstruktor”. Ist seine Stelligkeit n , so liest man rekursiv vom Rest der Zeichenkette nacheinander n Ausdrücke und stellt fest, ob sie den vom Konstruktor verlangten Typ besitzen. Das Syntaxanalyseproblem für real verwendete Programmiersprachen oder gar für die übliche mathematische Notation mit ihrer Mischung von Infix-, Präfix- und Postfixoperatoren (Bsp.: $a + b$, $\sin x$, f' für die Ableitung), Präzedenzregeln wie “Punkt vor Strich”, Klammerung, überladenen Operatoren (z.B. gleiches Symbol $+$ für Addition von Vektoren und Skalaren), mehrsymboligen Operatoren wie $\int \dots d \dots$ oder $\{\dots : \dots\}$, und zweidimensionaler Notation (z.B. Brüche) ist dagegen viel komplexer. Aus gutem Grund ist die Syntaxanalyse ein wichtiges Thema beim Compilerbau.

Die Präfixnotation hat trotz der Einfachheit ihrer Syntaxanalyse für Computer aber auch einen schwerwiegenden Nachteil: Sie ist für Menschen nur schwer lesbar. Aus diesem Grund verwenden wir auch in der Objektsprache oft Notationen, die an die mathematische Umgangssprache angelehnt sind, mit Infixnotation für zweistellige Konstrukteure, z.B. $\phi \rightarrow \psi$ statt $\rightarrow \phi \psi$, und $a + b$ statt $+ab$. Damit werden auch Klammern zur Gliederung nötig. Zur Klammerersparnis vereinbaren wir auch Präzedenzregeln, z.B.: “ $\rightarrow$ ” bindet stärker als “ $\forall$ ”, und “ $\rightarrow$ ” ist rechtsassoziativ, d.h. $\phi \rightarrow \psi \rightarrow \chi$ steht für $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$.

Darstellung mit Bäumen. Statt mit der linearen Darstellung als Zeichenketten kann man Terme und Formeln auch als markierte Bäume darstellen, z.B. das “Kommutativge-

setz" $= +x|x+|xx$, also umgangssprachlich $x + y = y + x$, so:



Formal werden markierte Bäume mit Markierungen in einem Alphabet A so definiert:

Rekursive Definition 2.7 (Markierte Bäume) *Ein Baum mit Markierungen in einem Alphabet A ist ein Tupel der Gestalt*

$$(n, a, b_1, \dots, b_n),$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in A$, und $b_1, \dots, b_n$ Bäume mit Markierungen in A sind.

Hier ist n der Verzweigungsgrad der Wurzel, a die Markierung der Wurzel, und $b_1, \dots, b_n$ sind die Tochterbäume. Das obige "Kommutativgesetz" wird damit so dargestellt:

$$(2, =, (2, +, (0, x), (1, |, (0, x))), (2, +, (1, |, (0, x)), (0, x)))$$

Übung 2.8 Zeichnen Sie die Formeln (2) und (3) aus Übung 2.6 in Baumdarstellung und geben Sie die zugehörigen markierten Bäume in Tupelnotation an.

Darstellung mit Gödelzahlen. Bäume mit Markierungen in einem abzählbaren Alphabet kann man auch durch natürliche Zahlen codieren, ihren Gödelzahlen. Dazu brauchen wir natürlich eine Codierung von Tupeln. Beginnen wir mit Paaren:

Wir definieren die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\langle m, n \rangle_2 = (m + n)^2 + m + 1$. Sie besitzt die folgende charakteristische Eigenschaft von Paaren:

Lemma 2.9 (charakteristische Eigenschaft der Paarcodierung) *Für alle $m, n, m', n' \in \mathbb{N}_0$ sind äquivalent:*

1. $m = m'$ und $n = n'$
2. $\langle m, n \rangle_2 = \langle m', n' \rangle_2$

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b) ist trivial.

(b) $\Rightarrow$ (a): Sei $\langle m, n \rangle_2 = \langle m', n' \rangle_2$ gegeben. Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: $m + n < m' + n'$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \langle m, n \rangle_2 &= (m + n)^2 + m + 1 \leq (m + n)^2 + 2(m + n) + 1 = (m + n + 1)^2 \\ &\leq (m' + n')^2 < (m' + n')^2 + m' + 1 = \langle m', n' \rangle_2, \end{aligned} \tag{4}$$

ein Widerspruch.

2. *Fall:* $m + n > m' + n'$. Mit vertauschten Rollen $m, n \leftrightarrow m', n'$ folgt ebenso ein Widerspruch.

Es gilt also der 3. *Fall:* $m + n = m' + n'$. Es folgt

$$(m' + n')^2 + m + 1 = (m + n)^2 + m + 1 = \langle m, n \rangle_2 = \langle m', n' \rangle_2 = (m' + n')^2 + m' + 1$$

und daher $m = m'$, und hieraus mit $m + n = m' + n'$ wiederum $n = n'$.

□

Damit können wir Tupel $(t_1, \dots, t_n)$ der Länge $n \geq 2$ von natürlichen Zahlen $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{N}_0$ wie folgt codieren:

Rekursive Definition 2.10 (Codierung von Tupeln fester Länge) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $\langle t_1, \dots, t_n \rangle_n \in \mathbb{N}_0$ so:

1. Im Fall $n = 0$ setzen wir $\langle \rangle_0 = 0$.
2. Im Fall $n = 1$ setzen wir $\langle t_1 \rangle_1 = t_1$.
3. Im Fall $n = 2$ wurde $\langle t_1, t_2 \rangle_2 = (t_1 + t_2)^2 + t_1 + 1$ bereits oben definiert.
4. Im Fall $n \geq 3$ setzen wir

$$\langle t_1, \dots, t_n \rangle_n := \langle t_1, \langle t_2, \dots, t_n \rangle_{n-1} \rangle_2.$$

Diese Codierung erfüllt wieder die charakteristische Eigenschaft von Tupeln:

Lemma 2.11 (charakteristische Tupeleigenschaft der Codierung von Tupeln) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}_0$ und $m'_1, \dots, m'_n \in \mathbb{N}_0$ sind äquivalent:

- (a) $m_i = m'_i$ für alle $i = 1, \dots, n$;
- (b) $\langle m_1, \dots, m_n \rangle_n = \langle m'_1, \dots, m'_n \rangle_n$.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b) ist trivial.

(b) $\Rightarrow$ (a) beweisen wir durch vollständige Induktion über n :

- Für $n = 0$ oder $n = 1$ ist die Behauptung trivial.
- Für $n = 2$ ist die Behauptung die Aussage von Lemma 2.9.
- Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gegeben.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für dieses n .

Nun seien $m_1, \dots, m_{n+1} \in \mathbb{N}_0$ und $m'_1, \dots, m'_{n+1} \in \mathbb{N}_0$ mit $\langle m_1, \dots, m_{n+1} \rangle_{n+1} = \langle m'_1, \dots, m'_{n+1} \rangle_{n+1}$ gegeben, also $\langle m_1, \langle m_2, \dots, m_{n+1} \rangle_n \rangle_2 = \langle m'_1, \langle m'_2, \dots, m'_{n+1} \rangle_n \rangle_2$.

Dann folgt $m_1 = m'_1$ und $\langle m_2, \dots, m_{n+1} \rangle_n = \langle m'_2, \dots, m'_{n+1} \rangle_n$ nach Lemma 2.9, also auch $m_i = m'_i$ für $i = 2, \dots, n$ nach Induktionsvoraussetzung.

□

Man beachte, dass jedoch für $n, n' \in \mathbb{N}$ mit $n, n' \geq 2$ und $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}_0$ und $m'_1, \dots, m'_{n'} \in \mathbb{N}_0$ mit $\langle m_1, \dots, m_n \rangle_n = \langle m'_1, \dots, m'_{n'} \rangle_{n'}$ jedoch $n \neq n'$ möglich ist. Daher ist es sinnvoll, die Länge von Tupeln mit zu codieren, so wie wir es schon in der Definition markierter Bäume getan haben:

Definition 2.12 (Codierung von Tupeln) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$\langle m_1, \dots, m_n \rangle := \langle n, m_1, \dots, m_n \rangle_{n+1}$$

Übung 2.13 Beweisen Sie für alle $n, n' \in \mathbb{N}_0$ und $m_1, \dots, m_n, m'_1, \dots, m'_{n'} \in \mathbb{N}_0$ die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

1. $n = n'$ und $m_i = m'_i$ für alle $i = 1, \dots, n$;
2. $\langle m_1, \dots, m_n \rangle = \langle m'_1, \dots, m'_{n'} \rangle$.

Rekursive Definition 2.14 (Gödelzahlen markierter Bäume)

Es sei $b = (n, a, b_1, \dots, b_n)$ ein Baum mit Markierungen in $\mathbb{N}_0$. Die Gödelzahl $\lceil b \rceil$ von b wird rekursiv so definiert:

$$\lceil (n, a, b_1, \dots, b_n) \rceil := \langle a, \lceil b_1 \rceil, \dots, \lceil b_n \rceil \rangle.$$

Anschaulich gesprochen werden also nur die Tupelklammern $\langle \rangle$ durch ihre Codierungen $\lceil \rceil$ ersetzt, wobei die Stelligkeit bereits in der Definition von $\langle a, \lceil b_1 \rceil, \dots, \lceil b_n \rceil \rangle$ mit dem ersten Eintrag codiert ist.

Lemma 2.15 (Injektivität der Codierung mit Gödelzahlen) Es seien b, b' zwei Bäume mit Markierungen in $\mathbb{N}_0$. Es gelte $\lceil b \rceil = \lceil b' \rceil$. Dann folgt $b = b'$.

Beweis durch Induktion nach dem Aufbau von b : Es sei $b = (n, a, b_1, \dots, b_n)$ und $b' = (n', a', b'_1, \dots, b'_{n'})$.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für alle Tochterbäume $b_1, \dots, b_n$ von b und beliebige Bäume $\tilde{b}'_1, \dots, \tilde{b}'_n$.⁸

Es gilt $\lceil b \rceil = \langle n, c \rangle_2$, wobei $c = \langle a, \lceil b_1 \rceil, \dots, \lceil b_n \rceil \rangle_{n+1}$. Ebenso gilt $\lceil b' \rceil = \langle n', c' \rangle$, wobei $c' = \langle a', \lceil b'_1 \rceil, \dots, \lceil b'_{n'} \rceil \rangle_{n'+1}$. Aus $\langle n, c \rangle = \lceil b \rceil = \lceil b' \rceil = \langle n', c' \rangle$ schließen wir $n = n'$ und $c = c'$, also auch $a = a'$ und $\lceil b_i \rceil = \lceil b'_i \rceil$ für $i = 1, \dots, n$ mit Hilfe von Lemma 2.11. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $b_i = b'_i$ für $i = 1, \dots, n$ und damit insgesamt $b = b'$.

□

⁸Achtung: n Bäume, nicht n' Bäume b'_i in der I.V.! Die Induktion läuft über b , nicht über b' .

Damit kann man syntaktische Objekte wie Terme und Formeln mit einem abzählbaren Alphabet auch statt durch Bäume durch die entsprechenden Gödelzahlen codieren, wenn man noch eine Codierung der “Buchstaben” des Alphabets durch natürliche Zahlen vereinbart. Für das Alphabet der Sprache der Arithmetik könnte man zum Beispiel folgende Codetabelle vereinbaren:

Zeichen	$\mathbf{x}$		$\rightarrow$	$\forall$	$\perp$	$=$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{N}$	$+$	$\cdot$
Codezahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Wir werden im Folgenden die Notation mit Zeichenketten zur Codierung syntaktischer Objekte beibehalten, allerdings zur besseren Lesbarkeit Elemente der mathematischen Umgangssprache wie Infixnotation, Klammerung und “.” als Trennsymbol verwenden, statt eine reine Präfixnotation zu verwenden. Gemeint ist aber die entsprechende Zeichenkette in Präfixnotation. Wer will, kann sich aber statt dessen auch Bäume oder gar Gödelzahlen vorstellen.

2.4 Abkürzungsregeln

In unserer minimalistischen Sprache 1. Stufe fehlen die Junktoren “ $\neg$ (nicht)”, “ $\wedge$ (und)”, “ $\vee$ (oder)” und “ $\leftrightarrow$ (äquivalent)”, und auch der Existenzquantor “ $\exists$ ” fehlt. Formeln, die diese verwenden, wollen wir nun als Abkürzungen einführen, und zwar zur besseren Lesbarkeit auch in umgangssprachlicher Notation:

Definition 2.16 (prädikatenlogische Abkürzungsregeln) *Wir vereinbaren folgende Abkürzungsregeln:*

Formel	zu ersetzen durch	leicht lesbare Form	in Worten
$\neg\phi$	$\rightarrow\phi\perp$	$\phi\rightarrow\perp$	nicht ϕ ; ϕ impliziert Widerspruch
$\top$	$\rightarrow\perp\perp$	$\neg\perp$	Verum
$\phi\vee\psi$	$\rightarrow\rightarrow\phi\perp\psi$	$(\neg\phi)\rightarrow\psi$	ϕ oder ψ , (nicht ϕ) impliziert ψ
$\phi\wedge\psi$	$\rightarrow\rightarrow\phi\rightarrow\psi\perp\perp$	$\neg(\phi\rightarrow\neg\psi)$	ϕ und ψ
$\phi\leftrightarrow\psi$	$\rightarrow\rightarrow\rightarrow\phi\psi\rightarrow\rightarrow\psi\phi\perp\perp$	$(\phi\rightarrow\psi)\wedge(\psi\rightarrow\phi)$	ϕ äquivalent zu ψ
$\exists x\phi$	$\rightarrow\forall x\rightarrow\phi\perp\perp$	$\neg\forall x\neg\phi$	Es existiert x mit ϕ

Für die umgangssprachliche Notation vereinbaren wir auch noch folgende Präzedenzregeln zur Klammerersparnis:

- $\neg$ bindet stärker als $\wedge$,
- $\wedge$ bindet stärker als $\vee$,
- $\vee$ bindet stärker als $\leftrightarrow$ und $\rightarrow$,
- $\rightarrow$ ist rechtsassoziativ, d.h. $\phi\rightarrow\psi\rightarrow\chi$ steht für $\phi\rightarrow(\psi\rightarrow\chi)$,
- $\leftrightarrow$ und $\rightarrow$ binden gleich stark,

- $\forall$ und $\exists$ binden schwächer als alle Junktoren.
- “Bindet stärker” ist transitiv.

Abkürzungen in der Mengenlehre. In der Sprache der Mengenlehre vereinbaren wir noch weitere Abkürzungsregeln: Einerseits führen wir das Inklusionszeichen und das Gleichheitszeichen als Abkürzungen ein.

Definition 2.17 (Inklusion und Gleichheit in der Mengenlehre) Für Terme⁹ s und t in der Sprache der Mengenlehre kürzen wir ab:

- $s \subseteq t$ steht für $\forall x : x \in s \rightarrow x \in t$.
- $s = t$ steht für $\forall x : x \in s \leftrightarrow x \in t$.

Dabei muss x eine “neue” Variable sein, also weder in s noch in t auftreten.

Anders als in prädikatenlogischen Sprachen mit Gleichheit ist also das Gleichheitssymbol in der Mengenlehre kein Grundsymbol.

Übung 2.18 Expandieren Sie die Formel $\forall x \forall y : x \subseteq y \wedge y \subseteq x \leftrightarrow x = y$ zu einer (umgangssprachlich geschriebenen) Formel ohne Gleichheits- und Inklusionszeichen.

Klassenterme. In der minimalistischen Sprache der Mengenlehre kommen keine Klassenterme $\{x : \phi\}$ mit Variablen x und Formeln ϕ vor. Formeln, die solche Klassenterme enthalten, sollen mit den folgenden Ersetzungsregeln als Formeln gelesen werden, die keine Klassenterme mehr enthalten:

Rekursive Definition 2.19 (Formeln mit Klassentermen) Ein Klassenterm in der Sprache der Mengenlehre ist eine Zeichenkette der Gestalt $\{x : \phi\}$ mit einer Variablen x und einer Formel ϕ . Dieser Klassenterm wird wie ein Term mit $\text{freeVar}(\{x : \phi\}) = \text{freeVar}(\phi) \setminus \{x\}$ verwendet. Die Variable x ist also im Klassenterm $\{x : \phi\}$ gebunden. Das Vorkommen von Klassentermen in Formeln wird so ersetzt:

1. Ist y eine Variable, so steht die Formel $y \in \{x : \phi\}$ für $\phi[x/y]$, also die Formel, die aus ϕ durch Substitution¹⁰ der Variablen x durch y entsteht.
2. Ist t ein Term, z.B. eine Variable oder ein Klassenterm, so steht $\{x : \phi\} \in t$ für $\exists y : y = \{x : \phi\} \wedge y \in t$. Dabei ist das Gleichheitssymbol mit Definition 2.17 zu lesen.

⁹Bis haben wir als Terme in der Sprache der Mengenlehre nur Variablen eingeführt. Diese Definition soll aber auch auf Klassenterme anwendbar sein, die wir unten definieren.

¹⁰Die Substitutionsoperation besprechen wir gleich anschließend genauer.

Beispiel: Die Formel $\{x : \perp\} \in \{z : z \subseteq y\}$ (kurz auch als $\emptyset \in \mathfrak{P}(y)$ geschrieben) enthält nur die Variable y frei. Sie wird der Reihe nach so zu einer Formel expandiert, in der keine Klassenterme mehr vorkommen:

$$\begin{aligned} & \{x : \perp\} \in \{z : z \subseteq y\} \\ \rightsquigarrow & \exists u : u = \{x : \perp\} \wedge u \in \{z : z \subseteq y\} \\ \rightsquigarrow & \exists u : (\forall v : v \in u \leftrightarrow v \in \{x : \perp\}) \wedge u \subseteq y \\ \rightsquigarrow & \exists u : (\forall v : v \in u \leftrightarrow \perp) \wedge (\forall v : v \in u \rightarrow v \in y) \end{aligned}$$

Übung 2.20 Expandieren Sie die Formel $\{x : \neg x \in x\} \in \{x : \neg x \in x\}$ zu einer Formel ohne Klassenterme in der Sprache der Mengenlehre, wobei definierte Junktoren und der Existenzquantor im Ergebnis vorkommen dürfen.

2.5 Substitution und gebundene Umbenennung

In diesem Abschnitt besprechen wir, wie freie Variablen x in einem Term t oder einer Formel ϕ durch einen weiteren Term s substituiert werden. Eine Komplikation tritt dadurch auf, dass in s frei vorkommende Variablen in ϕ bereits als gebundene Variablen auftreten können; diese “zufällig gleich benannten Auftreten” müssen zuerst umbenannt werden.

Beispiel: Substituiert man in der Formel

$$\int_0^1 x^a dx = \frac{1}{a+1}$$

die freie Variable a durch x , so erhält man nicht etwa

$$\int_0^1 x^x dx = \frac{1}{x+1},$$

sondern zum Beispiel

$$\int_0^1 y^x dy = \frac{1}{x+1}.$$

Analog erhält man aus der Formel

$$\exists n : n > m$$

durch Substitution der freien Variablen m durch n nicht etwa

$$\exists n : n > n,$$

sondern z.B.

$$\exists k : k > n.$$

Formal definieren wir innerhalb einer prädikatenlogischen Sprache erster Stufe:

Rekursive Definition 2.21 (Substitution) Es seien x eine Variable und s, t Terme. Wir definieren den Term $t[x/s]$, zu lesen als “ t mit x durch s substituiert”, so:

- Ist t eine Variable, so sei

$$t[x/s] := \begin{cases} t & \text{falls } t \neq x, \\ s & \text{falls } t = x. \end{cases}$$

- Hat t die Gestalt $ft_1 \dots t_n$ mit einem n -stelligen Funktionssymbol und n Termen $t_1 \dots t_n$, so sei

$$t[x/s] := ft_1[x/s] \dots t_n[x/s].$$

Für eine Formel ϕ definieren wir die Formel $\phi[x/s]$, zu lesen als “ ϕ mit x durch s substituiert”, so:

- Ist ϕ eine Primformel der Gestalt $pt_1 \dots t_n$ mit einem n -stelligen Prädikatensymbol p und n Termen $t_1 \dots t_n$, so sei

$$\phi[x/s] := pt_1[x/s] \dots t_n[x/s].$$

- Ist ϕ eine Implikation $\rightarrow \phi_1 \phi_2$, so sei

$$\phi[x/s] := \rightarrow \phi_1[x/s] \phi_2[x/s].$$

- Ist ϕ eine Allformel $\forall y \psi$, so wählen wir eine Variable $z \notin \text{freeVar}(s) \cup \text{freeVar}(\phi) \cup \{x\}$ aus (mit irgendeiner Auswahlregel, zum Beispiel die kürzestmögliche) und setzen

$$\phi[x/s] := \forall z \psi[y/z][x/s].$$

Man beachte, dass ψ und seine Substituierten einen Allquantor weniger als ϕ haben.

Wir verwenden auch die Kurznotation $\phi[x_1, \dots, x_n/s_1, \dots, s_n]$ für $\phi[x_1/s_1] \dots [x_n/s_n]$.

Vor der Substitution in eine Allformel muss also die durch den Quantor gebundene Variable erst “gebunden umbenannt” werden, wenn sonst unerwünschte Variablenübereinstimmungen drohen. Gebundene Umbenennungen werden etwas allgemeiner so definiert:

Rekursive Definition 2.22 (Gebundene Umbenennung) Es seien ϕ und ψ Formeln. Wir sagen, ϕ und ψ sind gebundene Umbenennungen voneinander, in Zeichen $\phi \approx \psi$, wenn einer der folgenden Fälle eintritt:

- ϕ und ψ sind identische Primformeln;
- $\phi = \rightarrow \phi_1 \phi_2$ und $\psi = \rightarrow \psi_1 \psi_2$ sind Implikationen mit $\phi_1 \approx \psi_1$ und $\phi_2 \approx \psi_2$;
- $\phi = \forall x \phi_1$ und $\psi = \forall y \psi_1$ sind Allformeln mit $\text{freeVar}(\phi) = \text{freeVar}(\psi)$ und $\psi_1 \approx \phi_1[x/y]$.

Übung 2.23 Es seien l, m, n drei verschiedene Variablen und $t = m + n$. Berechnen Sie $t[m/l][n/m]$ und $t[n/m][m/l]$. Stimmen die Ergebnisse überein?

Übung 2.24 Es seien x und y zwei verschiedene Variablen. Sind in der Sprache der Mengenlehre $\forall x \forall y : x \in y$ und $\forall y \forall x : y \in x$ gebundene Umbenennungen voneinander? Ist auch $\forall x \forall x : x \in x$ eine gebundene Umbenennung davon? Begründung?

2.6 Herleitungen

Wir definieren nun den Begriff der Herleitungen, und zwar im Kalkül des “natürlichen Schließens”: Aus “Annahmen” wird durch Anwendung einiger syntaktischer Schlussregeln eine Formel hergeleitet. Wir arbeiten mit einer festen prädikatenlogischen Sprache erster Stufe.

Rekursive Definition 2.25 (Herleitungen) *Eine Herleitung H einer Formel ϕ und die Menge $\text{assumptions}(H)$ der darin freien Annahmen wird nach folgenden Regeln gebildet:*

1. Annahmeneinführung, Symbol **A**: *Ist ϕ eine Formel, so ist*

$$H = (\mathbf{A}, \phi)$$

eine Herleitung von ϕ mit der freien Annahme

$$\text{assumptions}(H) = \{\phi\},$$

umgangssprachlich so zu lesen: “Annahme: Es gelte ϕ .”

2. Indirekter Beweis, Symbol **I**: *Ist ϕ eine Formel, so ist*

$$H = (\mathbf{I}, \neg\neg\phi \rightarrow \phi)$$

eine Herleitung von $\neg\neg\phi \rightarrow \phi$ ohne freie Annahmen:

$$\text{assumptions}(H) = \emptyset.$$

Umgangssprachlich: “Wenn nicht ϕ falsch ist, folgt ϕ .”

3. Gebundene Umbenennung, Symbol **U**: *Ist H_1 eine Herleitung einer Formel ϕ und ist ψ eine gebundene Umbenennung von ϕ , also $\psi \approx \phi$, so ist*

$$H = (\mathbf{U}, \psi, H_1)$$

eine Herleitung von ψ mit unveränderten freien Annahmen

$$\text{assumptions}(H) = \text{assumptions}(H_1),$$

umgangssprachlich so zu lesen: “ ϕ kann nach Variablenumbenennung auch in der Form ψ geschrieben werden.”

4. Pfeilentfernung, Symbol $\rightarrow^-$: *Ist H_1 eine Herleitung von ϕ und H_2 eine Herleitung von $\phi \rightarrow \psi$. Dann ist*

$$H = (\rightarrow^-, \psi, H_1, H_2)$$

eine Herleitung von ψ mit den freien Annahmen

$$\text{assumptions}(H) = \text{assumptions}(H_1) \cup \text{assumptions}(H_2).$$

Umgangssprachlich: “Mit H_1 wissen wir ϕ , und mit H_2 wissen wir $\phi \rightarrow \psi$. Zusammen folgt ψ .”

5. Pfeileinführung, Symbol $\rightarrow^+$: Ist H_1 eine Herleitung von ϕ und ψ eine weitere Formel. Dann ist

$$H = (\rightarrow^+, \psi \rightarrow \phi, H_1)$$

eine Herleitung von $\psi \rightarrow \phi$ mit den freien Annahmen

$$\text{assumptions}(H) = \text{assumptions}(H_1) \setminus \{\psi\}.$$

Die Pfeileinführung bindet also eine Annahme. Umgangsprachlich: “Mit H_1 wissen wir ϕ (evtl.) unter der Annahme ψ . Dann wissen wir $\psi \rightarrow \phi$ ohne diese Annahme.”

6. Allentfernung, Symbol $\forall^-$: Ist H_1 eine Herleitung einer Allformel $\forall x\phi$ und ist t ein Term, so ist

$$H = (\forall^-, \phi[x/t], t, H_1)$$

eine Herleitung der Formel $\phi[x/t]$ mit unveränderten freien Annahmen

$$\text{assumptions}(H) = \text{assumptions}(H_1),$$

umgangsprachlich so zu lesen: “Mit H_1 wissen wir $\forall x\phi$. Durch Einsetzen von t für x folgt $\phi[x/t]$.”

7. Alleinführung, Symbol $\forall^+$: Ist H_1 eine Herleitung einer Formel ϕ und ist x eine Variable mit

$$x \notin \bigcup_{\psi \in \text{assumptions}(H_1)} \text{freeVar}(\psi),$$

d.h. kommt x in keiner der freien Annahmen von H_1 frei vor, so ist

$$H = (\forall^+, \forall x\phi, H_1)$$

eine Herleitung von $\forall x\phi$ mit den gleichen freien Annahmen:

$$\text{assumptions}(H) = \text{assumptions}(H_1).$$

Umgangsprachlich: “Wegen H_1 wissen wir ϕ . Weil x beliebig ist, schließen wir $\forall x\phi$.”

Für eine Menge Ψ von Formeln, eine weitere Formel ϕ und eine Herleitung H soll die Notation $\Psi \vdash_H \phi$ bedeuten, dass H eine Herleitung von ϕ mit $\text{assumptions}(H) \subseteq \Psi$ ist. Die Notation $\Psi \vdash \phi$, in Worten “ ϕ ist aus Ψ herleitbar”, soll bedeuten, dass es eine Herleitung H mit $\Psi \vdash_H \phi$ gibt. Wir schreiben auch $\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \phi$ statt $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \vdash \phi$. Insbesondere steht $\vdash \phi$, in Worten “ ϕ ist (ohne Annahmen) herleitbar”, für $\emptyset \vdash \phi$. Wir nennen eine Menge Ψ von Formeln inkonsistent, wenn $\Psi \vdash \perp$ gilt, wenn also “aus den Formeln in Ψ ein Widerspruch hergeleitet werden kann”. Andernfalls, also im Fall $\Psi \not\vdash \perp$, nennen wir Ψ konsistent. Wenn wir noch die Sprache $\mathcal{S}$ betonen wollen, in der eine Herleitung erfolgt, schreiben wir sie noch als Superskript zum Herleitungssymbol dazu: “ $\vdash_{\mathcal{S}}$ ”.

Herleitungen nach dieser Definition sind also verschachtelte Tupel, wobei der erste Eintrag die verwendete Schlußregel im letzten Schluss codiert, der zweite Eintrag die hergeleitete Formel, und alle übrigen Einträge Zusatzinformationen wie die Teilerleitungen der Prämissen des letzten Schlusses.

Man kann sich im Fall eines abzählbaren Alphabets statt Tupel auch Codierungen von Tupeln gemäß Definition 2.12 zur Codierung von Herleitungen vorstellen, wenn man auch die Grundsymbole durch natürliche Zahlen codiert. Damit wird jede Herleitung H auch durch eine Gödelzahl $\lceil H \rceil$ codiert.

Man verwechsle das Herleitungssymbol $\vdash$ nicht mit dem Implikationspfeil $\rightarrow$! Während ersteres ein Symbol in der Metasprache ist, ist zweiteres ein objektsprachliches Symbol. Aufgrund der baumartigen Struktur von Herleitungen liegt es nahe, sie graphisch zweidimensional darzustellen. Für jeden Herleitungsschritt zeichnen wir eine horizontale Linie, mit den Prämissen darüber und der Konklusion darunter. Vor der Konklusion steht das Symbol der verwendeten Schlussregel. Gebundene Annahmen werden bei ihrer Einführung mit Marken, z.B. α , versehen, die beim Binden mit der Pfeileinführung dann zitiert werden.

Beispiel: Schnittregel. Es seien ϕ und ψ zwei Formeln. Dann gilt:

$$\phi \rightarrow \psi, \neg\phi \rightarrow \psi \vdash \psi$$

Herleitung in graphischer Notation:

$$\begin{array}{c} \frac{\alpha : \phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\rightarrow^-: \psi} \quad \beta : \neg\psi \\ \frac{\rightarrow^-: \psi \quad \perp}{\rightarrow^+ \alpha : \neg\phi} \quad \neg\phi \rightarrow \psi \\ \frac{\rightarrow^-: \neg\phi \quad \neg\phi \rightarrow \psi}{\rightarrow^-: \psi} \quad \beta : \neg\psi \\ \frac{\rightarrow^-: \psi \quad \perp}{\rightarrow^+ \beta : \neg\neg\psi} \quad \mathbf{I} : \neg\neg\psi \rightarrow \psi \\ \frac{\rightarrow^+ \beta : \neg\neg\psi \quad \neg\neg\psi \rightarrow \psi}{\rightarrow^-: \psi} \end{array}$$

□

Beispiel: Kontraposition. Es seien ϕ und ψ zwei Formeln. Dann gilt:

$$\neg\psi \rightarrow \neg\phi \vdash \phi \rightarrow \psi$$

Herleitung in graphischer Notation:

$$\begin{array}{c} \alpha : \neg\psi \quad \neg\psi \rightarrow \neg\phi \\ \rightarrow^-: \neg\phi \quad \beta : \phi \\ \frac{\rightarrow^-: \neg\phi \quad \perp}{\rightarrow^+ \alpha : \neg\neg\psi} \quad \mathbf{I} : \neg\neg\psi \rightarrow \psi \\ \frac{\rightarrow^-: \neg\neg\psi \quad \neg\neg\psi \rightarrow \psi}{\rightarrow^-: \psi} \quad \psi \\ \frac{\rightarrow^-: \psi \quad \psi}{\rightarrow^+ \beta : \phi \rightarrow \psi} \end{array}$$

□

Beispiel: Wir zeigen:

$$\vdash x \subseteq y \rightarrow y \subseteq z \rightarrow x \subseteq z$$

Mit den Abkürzungsregeln der Mengenlehre ist das als eine andere Schreibweise der folgenden Aussage aufzufassen:

$$\vdash (\forall u : u \in x \rightarrow u \in y) \rightarrow (\forall u : u \in y \rightarrow u \in z) \rightarrow (\forall u : u \in x \rightarrow u \in z)$$

Herleitung in graphischer Notation:

$$\frac{\frac{\gamma : u \in x}{\rightarrow^- : u \in y} \quad \frac{\frac{\alpha : \forall u : u \in x \rightarrow u \in y}{\forall^- : u \in x \rightarrow u \in y}}{\rightarrow^- : u \in z} \quad \frac{\beta : \forall u : u \in y \rightarrow u \in z}{\forall^- : u \in y \rightarrow u \in z}}{\frac{\rightarrow^+ \gamma : u \in x \rightarrow u \in z}{\forall^+ : \forall u : u \in x \rightarrow u \in z}} \rightarrow^+ \beta : (\forall u : u \in y \rightarrow u \in z) \rightarrow (\forall u : u \in x \rightarrow u \in z) \rightarrow^+ \alpha : (\forall u : u \in x \rightarrow u \in y) \rightarrow (\forall u : u \in y \rightarrow u \in z) \rightarrow (\forall u : u \in x \rightarrow u \in z)$$

Man beachte, dass hier bei der Anwendung der Alleinführung die Variable x in keiner freien Annahme mehr frei vorkommt, da die Annahme γ an dieser Stelle schon gebunden wurde. □

Übung 2.26 Zeigen Sie: $\vdash \top$.

Übung 2.27 Zeigen Sie, dass für jede Formel ϕ gilt: $\phi \vdash \neg\neg\phi$ und $\neg\neg\phi \vdash \phi$.

Übung 2.28 Es seien ϕ und ψ zwei Formeln. Zeigen Sie:

1. $\phi, \psi \vdash \phi \wedge \psi$,
2. $\phi \wedge \psi \vdash \phi$ und $\phi \wedge \psi \vdash \psi$,
3. $\neg\psi, \phi \vee \psi \vdash \phi$,
4. $\phi \vdash \phi \vee \psi$ und $\psi \vdash \phi \vee \psi$.

Dagegen folgt aus $\Phi \vdash \phi \vee \psi$ i.a. nicht: $\Phi \vdash \phi$ oder $\Phi \vdash \psi$. Das brauchen Sie nicht zu zeigen, denn mit semantischen Methoden wird das später einfacher.

Übung 2.29 Zeigen Sie:

$$\vdash x \subseteq y \rightarrow y \subseteq x \rightarrow x = y$$

Dabei soll die Formel mit den Abkürzungsregeln als andere Schreibweise einer Formel in der Sprache der Mengenlehre aufgefasst werden.

Übung 2.30 Zeigen Sie mit der Abkürzung $x \notin y$ für $\neg x \in y$:

$$\vdash \{x : x \notin x\} \notin \{x : x \notin x\}$$

Wieder soll die Formel mit den Ersetzungsregeln für Klassenterme als andere Schreibweise einer Formel in der Sprache der Mengenlehre aufgefasst werden.

Wir halten noch eine einfache, aber wichtige Beobachtung fest:

Lemma 2.31 (Herleitungen brauchen nur endlich viele Prämissen.) Gilt $\Psi \vdash \phi$ für eine (möglicherweise unendliche) Formelmenge Ψ und eine Formel ϕ , gibt es eine endliche Liste $\psi_1, \dots, \psi_n \in \Psi$ mit $\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \phi$.

Beweis: Als ein mit endlich vielen Schritten konstruiertes syntaktisches Objekt kann eine Herleitung H zu $\Psi \vdash_H \phi$ nur endlich viele Annahmen $\psi_1, \dots, \psi_n \in \Psi$ frei enthalten. □

Lemma 2.32 (Transitivität der Herleitungsrelation) Es seien Φ und Ψ Mengen von Formeln und χ eine weitere Formel. Es gelte $\Phi \vdash \psi$ für alle $\psi \in \Psi$. Weiter gelte $\Psi \vdash \chi$. Dann folgt auch $\Phi \vdash \chi$.

Beweis: Wegen $\Psi \vdash \chi$ finden wir eine Liste $\psi_1, \dots, \psi_n \in \Psi$ von Formeln mit $\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \chi$. Mit n -facher Anwendung der Pfeileinführung folgt $\vdash \psi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \psi_n \rightarrow \chi$. Für jedes $j = 1, \dots, n$ finden wir eine Herleitung H_j mit $\Phi \vdash_{H_j} \psi_j$. Iterieren wir den Herleitungsschritt

$$\frac{\begin{array}{c} \Phi \\ H_j \vdots \\ \psi_j \end{array} \quad \begin{array}{c} \Phi \\ \vdots \\ \psi_j \rightarrow \psi_{j+1} \rightarrow \dots \rightarrow \psi_n \rightarrow \chi \end{array}}{\rightarrow^-: \psi_{j+1} \rightarrow \dots \rightarrow \psi_n \rightarrow \chi}$$

von $j = 1, \dots, n$, so erhalten wir schließlich $\Phi \vdash \chi$.

Bemerkung: Alternativ kann man in einer Herleitung H mit $\Psi \vdash_H \chi$ jede Einführung einer Annahme $\psi \in \Psi$ durch eine Herleitung H' mit $\Phi \vdash_{H'} \psi$ ersetzen. □

Übung 2.33 Führen Sie diesen alternativen Beweis des Lemmas genauer aus.

Lemma 2.34 (Konklusion als negierte Annahme) Es seien $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi$ Formeln. Dann sind äquivalent:

1. $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$
2. $\phi_1, \dots, \phi_n, \neg\psi \vdash \perp$

Beweis: Wir verwenden die Kurznotation Φ für $\phi_1, \dots, \phi_n$.

1. $\Rightarrow$ 2.:

Es gelte $\Phi \vdash \psi$. Dann folgt mit einer Pfeilentfernung $\Phi, \psi \rightarrow \perp \vdash \perp$, also die Aussage 2.

2. $\Rightarrow$ 1.:

Es gelte $\Phi, \neg\psi \vdash \perp$. Mit einer Pfeileinführung $\rightarrow^+$ folgt $\Phi \vdash \neg\psi \rightarrow \perp$, also $\Phi \vdash \neg\neg\psi$. Mit einer Pfeilentfernung $\rightarrow^-$ folgt $\Phi, \neg\neg\psi \rightarrow \psi \vdash \psi$. Ersetzen wir hierin die Annahme $\neg\neg\psi \rightarrow \psi$ durch einen indirekten Beweis **I**, erhalten wir $\Phi \vdash \psi$.

□

Lemma 2.35 (Ex falso quodlibet) Für jede Formel ϕ gilt $\vdash \perp \rightarrow \phi$.

Beweis: Wir wissen mit einer Pfeileinführung $\perp \vdash \neg\neg\phi$. Mit einem indirekten Beweis $\vdash \neg\neg\phi \rightarrow \phi$ und einer Pfeilentfernung folgt $\perp \vdash \phi$. Eine Pfeileinführung liefert die Behauptung $\vdash \perp \rightarrow \phi$.

□

Lemma 2.36 (Zerlegung einer Implikation in der Prämisse) Es sei $\phi_1, \dots, \phi_n$ eine Liste von Formeln, abgekürzt: Φ . Es seien ψ, χ zwei weitere Formeln. Dann sind äquivalent:

1. $\Phi, \psi \rightarrow \chi \vdash \perp$
2. $\Phi, \chi \vdash \perp$ und $\Phi \vdash \psi$

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2.:

Es gelte $\Phi, \psi \rightarrow \chi \vdash \perp$. Mit einer Pfeileinführung wissen wir $\chi \vdash \psi \rightarrow \chi$. Mit der Transitivität der Herleitungsrelation folgt hieraus die erste Behauptung $\Phi, \chi \vdash \perp$.

Zur zweiten Behauptung $\Phi \vdash \psi$: Eine Pfeilentfernung liefert $\psi, \neg\psi \vdash \perp$. Mit $\vdash \perp \rightarrow \chi$ (ex falso quodlibet) und einer Pfeilentfernung folgt $\psi, \neg\psi \vdash \chi$, und hieraus mit einer Pfeileinführung $\neg\psi \vdash \psi \rightarrow \chi$. Mit der Voraussetzung $\Phi, \psi \rightarrow \chi \vdash \perp$ und Transitivität der Herleitungsrelation schließen wir $\Phi, \neg\psi \vdash \perp$. Mit einer Pfeileinführung liefert das $\Phi \vdash \neg\neg\psi$. Zusammen mit einem indirekten Beweis $\vdash \neg\neg\psi \rightarrow \psi$ und einer Pfeilentfernung folgt die zweite Behauptung $\Phi \vdash \psi$.

2. $\Rightarrow$ 1.:

Es gelte $\Phi, \chi \vdash \perp$ und $\Phi \vdash \psi$. Mit der zweiten Annahme und einer Pfeilentfernung folgt $\Phi, \psi \rightarrow \chi \vdash \perp$. Mit der ersten Annahme und der Transitivität der Herleitungsrelation folgt die Behauptung $\Phi, \psi \rightarrow \chi \vdash \perp$.

□

Lemma 2.37 1. **Existenzeinführung $\exists^+$:** Es seien Φ eine Menge von Formeln, x eine Variable, t ein Term, und ψ eine weitere Formel. Dann folgt aus $\Phi \vdash \psi[x/t]$ auch $\Phi \vdash \exists x\psi$.

2. **Existenzentfernung** $\exists^-$: Es seien $\phi_1, \dots, \phi_n$ eine Liste von Formeln und ψ, χ zwei weitere Formeln. Es sei x eine Variable, die keiner der Formeln $\phi_1, \dots, \phi_n, \chi$ frei vorkommt. Dann sind äquivalent:

$$(a) \phi_1, \dots, \phi_n, \exists x\psi \vdash \chi$$

$$(b) \phi_1, \dots, \phi_n, \psi \vdash \chi$$

Beweis:

1. Mit einer Allentfernung wissen wir $\forall x\neg\psi \vdash \neg\psi[x/t]$. Zusammen mit der Voraussetzung $\Phi \vdash \psi[x/t]$ folgt mit einer Pfeilentfernung $\Phi, \forall x\neg\psi \vdash \perp$. Mit einer Pfeileinführung erhalten wir $\Phi \vdash \neg\forall x\neg\psi$, also die Behauptung $\Phi \vdash \exists x\psi$.
2. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir diesmal Φ statt $\phi_1, \dots, \phi_n, \neg\chi$. Wir erhalten die folgende Äquivalenzkette:

$$\phi_1, \dots, \phi_n, \exists x\psi \vdash \chi \tag{5}$$

mit Lemma 2.34 (Konklusion als negierte Annahme) äquivalent zu

$$\Phi, \exists x\psi \vdash \perp \tag{6}$$

nochmal mit Lemma 2.34 äquivalent zu

$$\Phi \vdash \forall x\neg\psi \tag{7}$$

mit einer Allentfernung (für “ $\Rightarrow$ ”) bzw. Alleinführung (für “ $\Leftarrow$ ”) wegen $x \notin \text{freeVar}(\Phi)$ äquivalent zu

$$\Phi \vdash \neg\psi \tag{8}$$

mit Lemma 2.34 äquivalent zu

$$\Phi, \neg\neg\psi \vdash \perp \tag{9}$$

mit $\neg\neg\psi \vdash \psi$ und $\psi \vdash \neg\neg\psi$ (Übung 2.27) und Transitivität von $\vdash$ äquivalent zu

$$\Phi, \psi \vdash \perp \tag{10}$$

mit Lemma 2.34 äquivalent zu

$$\phi_1, \dots, \phi_n, \psi \vdash \chi. \tag{11}$$

□

Übung 2.38 Es seien ϕ und ψ Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie:

1. Aus $\vdash \phi \rightarrow \psi$ und $\vdash \phi$ folgt $\vdash \psi$.
2. $\vdash \phi$ ist äquivalent zu $\vdash \forall x\phi$.
3. $\vdash \neg\exists x\phi$ ist äquivalent zu $\vdash \neg\phi$.

Übung 2.39 Es sei $\phi \rightarrow \forall x\psi$ eine Implikation mit einer Allformel in der Konklusion, wobei $x \notin \text{freeVar}(\phi)$. Zeigen Sie:

1. $\phi \rightarrow \forall x\psi \vdash \forall x\phi \rightarrow \psi$,
2. $\forall x\phi \rightarrow \psi \vdash \phi \rightarrow \forall x\psi$.

Übung 2.40 Es sei $(\forall x\phi) \rightarrow \psi$ eine Implikation mit einer Allformel in der Prämisse, wobei $x \notin \text{freeVar}(\psi)$. Zeigen Sie:

1. $(\forall x\phi) \rightarrow \psi \vdash \exists x\phi \rightarrow \psi$,
2. $\exists x\phi \rightarrow \psi \vdash (\forall x\phi) \rightarrow \psi$.

Übung 2.41 Pränexe Normalform. Eine Formel ψ heißt in pränexer Normalform, wenn gilt (rekursive Definition):

1. ψ enthält keine Quantoren,
2. oder ψ ist eine Allformel $\forall x\phi$ mit einer Formel ϕ in pränexer Normalform,
3. oder ψ ist eine Existenzformel $\exists x\phi$ mit einer Formel ϕ in pränexer Normalform.

Es sei ϕ eine Formel. Zeigen Sie, dass es eine weitere Formel ψ in pränexer Normalform über der gleichen Sprache mit $\text{freeVar}(\phi) = \text{freeVar}(\psi)$, $\phi \vdash \psi$ und $\psi \vdash \phi$ gibt.

Übung 2.42 Es seien ϕ , ψ und χ drei Formeln. Wir definieren rekursiv:

- a) Sind ϕ und ψ gleich, so wird ϕ ein P-Teil von ψ genannt.
 - b) Ist $\phi \rightarrow \chi$ ein P-Teil von ψ , so ist ϕ ein N-Teil von ψ und χ ein P-Teil von ψ .
 - c) Ist $\neg\phi$ ein N-Teil von ψ , so ist ϕ ein P-Teil von ψ .
1. Es seien p und q Prädikatenkonstanten, also 0-stellige Prädikatensymbole. Zählen Sie alle P- und N-Teile von $p \wedge q$ auf.
 2. Zeigen Sie: Ist ϕ sowohl ein P-Teil als auch ein N-Teil von ψ , so gilt $\vdash \psi$.
 3. Zeigen Sie: Ist $\perp$ ein N-Teil von ψ , so gilt $\vdash \psi$.

2.7 Erweiterung der Sprache mit Konstantensymbolen

Lemma 2.43 (Realisierung einer Existenzformel mit einer neuen Konstante)

In einer Sprache $\mathcal{S}$ 1. Stufe seien eine konsistente Menge Ψ von Formeln sowie eine weitere Formel ϕ , die höchstens eine Variable x frei enthält, gegeben: $\text{freeVar}(\phi) \subseteq \{x\}$.

Es sei $\mathbf{c}$ ein neues, nicht in $\mathcal{S}$ vorkommendes Konstantensymbol.

Dann ist in der um das Konstantensymbol $\mathbf{c}$ erweiterten Sprache $\mathcal{S}^c$ auch die Formelmengemenge $\Psi \cup \{(\exists x\phi) \rightarrow (\phi[x/\mathbf{c}])\}$ konsistent.

Beweis: Weil eine Formelmengemenge genau dann konsistent ist, wenn jede endliche Teilmenge davon konsistent ist, dürfen wir uns auf den Fall beschränken, dass Ψ endlich ist. Wir beweisen das Lemma durch Kontraposition. Nehmen wir an, $\Psi \cup \{(\exists x\phi) \rightarrow (\phi[x/\mathbf{c}])\}$ sei inkonsistent: $\Psi \cup \{(\exists x\phi) \rightarrow (\phi[x/\mathbf{c}])\} \vdash^{\mathcal{S}^c} \perp$, wobei der obere Index am Herleitungssymbol die verwendete Sprache bezeichnen soll. Mit Lemma 2.36 (Zerlegung einer Implikation in der Prämisse) folgt $\Psi \cup \{\phi[x/\mathbf{c}]\} \vdash^{\mathcal{S}^c} \perp$ und

$$\Psi \vdash^{\mathcal{S}^c} \exists x\phi. \quad (12)$$

Mit einer Pfeileinführung schließen wir $\Psi \vdash_H \neg\phi[x/\mathbf{c}]$ für eine Herleitung H in der Sprache $\mathcal{S}^c$. Ersetzen wir jedes Auftreten des Konstantensymbols $\mathbf{c}$ in der Herleitung H durch eine neue, weder in dieser Herleitung noch in Ψ auftretende Variable y , so erhalten wir eine Herleitung $H[\mathbf{c}/y]$ mit $\Psi \vdash_{H[\mathbf{c}/y]}^{\mathcal{S}} \neg\phi[x/y]$. Man beachte, dass $\mathbf{c}$ in Ψ nicht auftritt, da Ψ in der Sprache $\mathcal{S}$ gebildet ist, so dass Ψ bei dieser Ersetzung nicht verändert wird. Weil das Konstantensymbol $\mathbf{c}$ in $H[\mathbf{c}/y]$ nicht mehr vorkommt, ist es eine Herleitung in $\mathcal{S}$. Mit einer Alleinführung folgt $\Psi \vdash^{\mathcal{S}} \forall y \neg\phi[x/y]$, und hieraus mit einer gebundenen Umbenennung $\Psi \vdash^{\mathcal{S}} \forall x \neg\phi$. Mit Lemma 2.34 (Konklusion als negierte Annahme) schließen wir

$$\Psi \cup \{\exists x\phi\} \vdash^{\mathcal{S}} \perp. \quad (13)$$

Ebenso ersetzen wir in einer Herleitung zu Aussage (12) jedes Auftreten von $\mathbf{c}$ durch eine neue Variable, nennen wir sie wieder y . Damit erhalten wir eine Herleitung in $\mathcal{S}$:

$$\Psi \vdash^{\mathcal{S}} \exists x\phi.$$

Mit (13) und der Transitivität von $\vdash^{\mathcal{S}}$ folgt $\Psi \vdash^{\mathcal{S}} \perp$, also die Inkonsistenz von Ψ in der Sprache $\mathcal{S}$, wie zu zeigen war. □

Gegeben eine Sprache 1. Stufe $\mathcal{S}$, fügen wir nun nicht nur *ein* neues Konstantensymbol hinzu, sondern für *jede* Formel ϕ mit höchstens einer freien Variable x eines. Als Notation für dieses neue Konstantensymbol bietet sich $\mathbf{c}x\phi$ an, um klarzustellen, zu welcher Formel und welcher Variablen es gehört. Man kann also das Symbol $\mathbf{c}$ als einen Konstruktor auffassen, der eine Variable x und eine Formel ϕ als Argumente erhält. Die Variable x ist in $\mathbf{c}x\phi$ gebunden. Wir bezeichnen mit $\mathcal{S}^{+c}$ die mit diesen neuen Konstantensymbolen erweiterte Sprache.

Durch das Hinzufügen der Konstantensymbole entstehen neue Formeln, die diese neuen Konstantensymbole enthalten können. Es liegt nun nahe, das Hinzufügen von Konstantensymbolen zu iterieren:

Rekursive Definition 2.44 (iterierte Erweiterung der Sprache durch Konstantensymbole) Gegeben eine Sprache $\mathcal{S}$ 1. Stufe, definieren wir rekursiv für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathcal{S}_0^{+c} := \mathcal{S}, \quad (14)$$

$$\mathcal{S}_{n+1}^{+c} := (\mathcal{S}_n^{+c})^{+c}, \quad (15)$$

und schließlich

$$\mathcal{S}_\omega^{+c} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{S}_n^{+c}, \quad (16)$$

wobei die Vereinigung im Sinne der Vereinigung aller Grundsymbole gemeint ist.

Gleichwertig dazu ist es, die Definition von Konstantensymbolen um folgende Regel zu erweitern:

Ist ϕ eine Formel, in der höchstens eine Variable x frei vorkommt, so ist $\mathbf{c}x\phi$ ein Konstantensymbol.

Damit werden die Definitionen von Konstanten, Termen und Formeln *simultane* rekursive Definitionen.

Satz 2.45 (Realisierung aller geschlossenen Existenzformeln mit neuen Konstantensymbolen) Ist Ψ eine konsistente Formelmenge über einer Sprache $\mathcal{S}$ erster Stufe, so ist auch $\Psi \cup \Xi$ über der Sprache $\mathcal{S}_\omega^{+c}$ konsistent, wobei

$$\begin{aligned} \Xi := \{(\exists x\phi) \rightarrow (\phi[x/\mathbf{c}x\phi]) : x \text{ ist eine Variable,} \\ \phi \text{ ist eine Formel in } \mathcal{S}_\omega^{+c} \text{ mit } \text{freeVar}(\phi) \subseteq \{x\}\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Beweis durch Kontraposition: Nehmen wir an, $\Psi \cup \Xi$ sei über der Sprache $\mathcal{S}_\omega^{+c}$ inkonsistent. Dann gibt es endliche Teilmengen $\Psi' \subseteq \Psi$ und $\Xi' \subseteq \Xi$ und eine Herleitung H über der Sprache $\mathcal{S}_\omega^{+c}$ mit $\Psi' \cup \Xi' \vdash \perp$. In der Herleitung H , in Ψ' und in Ξ' treten nur endlich viele Konstantensymbole der Gestalt $\mathbf{c}x\phi$ auf, sagen wir n solche Konstantensymbole. Es sei $\mathcal{S}^+$ die Sprache, die aus $\mathcal{S}$ durch Hinzufügen dieser endlich vielen neuen Konstantensymbole entsteht. Dann ist H auch eine Herleitung in dieser Sprache: $\Psi' \cup \Xi' \vdash_H^{\mathcal{S}^+} \perp$. Durch n -faches Anwenden von Lemma 2.43 schließen wir $\Psi' \vdash^{\mathcal{S}} \perp$, also auch $\Psi \vdash^{\mathcal{S}} \perp$ wegen $\Psi' \subseteq \Psi$. Die Formelmenge Ψ ist also über $\mathcal{S}$ inkonsistent.

3 Theorien 1. Stufe

Definition 3.1 Eine Theorie $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ erster Stufe besteht aus einer Sprache $\mathcal{S}$ 1. Stufe und einer Menge $\mathcal{A}$ von geschlossenen Formeln, d.h. Formeln ohne freie Variablen, in dieser Sprache. Die Menge $\mathcal{A}$ heißt das Axiomensystem von $\mathcal{T}$; ihre Elemente heißen Axiome von $\mathcal{T}$. Bei einer Theorie über einer Sprache mit Gleichheit vereinbaren wir, dass das Axiomensystem mindestens folgende Axiome umfassen soll:

Gleichheitsaxiome:

1. Reflexivität: $\forall x : x = x$,
2. Symmetrie: $\forall x \forall y : x = y \rightarrow y = x$,
3. Transitivität: $\forall x \forall y \forall z : x = y \rightarrow y = z \rightarrow x = z$,
4. Verträglichkeit mit Funktionssymbolen: Für jedes Funktionssymbol f mit einer Stelligkeit $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n : x_1 = y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow f x_1 \dots x_n = f y_1 \dots y_n,$$

5. Verträglichkeit mit Prädikatensymbolen: Für jedes Prädikatensymbol p mit einer Stelligkeit $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n : x_1 = y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow (p x_1 \dots x_n \leftrightarrow p y_1 \dots y_n).$$

Wir führen noch folgende Abkürzung ein: Für Terme s und t steht $s \neq t$ für $\neg s = t$.

Wir besprechen nun zwei wichtige Theorien, die *Peanoarithmetik* und die *Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre*.

3.1 Die Peanoarithmetik

Definition 3.2 (Axiome der Peanoarithmetik) Die Sprache der Peanoarithmetik PA ist die Sprache der Arithmetik. Neben den Gleichheitsaxiomen besitzt sie die folgenden Axiome:

1. $\forall m \forall n : \mathbf{N}m = \mathbf{N}n \rightarrow m = n$,
2. $\forall m : \mathbf{N}m \neq \mathbf{0}$,
3. **Induktionsschema:** Für jede Formel ϕ , die höchstens die verschiedenen freien Variablen $x_1, \dots, x_l, m$ enthält:

$$\forall x_1 \dots \forall x_l : \phi[m/\mathbf{0}] \rightarrow (\forall m : \phi \rightarrow \phi[m/\mathbf{N}m]) \rightarrow \forall m \phi,$$

4. **Rekursive Charakterisierung der Addition:**

$$\begin{aligned} \forall m : m + \mathbf{0} &= m, \\ \forall m \forall n : m + \mathbf{N}n &= \mathbf{N}(m + n), \end{aligned}$$

5. **Rekursive Charakterisierung der Multiplikation:**

$$\begin{aligned} \forall m : m \cdot \mathbf{0} &= \mathbf{0}, \\ \forall m \forall n : m \cdot \mathbf{N}n &= m \cdot n + m. \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Peanoarithmetik unendlich viele Axiome enthält, weil sie für jede Formel ϕ ein zugehöriges Induktionsaxiom enthält! In einführenden Mathematiktexten formuliert man das Prinzip der vollständigen Induktion oft so:

Für jede Eigenschaft $\phi(m)$ von natürlichen Zahlen $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: Wenn $\phi(0)$ gilt und wenn für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\phi(m)$ impliziert $\phi(m+1)$, dann folgt $\phi(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

In der Objektsprache der Peanoarithmetik, also in einer Sprache 1. Stufe, können wir diese Quantifizierung über alle Eigenschaften ϕ nicht ausdrücken; das wäre erst in einer Sprache 2. Stufe möglich. Wir behelfen uns bei diesem Problem damit, nicht nur ein Induktionsaxiom einzuführen, sondern für jede Formel ϕ und jede Variable m , die in ϕ auftreten darf, eines, also ein Induktionsschema statt eines Induktionsaxioms. Die Quantifizierung über alle Formeln im Induktionsschema erfolgt in der Metasprache. Allgemeiner sind Formelschemata Vorschriften in der Metasprache, wie man aus syntaktischen Eingabedaten (Formeln, Terme etc.) Formeln gewinnen kann.

Der Unterschied zwischen der metasprachlichen Quantifizierung über alle Formeln und der (in Sprachen 1. Stufe unmöglichen) objektsprachlichen Quantifizierung über alle Eigenschaften hat verblüffende Konsequenzen, wie wir später bei der Besprechung von Non-standardmodellen sehen werden.

Wir kürzen in der Sprache der Arithmetik ab: $\mathbf{1} := \mathbf{N0}$, $\mathbf{2} := \mathbf{N1}$, $\mathbf{3} := \mathbf{N2}$ etc. Beachten Sie, dass es sich hierbei um Abkürzungen für Terme in der Objektsprache handelt, nicht zu verwechseln mit den natürlichen Zahlen 1, 2, 3 in der Metasprache!

Übung 3.3 *Beweisen Sie:*

1. $\text{PA} \vdash \mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{2}$,
2. $\text{PA} \vdash \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Übung 3.4 *Beweisen Sie:*

1. $\text{PA} \vdash \forall m \forall n : m + n = n + m$,
2. $\text{PA} \vdash \forall l \forall m \forall n : (l + m) + n = l + (m + n)$.

Übung 3.5 *Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die n -te Ziffer als folgenden Term in der Sprache der Arithmetik:*

$$\mathbf{N}^n \mathbf{0} := \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{falls } n = 0, \\ \mathbf{N} \mathbf{N}^{n-1} \mathbf{0}, & \text{falls } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Beweisen Sie für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n \neq m$:

$$\text{PA} \vdash \neg \mathbf{N}^m \mathbf{0} = \mathbf{N}^n \mathbf{0}$$

Definition 3.6 (Das Kleinersymbol in der Arithmetik) *In der Sprache der Arithmetik kürzen wir ab:*

- Die Formel $m \leq n$ steht für die Formel $\exists l : m + l = n$,
 Die Formel $m < n$ steht für die Formel $\exists l : m + \mathbf{N}l = n$.

Beachten Sie, dass wir nicht etwa eine *Kleinerrelation*, sondern nur ein *Kleinersymbol* eingeführt haben, weil es sich um eine rein syntaktische Definition handelt! Obwohl die Peanoarithmetik, ein objektsprachliches Konstrukt, schon große Ähnlichkeiten mit der metasprachlichen Arithmetik hat, ist es wichtig, weiterhin die verschiedenen Sprachebenen zu trennen. Insbesondere haben wir immer noch keine Semantik für die Peanoarithmetik eingeführt. Mit semantischen Methoden wird die weitere Untersuchung der Peanoarithmetik einfacher werden. Wir stellen sie daher noch etwas zurück und wenden uns statt dessen der Mengenlehre zu:

3.2 Die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre

Die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre mit Auswahlaxiom, kurz ZFC, ist “das” Standardaxiomensystem für die Mathematik in einem mengentheoretischen Aufbau. Es genügt für die Formalisierung des größten Teils der Mathematik. Wer will, kann sich vorstellen, dass fast die gesamte mathematische Arbeit in einem mengentheoretischen Aufbau darin besteht, für immer komplexere Formeln ihre Herleitbarkeit in ZFC einzusehen, natürlich mit vielen Abkürzungsregeln und vielen zusammengesetzten Schlussregeln. Insbesondere kann man sich nun vorstellen, dass die in dieser Vorlesung verwendete Metasprache nicht mehr eine unspezifizierte “naive Mengenlehre”, sondern auch nur eine “Kopie” von ZFC ist, die man allerdings nicht mit der Objektsprache verwechseln darf.

Es ist praktisch, schon bei der Formulierung der Axiome Klassenterme und Abkürzungsregeln zu verwenden. Um auf Formeln in der minimalistischen Sprache der Mengenlehre zu kommen, müssen die Klassenterme und Abkürzungen natürlich zuerst expandiert werden. Vor der Formulierung der Axiome starten wir mit einigen Standardabkürzungen. Wir verzichten auf den Fettdruck objektsprachlicher Symbole, weil Missverständnisse nicht zu befürchten sind.

Definition 3.7 (Einige Standardklassenterme und -prädikatensymbole) *In dieser Definition steht das Wort “Term” nicht nur für Variablen, sondern auch für Klassenterme.*

1. **Das Universumssymbol:** *Das Symbol V , steht für den Klassenterm $\{x : \top\}$.*
2. **Leere-Menge-Symbol:** *Das Symbol $\emptyset$, genannt leere-Menge-Symbol, steht für den Klassenterm $\{x : \perp\}$.*
3. **Paarmengensymbol:** *Für zwei Terme s, t steht das Symbol $\{s, t\}$ für den Klassenterm $\{u : u = s \vee u = t\}$. Das Symbol $\{t\}$ steht für den Klassenterm $\{u : u = t\}$. Dabei darf die Variable u nicht in s oder t auftreten.*
4. **Paarsymbol:** *Für zwei Terme s, t steht das Symbol (s, t) für $\{\{s\}, \{s, t\}\}$.*
5. **Vereinigungssymbole:**
 - *Für jeden Term t steht $\bigcup t$ für den Klassenterm $\{x : \exists y : x \in y \wedge y \in t\}$. Dabei dürfen die Variablen x und y nicht in t auftreten.*

- Für zwei Terme s, t steht $s \cup t$ für den Klassenterm $\{u : u \in s \vee u \in t\}$. Dabei darf die Variable u nicht in s oder t auftreten.

6. Durchschnittssymbole:

- Für jeden Term t steht $\bigcap t$ für den Klassenterm $\{x : \forall y : y \in t \rightarrow x \in y\}$. Dabei dürfen die Variablen x und y nicht in t auftreten.
- Für zwei Terme s, t steht $s \cap t$ für den Klassenterm $\{u : u \in s \wedge u \in t\}$. Dabei darf die Variable u nicht in s oder t auftreten.

- Potenzmengensymbol:** Für jeden Term t steht $\mathfrak{P}(t)$ für den Klassenterm $\{u : u \subseteq t\}$.
- Nachfolgersymbol:** Für einen Term t steht das Symbol $N(t)$ für den Klassenterm $t \cup \{t\}$.
- Prädikatensymbol für Transitivität:** Das einstellige Prädikatensymbol “transitiv” wird so ersetzt: Für einen Term t steht $\text{transitiv } t$ für $\forall x \forall y : x \in y \rightarrow y \in t \rightarrow x \in t$. Dabei dürfen die Variablen x und y nicht in t auftreten.
- Prädikatensymbol für $\in$ -lineare Ordnung:** Das einstellige Prädikatensymbol “linOrd” wird so ersetzt: Für einen Term t steht $\text{linOrd } t$ für $\forall x \forall y : x \in t \rightarrow y \in t \rightarrow x \in y \vee x = y \vee y \in x$. Dabei dürfen die Variablen x und y nicht in t auftreten.
- Klassenterm der Ordinalzahlen:** Der Klassenterm On (von “ordinal numbers”) steht für $\{x : \text{transitiv } x \wedge \text{linOrd } x\}$.
- Klassenterm der Menge der natürlichen Zahlen:** Es steht ω für den Klassenterm¹¹ $\{x : x \in \text{On} \wedge \forall y : y \in N(x) \rightarrow y = \emptyset \vee \exists z : z \in \text{On} \wedge y = N(z)\}$.
- Kartesisches Produktsymbol zweier Terme:** Für zwei Terme s, t steht $s \times t$ für $\{x : \exists y \exists z : x = (y, z) \wedge y \in s \wedge z \in t\}$. Dabei müssen x, y, z “neue” Variablen sein.
- Abbildungsprädikatensymbole:** Für drei Terme f, a, b steht $f : a \dashrightarrow b$ (zu lesen als: “ f ist eine partielle Abbildung von a nach b ”) für $f \subseteq a \times b \wedge \forall x \forall y \forall z : (x, y) \in f \rightarrow (x, z) \in f \rightarrow y = z$. Weiter steht $f : a \longrightarrow b$ (zu lesen als: “ f ist eine Abbildung von a nach b ”) für $f : a \dashrightarrow b \wedge \forall x : x \in a \rightarrow \exists y : y \in b \wedge (x, y) \in f$. (x, y neue Variablen) Die Notation $f : a \longrightarrow b$ darf nicht mit dem Implikationspfeil verwechselt werden, trotz des ähnlichen Symbols!
- Bildsymbol:** Für zwei Terme f, a steht $f[a]$ für den Klassenterm $\{y : \exists x : x \in a \wedge (x, y) \in f\}$ (x, y neue Variablen).

¹¹In der Mengenlehre ist das Symbol ω statt $\mathbb{N}_0$ für die Menge der natürlichen Zahlen üblich. Wir verwenden es hier als ein Symbol der Objektsprache, während wir $\mathbb{N}_0$ nur in der Metasprache verwenden.

16. **Auswertungssymbol:** ¹² Für zwei Terme f, x steht $f(x)$ für $\bigcup(f[\{x\}])$.

17. **Kartesisches Potenzsymbol:** Für zwei Terme a, b steht b^a für $\{f : f : a \longrightarrow b\}$.
Dabei muss f eine “neue” Variable sein.

Für jeden Term t ist $t \in V$ nach den Expansionsregeln für Klassenterme also ein Synonym für $\exists x : x = t \wedge \top$, was äquivalent (im Sinne wechselseitiger Herleitbarkeit) zu $\exists x : x = t$ ist. Mit der Formel $t \in V$ kann man also objektsprachlich die Existenzaussage zu t in Kurznotation aufschreiben.

□

Die Axiome von ZF und von ZFC. Die Axiome der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre ZF lauten:

- *Nullmengenaxiom* NULL:

$$\emptyset \in V,$$

umgangssprachlich “Die leere Menge existiert.”

- *Extensionalitätsaxiom* EXT:

$$\forall x \forall y : (\forall z : z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow (\forall u : x \in u \leftrightarrow y \in u),$$

umgangssprachlich “Zwei Mengen enthalten genau dann die gleichen Elemente, wenn sie in den gleichen Mengen enthalten sind”.

- *Paarmengenaxiom* PAIR:

$$\forall x \forall y : \{x, y\} \in V,$$

umgangssprachlich “Für alle x, y existiert die Paarmenge $\{x, y\}$ ”.

- *Vereinigungsmengenaxiom* UNION:

$$\forall x : \bigcup x \in V,$$

umgangssprachlich “Für alle x existiert die Vereinigungsmenge $\bigcup x$ ”.

- *Potenzmengenaxiom* POWER:

$$\forall x : \mathfrak{P}(x) \in V,$$

umgangssprachlich “Für alle x existiert die Potenzmenge $\mathfrak{P}(x)$ ”.

¹²Das kann man sich so anschaulich vorstellen: Wenn f eine Funktion beschreibt und x im Definitionsbereich liegt, kann man den Funktionswert $f(x)$ als Vereinigung aller Elemente des Bilds $f[\{x\}] = \{f(x)\}$ erhalten. Die Notation $f(x)$ wird fast ausschließlich im Zusammenhang mit Abbildungsprädikatsymbolen verwendet.

- *Unendlichkeitsaxiom* NAT:

$$\omega \in V,$$

umgangssprachlich “Die Menge ω der natürlichen Zahlen existiert.”

- *Fundierungsaxiom* FUND:

$$\forall x : x \neq \emptyset \rightarrow \exists z : z \in x \wedge \forall u : u \in z \rightarrow u \notin x,$$

umgangssprachlich “Jede nichtleere Menge x enthält ein $\in$ -minimales Element z .”

- *Ersetzungsschema* REPLACE($\cdot$): Für jeden Klassenterm f , der höchstens die verschiedenen Variablen $z_1, \dots, z_n$ frei enthält, ist REPLACE(f) das folgende Axiom:

$$\forall z_1 \dots \forall z_n : f : V \dashrightarrow V \rightarrow \forall x : f[x] \in V$$

Umgangssprachlich: “Das Bild einer Menge unter einer partiellen Abbildung, die nur als Klassenterm gegeben sein braucht, existiert.”

Durch Hinzunahme des folgenden Auswahlaxioms AC wird das Axiomensystem ZF zum Axiomensystem ZFC erweitert:

- *Auswahlaxiom* AC:

$$\forall a : \emptyset \notin a \rightarrow \exists f : f : a \longrightarrow V \wedge \forall x : x \in a \rightarrow f(x) \in x$$

Umgangssprachlich: “Zu jeder Menge a , die nicht die leere Menge als Element enthält, gibt es eine auf a definierte Auswahlfunktion f , die zu jedem Element x von a ein Element $f(x)$ von x auswählt.”

Kommentare dazu (teilweise schon in semantischer Sprechweise):

- Mit der Definition von $x = y$ als Abkürzung für $\forall z : z \in x \leftrightarrow z \in y$ kann man das Extensionalitätsaxiom auch so schreiben:

$$\forall x \forall y : x = y \leftrightarrow (\forall u : x \in u \leftrightarrow y \in u),$$

Insbesondere sind mit dem Extensionalitätsaxiom und der Definition der Gleichheit als Abkürzung alle “Gleichheitsaxiome” herleitbar:

$$\vdash \forall x : x = x, \tag{18}$$

$$\vdash \forall x \forall y : x = y \rightarrow y = x, \tag{19}$$

$$\vdash \forall x \forall y \forall z : x = y \rightarrow y = z \rightarrow x = z, \tag{20}$$

$$\text{EXT} \vdash \forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 : x_1 = x_2 \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow x_1 \in y_1 \rightarrow x_2 \in y_2. \tag{21}$$

Übung 3.8 *Man beweise Formel (21).*

Man beachte, dass das Extensionalitätsaxiom nur für das vierte “Gleichheitsaxiom” gebraucht wird, während die ersten drei “Gleichheitsaxiome” schon rein prädikatenlogisch mit der Definition von “=” folgen. Die Aussagen (18)–(21) erklären, warum wir keine Gleichheitsaxiome in ZF brauchen.

- Die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre kennt keine “Typen” oder “Stufen” von Mengen, also keine Unterscheidung von Mengen, Mengensystemen und Systemen von Mengensystemen: Alle Objekte darin kann man sich als Mengen vorstellen, die durch geschachtelte Mengenbildung letztlich aus der leeren Menge zusammengesetzt sind.
- Die Axiome **NULL**, **PAIR**, **UNION**, **POWER**, **NAT** und **REPLACE**(f) sind Existenzaussagen, die Standardkonstruktionen in der umgangssprachlichen naiven Mengenlehre entsprechen.
- Die Nachfolgerrelation auf den natürlichen Zahlen wird durch $N(m) = m \cup \{m\}$ gegeben. Damit sollte man sich die ersten natürlichen Zahlen in der Mengenlehre, also die ersten Elemente von ω , so vorstellen:

$$\begin{aligned} 0 &:= \emptyset, \\ 1 &:= N(0) = \{\emptyset\}, \\ 2 &:= N(1) = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\ 3 &:= N(2) = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \text{ etc.} \end{aligned}$$

- Das Fundierungsaxiom ist die Basis für Induktionen über die Elementrelation und damit letztlich die Basis für vollständige Induktion in der Mengenlehre sowie allgemeiner für sogenannte “transfinite Induktionen” über Ordinalzahlen. Mehr dazu später.
- Das Ersetzungsschema darf nicht mit der viel schwächeren Aussage

$$\forall f : f : V \dashrightarrow V \rightarrow \forall x : f[x] \in V \quad (22)$$

verwechselt werden! Die Allquantifizierung über f im Ersetzungsschema erfolgt in der Metasprache, während sie in Formel (22) in der Objektsprache erfolgt. Durch das Ersetzungsschema enthält ZF unendlich viele Axiome, ähnlich wie die Peanoarithmetik durch das Induktionsschema ebenfalls unendlich viele Axiome enthält. Man kann unter der Annahme der Konsistenz $\text{ZF} \not\vdash \perp$ von ZF zeigen, dass endlich viele Axiome nicht zur Axiomatisierung von ZF genügen, d.h. für jede endliche Liste Φ von geschlossenen Formeln kann nicht zugleich $\Phi \vdash \psi$ für jedes ZF-Axiom ψ und $\text{ZF} \vdash \phi$ für jedes ϕ in Φ gelten.

- Eine wichtige Anwendung des Ersetzungsschemas ist das Aussonderungsschema **SELECT**($\cdot$): Für jede Formel ϕ , die höchstens die verschiedenen Variablen $x, z_1, \dots, z_n$

frei enthält, und jeden Term a , in dem x nicht auftritt, definieren wir den Klassen-term $\{x \in a : \phi\} := \{x : x \in a \wedge \phi\}$. Nun sei a sogar eine “neue” Variable. Dann ist $\text{SELECT}(\phi)$ die folgende Formel:

$$\forall z_1 \dots \forall z_n \forall a : \{x \in a : \phi\} \in V$$

Umgangssprachlich: “Zu jeder Menge a existiert die Teilmenge, die genau die Elemente x von a mit der Eigenschaft ϕ enthält.”

Zur Herleitung davon in ZF wendet man das Ersetzungsschema auf $f = \{y : \exists x : \phi \wedge y = (x, x)\}$ an.

- Das Auswahlaxiom gilt als besonders nichtkonstruktiv und hat daher eine Sonderrolle. Viele nichtkonstruktive Existenzsätze der Mathematik beruhen darauf, z.B. die Existenz einer Basis in jedem Vektorraum, das Zornsche Lemma, die Existenz nicht Lebesgue-messbarer Teilmengen von $\mathbb{R}$, der Satz von Hahn-Banach, der Satz von Tychonov und viele andere. In der konstruktiven Mathematik darf es nicht verwendet werden.

Übung 3.9 Zeigen Sie:

1. $\text{ZF} \vdash \forall x \forall y : x \cup y = \bigcup \{x, y\}$.
2. $\text{ZF} \vdash \forall x \forall y : x \cup y \in V$.

Übung 3.10 Zeigen Sie:

1. $\text{ZF} \vdash \forall x : x \notin x$. Das Fundierungsaxiom kann Ihnen dabei helfen.
2. Folgern Sie: $\text{ZF} \vdash V \notin V$.

3.3 Vollständige Theorien

Definition 3.11 (vollständige Theorien) Eine Theorie $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ heißt vollständig, wenn für jede geschlossene¹³ Formel ϕ in der Sprache $\mathcal{S}$ gilt: $\mathcal{A} \vdash \phi$ oder $\mathcal{A} \vdash \neg\phi$.

Insbesondere ist jede inkonsistente Theorie vollständig, aber natürlich nicht besonders interessant.

Wir nennen eine Menge $\mathcal{A}$ von geschlossenen Formeln in einer Sprache $\mathcal{S}$ (oder auch die zugehörige Theorie $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$) abgeschlossen unter Herleitungen, kurz $\vdash$ -abgeschlossen, wenn für jede geschlossene Formel ϕ mit $\mathcal{A} \vdash \phi$ gilt: $\phi \in \mathcal{A}$. Insbesondere ist

$$\text{theorems}(\mathcal{A}) := \{\phi : \phi \text{ ist geschlossene Formel in } \mathcal{S} \text{ mit } \mathcal{A} \vdash \phi\}$$

aufgrund der Transitivität der Herleitungsrelation $\vdash$ -abgeschlossen.

¹³d.h. $\text{freeVar}(\phi) = \emptyset$

Satz 3.12 (Existenz einer Vervollständigung einer Theorie) *Es sei $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ eine konsistente Theorie. Dann gibt es eine vollständige $\vdash$ -abgeschlossene konsistente Theorie $\mathcal{T}' = (\mathcal{S}, \mathcal{A}')$ über der gleichen Sprache $\mathcal{S}$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$.*

Weil es anschaulicher ist, beweisen wir den Satz zuerst im Fall, dass die Sprache $\mathcal{S}$ abzählbar ist, also nur abzählbar viele Funktionssymbole und Prädikatensymbole besitzt.

Beweis des Satzes im Fall einer abzählbaren Sprache. Ist $\mathcal{S}$ abzählbar, so ist auch die Menge der geschlossenen Formeln in $\mathcal{S}$ abzählbar. Es sei $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine solche Abzählung.

Wir definieren rekursiv eine Folge $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Mengen geschlossener Formeln:

$$\mathcal{A}_0 := \text{theorems}(\mathcal{A})$$

und für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathcal{A}_{n+1} := \begin{cases} \mathcal{A}_n, & \text{falls } \phi_n \in \mathcal{A}_n \text{ oder } \neg\phi_n \in \mathcal{A}_n, \\ \text{theorems}(\mathcal{A}_n \cup \{\phi_n\}), & \text{falls } \phi_n \notin \mathcal{A}_n \text{ und } \neg\phi_n \notin \mathcal{A}_n. \end{cases}$$

Nach Konstruktion ist die Folge $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ aufsteigend, $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und jedes $\mathcal{A}_n$ ist $\vdash$ -abgeschlossen. Wir zeigen nun induktiv, dass jedes $\mathcal{A}_n$ konsistent ist.

Induktionsanfang: $\mathcal{A}_0$ ist konsistent, da $\mathcal{A}$ nach Voraussetzung konsistent ist und $\vdash$ transitiv ist.

Induktionsvoraussetzung: Gegeben sei $n \in \mathbb{N}_0$, und $\mathcal{A}_n$ sei konsistent.

Induktionsschluß: Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Im Fall $\phi_n \in \mathcal{A}_n$ oder $\neg\phi_n \in \mathcal{A}_n$ ist $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$ ebenfalls konsistent.
- Im Fall $\phi_n \notin \mathcal{A}_n$ und $\neg\phi_n \notin \mathcal{A}_n$ schließen wir so: Angenommen, $\mathcal{A}_{n+1} \vdash \perp$. Wegen $\mathcal{A}_{n+1} = \text{theorems}(\mathcal{A}_n \cup \{\phi_n\})$ und der Transitivität von $\vdash$ folgt $\mathcal{A}_n \cup \{\phi_n\} \vdash \perp$, also mit einer Pfeileinführung $\mathcal{A}_n \vdash \neg\phi_n$. Weil $\mathcal{A}_n$ $\vdash$ -abgeschlossen ist, schließen wir $\neg\phi_n \in \mathcal{A}_n$ im Widerspruch zur Fallannahme. Damit ist $\mathcal{A}_{n+1} \not\vdash \perp$ gezeigt.

Nun sei

$$\mathcal{A}' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{A}_n.$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{A}'$ konsistent ist: Angenommen $\mathcal{A}' \vdash \perp$. Dann gibt es eine endliche Menge $\Phi \subseteq \mathcal{A}'$ mit $\Phi \vdash \perp$. Wegen $\mathcal{A}_n \uparrow \mathcal{A}'$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\Phi \subseteq \mathcal{A}_n$, so dass auch $\mathcal{A}_n \vdash \perp$ folgt, ein Widerspruch. Es folgt $\mathcal{A}' \not\vdash \perp$.

Nun zeigen wir, dass $\mathcal{A}'$ vollständig ist. Hierzu sei eine geschlossene Formel ϕ gegeben. Wir nehmen $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\phi = \phi_n$. Fallunterscheidung:

- Im Fall $\phi \in \mathcal{A}_n$ oder $\neg\phi \in \mathcal{A}_n$ folgt $\phi \in \mathcal{A}'$ oder $\neg\phi \in \mathcal{A}'$ wegen $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}'$, also erst recht $\mathcal{A}' \vdash \phi$ oder $\mathcal{A}' \vdash \neg\phi$.

- Im Fall $\phi \notin \mathcal{A}_n$ und $\neg\phi \notin \mathcal{A}_n$ folgt $\phi = \phi_n \in \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \mathcal{A}'$ nach Definition von $\mathcal{A}_{n+1}$.

Nun zeigen wir, dass $\mathcal{A}'$ $\vdash$ -abgeschlossen ist. Hierzu sei $\Phi \subseteq \mathcal{A}'$ eine endliche Menge und ψ eine geschlossene Formel mit $\Phi \vdash \psi$. Wir nehmen wieder ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\Phi \subseteq \mathcal{A}_n$. Dann folgt $\psi \in \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}'$, weil $\mathcal{A}_n$ $\vdash$ -abgeschlossen ist.

□

Bemerkung: Das Rekursionsverfahren aus dem Beweis liefert uns *keinen* Algorithmus, mit dem ein Computer die Axiome einer vollständigen konsistenten Theorie $\mathcal{T}'$, die $\mathcal{T}$ umfasst, aufzählen könnte: Hierzu bräuchten wir nämlich ein Verfahren, mit dem ein Computer entscheiden kann, welcher der beiden Fälle im Rekursionsschritt eintritt. Solch ein Verfahren steht uns nicht zur Verfügung, weil wir für eine vorgegebene Liste von Formeln $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi$ kein Verfahren zur Verfügung haben, mit dem wir entscheiden können, ob $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$ gilt: Zwar könnten wir systematisch nach zugehörigen Herleitungsbäumen suchen, doch solch ein Suchverfahren bricht vielleicht nicht ab, wenn $\phi_1, \dots, \phi_n \not\vdash \psi$ gilt. Insofern ist das Rekursionsverfahren aus dem Beweis *nicht konstruktiv*. Diese Problematik hat einen prinzipiellen Grund, die Gödelschen Unvollständigkeitssätze, die wir später diskutieren.

Der Vollständigkeit halber beweisen wir den Satz nun auch noch im allgemeinen Fall, in dem die Sprache $\mathcal{S}$ auch überabzählbar sein darf. Die Rekursion des obigen Beweises wird hier ersetzt durch eine Anwendung des *Zornschen Lemmas*. Vor seiner Formulierung definieren wir:

Definition 3.13 (partielle Ordnung) Eine *partielle Ordnung* auf einer Menge M ist eine zweistellige Relation $\leq \subseteq M \times M$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Reflexivität:* $x \leq x$ für alle $x \in M$.
2. *Antisymmetrie:* Für alle $x, y \in M$ mit $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$.
3. *Transitivität:* Für alle $x, y, z \in M$ mit $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$.

Das Paar $(M, \leq)$ nennen wir dann eine *partiell geordnete Menge*.

Gilt zusätzlich noch:

4. *paarweise Vergleichbarkeit:* für alle $x, y \in M$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$,

so nennen wir $\leq$ eine *lineare Ordnung* auf M .

Sei $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Eine Teilmenge $N \subseteq M$ heißt (bzgl. $\leq$) *linear geordnet*, wenn die Einschränkung $\leq \cap (N \times N)$ eine lineare Ordnung auf N ist. Ein Element $x \in M$ wird *obere Schranke* einer Menge $N \subseteq M$ genannt, wenn für alle $y \in N$ gilt: $y \leq x$. Ein Element $x \in M$ wird ein *maximales Element* genannt, wenn gilt: Für alle $y \in M$ mit $x \leq y$ folgt $x = y$.

Zornsches Lemma: *Es sei $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Zu jeder linear geordneten Teilmenge von M existiere eine obere Schranke. Dann besitzt M ein maximales Element.*

Das Zornsche Lemma ist eine Folgerung des Auswahlaxioms und ebenso nichtkonstruktiv wie das Auswahlaxiom. Wir beweisen es erst später im Rahmen einer Diskussion allgemeiner Rekursionen in der Mengenlehre.

Beweis des Satzes 3.12 im allgemeinen Fall. Weil der Beweis viel Ähnlichkeit mit dem Beweis im abzählbaren Fall hat, wird er hier etwas kürzer dargestellt:

Gegeben eine konsistente Theorie $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$, sei M die Menge aller konsistenten $\vdash$ -abgeschlossenen Mengen Φ von geschlossenen Formeln über $\mathcal{S}$ mit $\mathcal{A} \subseteq \Phi$. Durch die Inklusionsrelation $\leq := \subseteq$ wird M partiell geordnet. Wegen $\text{theorems}(\mathcal{A}) \in M$ ist $M \neq \emptyset$. Es sei nun $N \subseteq M$ eine linear geordnete Teilmenge. Im Fall $N = \emptyset$ ist $\text{theorems}(\mathcal{A})$ eine obere Schranke für N . Im Fall $N \neq \emptyset$ zeigen wir nun, dass die Vereinigung $\bigcup N$ eine obere Schranke für N ist:

- Aus $\emptyset \neq N \subseteq M$ folgt $\mathcal{A} \subseteq \bigcup N$ nach Definition von M .
- $\bigcup N$ ist konsistent. Um das einzusehen, nehmen wir $\bigcup N \vdash \perp$ an. Dann finden wir eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq \bigcup N$ mit $\Phi \vdash \perp$, sagen wir $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$. Zu jedem $i = 1, \dots, n$ wählen wir ein $\Psi_i \in N$ mit $\phi_i \in \Psi_i$ aus. Weil N linear geordnet ist, dürfen wir (eventuell nach Umordnung) annehmen $\Psi_1 \subseteq \dots \subseteq \Psi_n$. Dann folgt $\Phi \subseteq \Psi_n$, also auch $\Psi_n \vdash \perp$ im Widerspruch zu $\Psi_n \in M$. Es folgt $\bigcup N \not\vdash \perp$.
- $\bigcup N$ ist $\vdash$ -abgeschlossen. Um das einzusehen, nehmen wir eine geschlossene Formel ψ mit $\bigcup N \vdash \psi$. Wie eben finden wir eine endliche Teilmenge $\Phi \subseteq \bigcup N$ mit $\Phi \vdash \psi$. Der Schluss von eben, mit $\perp$ ersetzt durch ψ , zeigt uns $\Psi \vdash \psi$ für ein $\Psi \in N$, und daher $\psi \in \Psi \subseteq \bigcup N$, weil Ψ $\vdash$ -abgeschlossen ist.

Bis jetzt ist damit $\bigcup N \in M$ gezeigt. Weil $\Phi \subseteq \bigcup N$ für alle $\Phi \in N$ gilt, ist $\bigcup N$ eine obere Schranke von N .

Damit ist das Zornsche Lemma anwendbar und liefert uns ein maximales Element $\mathcal{A}'$ von M . Wir zeigen nun, dass $\mathcal{A}'$ vollständig (über $\mathcal{S}$) ist. Hierzu sei ϕ eine geschlossene Formel. Angenommen, es gilt $\mathcal{A}' \not\vdash \phi$ und $\mathcal{A}' \not\vdash \neg\phi$. Dann ist $\mathcal{A}'' := \text{theorems}(\mathcal{A}' \cup \{\phi\})$ eine konsistente(!), $\vdash$ -abgeschlossene Formelmeng mit $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}'' \in M$ und $\mathcal{A}' \neq \mathcal{A}''$, im Widerspruch dazu, dass $\mathcal{A}'$ ein maximales Element von M ist. Also ist $\mathcal{A}'$ in der Tat vollständig. □

4 Semantik einer Sprache 1. Stufe

4.1 Strukturen und Modelle

Je komplexer die Analyse der Objektsprache wird, desto schwieriger und unanschaulicher wird es, eine rein syntaktische Sprech- und Denkweise beizubehalten. Deshalb führen wir

nun eine Semantik von Sprachen 1. Stufe ein: Jedem n -stelligen Funktionssymbol wird eine n -stellige Funktion als seine Bedeutung zugeordnet, und jedem Prädikatsymbol eine n -stellige Relation als seine Bedeutung.

Definition 4.1 (Strukturen zu einer Sprache 1. Stufe) Gegeben sei eine Sprache $\mathcal{S}$ 1. Stufe, charakterisiert durch die Menge F ihrer Funktionssymbole, die Menge P ihrer Prädikatsymbole und die Stelligkeitsabbildung $s : F \cup P \rightarrow \mathbb{N}_0$. Eine Struktur zu $\mathcal{S}$ ist ein Paar $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$, bestehend aus einer nichtleeren Menge M , “Universum” der Struktur genannt, und einer auf $F \cup P$ definierten Funktion $\cdot^{\mathcal{M}}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Für jedes Funktionssymbol $f \in F$ mit Stelligkeit $n = s(f) \in \mathbb{N}_0$ ist $f^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow M$ eine n -stellige Funktion auf M mit Werten in M . Im Spezialfall von Konstantensymbolen $f = c$, Stelligkeit $s(c) = 0$, $M^0 = \{()\}$, schreiben wir auch $c^{\mathcal{M}}$ statt $c^{\mathcal{M}}()$, d.h. die leere Argumenteliste wird weggelassen.
2. Für jedes Prädikatsymbol $p \in P$ mit Stelligkeit $n = s(p) \in \mathbb{N}_0$ ist $p^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$ eine n -stellige Relation auf M .
3. Für Falsum $\perp$ muss $\perp^{\mathcal{M}} = \emptyset \subset M^0 = \{()\}$ gelten.
4. Ist $\mathcal{S}$ eine Sprache mit Gleichheitszeichen, so wird dem Gleichheitssymbol $=$ die Gleichheitsrelation (= Diagonale) auf M zugeordnet:

$$=^{\mathcal{M}} = \{(x, x) : x \in M\} \subseteq M^2$$

Alternativ kann eine n -stellige Relationen $R \subseteq M^n$ auch durch die folgende booleschwertige Funktion, ihre Indikatorfunktion, codieren:

$$M^n \rightarrow \{\text{wahr}, \text{falsch}\}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{cases} \text{wahr}, & \text{falls } (x_1, \dots, x_n) \in R, \\ \text{falsch}, & \text{falls } (x_1, \dots, x_n) \notin R. \end{cases}$$

Für ein n -stelliges Prädikatsymbol p verwenden wir die gleiche Notation $p^{\mathcal{M}}$ sowohl für die Relation $p^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$ als auch für ihre Indikatorfunktion $p^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$. Im Fall von Prädikatenkonstanten, also von 0-stelligen Prädikatsymbolen, lassen wir die leere Argumenteliste $()$ wieder weg, identifizieren also $p^{\mathcal{M}} : M^0 = \{()\} \rightarrow \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ mit seinem einzigen Wert $p^{\mathcal{M}}()$. Bei dieser alternativen Darstellung erhält das Falsum die Bedeutung $\perp^{\mathcal{M}} = \text{falsch}$.

Um auch Variablen eine Bedeutung zu geben, führen wir den Begriff der *Belegung* ein:

Definition 4.2 (Belegungen) Es sei V eine Menge von Variablen. Eine Belegung der Variablen in V in einer Struktur $(M, \cdot^{\mathcal{M}})$ ist eine Abbildung $b : V \rightarrow M$. Ist $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $x_i = b(v_i)$ für $i = 1, \dots, n$, so schreiben wir auch $[v_1/x_1, \dots, v_n/x_n] := b$. Mit $\text{domain}(b) := V$ wird der Definitionsbereich einer Belegung $b : V \rightarrow M$ bezeichnet.

Man verwechsle Belegungen nicht mit den syntaktischen Substitutionen, trotz der gleichen Notation! Während Substitutionen Variablen durch Terme ersetzen, also eine rein syntaktische Operationen liefern, erhalten Variablen durch eine Belegung einen Wert im Universum einer Struktur als ihre Bedeutung.

Wir definieren nun die Bedeutung von Termen in einer Struktur:

Rekursive Definition 4.3 (Semantik von Termen) *Es sei $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$ eine Struktur einer Sprache $\mathcal{S}$ 1. Stufe. Weiter sei t ein Term und b eine Belegung mindestens der in t auftretenden Variablen: $\text{freeVar}(t) \subseteq \text{domain}(b)$. Dann wird die Bedeutung $t^{\mathcal{M}}[b]$ von t in $\mathcal{M}$ unter b so rekursiv definiert:*

1. Ist t eine Variable, so sei

$$t^{\mathcal{M}}[b] := b(t).$$

2. Ist $t = f s_1 \dots s_n$ mit einem n -stelligen Funktionssymbol f und n Termen $s_1, \dots, s_n$, so sei

$$t^{\mathcal{M}}[b] := f^{\mathcal{M}}(s_1^{\mathcal{M}}[b], \dots, s_n^{\mathcal{M}}[b]).$$

Anschaulich gesagt wird der Term semantisch interpretiert, indem man jede Variable durch ihren Wert unter der Belegung und jedes n -stellige Funktionssymbol f durch seine Funktion $f^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow M$ in der Struktur ersetzt.

Für die nachfolgende Definition der Semantik von Formeln brauchen wir bei der Behandlung des Allquantors noch die folgende Abänderung einer Belegung an einer Stelle:

Zu einer Struktur $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$ seien b eine Belegung, x eine Variable und $y \in M$ ein Objekt. Es bezeichne $b[x/y] : \text{domain}(b) \cup \{x\} \rightarrow M$ die wie folgt abgeänderte Belegung:

$$b[x/y](z) = \begin{cases} b(z) & \text{falls } z \in \text{domain}(b) \setminus \{x\}, \\ y & \text{falls } z = x. \end{cases}$$

Rekursive Definition 4.4 (Gültigkeit von Formeln, Modelle) *Es sei $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$ eine Struktur einer Sprache $\mathcal{S}$ 1. Stufe. Weiter sei ϕ eine Formel und b eine Belegung mindestens der in ϕ frei auftretenden Variablen: $\text{freeVar}(\phi) \subseteq \text{domain}(b)$. Dann wird der Wahrheitswert $\phi^{\mathcal{M}}[b] \in \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ von ϕ in $\mathcal{M}$ unter b so rekursiv definiert:*

1. Ist $\phi = p t_1 \dots t_n$ eine Primformel mit einem n -stelligen Prädikatensymbol p und n Termen $t_1, \dots, t_n$, so sei

$$\phi^{\mathcal{M}}[b] := p^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[b], \dots, t_n^{\mathcal{M}}[b]).$$

Hierbei wird $p^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ als booleschwertige Funktion aufgefasst.

2. Ist $\phi = \psi \rightarrow \chi$ eine Implikation, so wird der Wahrheitswert $\phi^{\mathcal{M}}[b] \in \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ durch die folgende Tabelle definiert:

$\psi^{\mathcal{M}}[b]$	$\chi^{\mathcal{M}}[b]$	$(\psi \rightarrow \chi)^{\mathcal{M}}[b]$
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr
falsch	falsch	wahr

3. Ist $\phi = \forall x\psi$ eine Allformel, definieren wir den Wahrheitswert $\phi^{\mathcal{M}}[b] \in \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ so:

$$(\forall x\psi)^{\mathcal{M}}[b] := \begin{cases} \text{wahr,} & \text{falls für alle } y \in M \text{ gilt: } \psi^{\mathcal{M}}[b[x/y]] = \text{wahr,} \\ \text{falsch} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir schreiben $\mathcal{M} \models \phi[b]$, in Worten “ ϕ ist in $\mathcal{M}$ unter der Belegung b gültig”, als Synonym für $\phi^{\mathcal{M}}[b] = \text{wahr}$. Ist ϕ eine geschlossene Formel, so schreiben wir auch kurz $\mathcal{M} \models \phi$ für die Gültigkeit von ϕ in $\mathcal{M}$ unter der leeren Belegung. Ist eine Formel ϕ in der Sprache $\mathcal{S}$ für alle Strukturen $\mathcal{M}$ und Belegungen b mit $\text{freeVar}(\phi) \subseteq \text{domain}(b)$ gültig, so schreiben wir $\models \phi$ (oder manchmal genauer auch $\models^{\mathcal{S}} \phi$), in Worten “ ϕ ist (prädikatenlogisch) gültig”. Eine Struktur $\mathcal{M}$ heißt ein Modell einer Theorie $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$, in Zeichen $\mathcal{M} \models^{\mathcal{S}} \mathcal{A}$ oder auch kurz $\mathcal{M} \models \mathcal{A}$, wenn für jedes Axiom $\phi \in \mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{M} \models^{\mathcal{S}} \phi$.

Die Gültigkeitsrelation $\models$ ist also ein semantisches Gegenstück zur rein syntaktischen Herleitungsrelation $\vdash$. Anschaulich gesprochen wird der Wahrheitswert einer Formel in einer Struktur $\mathcal{M}$ bestimmt, indem man sie innerhalb der Struktur inhaltlich liest. Dabei wird der objektsprachliche Implikationspfeil $\rightarrow$ mit Hilfe der metasprachlichen Implikation $\Rightarrow$ interpretiert, und der objektsprachliche Allquantor $\forall$ mit Hilfe einer metasprachlichen Allquantifizierung im Universum der Struktur.

Beispiel 4.5 (Gruppentheorie und Gruppen) Die Sprache der Gruppentheorie besitzt neben dem Gleichheitszeichen $=$ noch ein zweistelliges Funktionssymbol $\circ$, das üblicherweise in Infix-Operatornotation geschrieben wird, und ein Konstantensymbol e . Die Gruppenaxiome, also die Axiome der Gruppentheorie, umfassen neben den Gleichheitsaxiomen noch die folgenden Axiome:

1. “Assoziativgesetz”: $\forall x \forall y \forall z : x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$,
2. “Linksneutrales Element”: $\forall x : e \circ x = x$,
3. “Existenz von Linksinversen”: $\forall x \exists y : y \circ x = e$.

Modelle $\mathcal{G}$ der Gruppentheorie umfassen also eine Menge G , eine Konstante $e^{\mathcal{G}} \in G$, neutrales Element genannt, eine zweistellige Funktion $\circ^{\mathcal{G}} : G \times G \rightarrow G$ und natürlich die Gleichheitsrelation $=^{\mathcal{G}}$ auf G , so dass die Gruppenaxiome hierfür gültig sind. Die Modelle der Gruppentheorie sind also genau die Gruppen im Sinne der Algebra.

Beispiel 4.6 (Standardmodell der Peanoarithmetik) Die Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}_0, \cdot^{\mathcal{N}})$ zur Sprache der Arithmetik besitze die Menge $\mathbb{N}_0$ der natürlichen Zahlen als Universum, sowie (neben der Gleichheitsrelation $=^{\mathcal{N}}$ auf $\mathbb{N}_0$) noch die folgenden Interpretationen der Funktionssymbole:

1. Das Nullsymbol $\mathbf{0}$ wird durch die Null $\mathbf{0}^{\mathcal{N}} = 0 \in \mathbb{N}_0$ interpretiert.
2. Das Nachfolgersymbol $\mathbf{N}$ wird durch die Nachfolgerfunktion $\mathbf{N}^{\mathcal{N}} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\mathbf{N}^{\mathcal{N}}(x) := x + 1$ interpretiert.

3. Das Plusymbol $+$ wird durch die Additionsabbildung $+^{\mathcal{N}} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $x +^{\mathcal{N}} y := x + y$ interpretiert.
4. Das Malsymbol $\cdot$ wird durch die Multiplikationsabbildung $\cdot^{\mathcal{N}} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $x \cdot^{\mathcal{N}} y := xy$ interpretiert.

Damit wird $\mathcal{N}$ ein Modell der Peanoarithmetik. Es heißt das Standardmodell der Peanoarithmetik.

Die Gruppenaxiome erfüllen in der Mathematik eine ganz andere Funktion als die Peanoaxiome: Während die Gruppenaxiome viele nichtisomorphe Modelle, eben die Gruppen, beschreiben sollen, sind die Peanoaxiome ursprünglich gedacht gewesen, damit nur das Standardmodell (und dazu isomorphe Modelle) zu beschreiben. Allerdings wird dieses ursprüngliche Ziel nicht erreicht, wie wir später sehen werden: Neben dem Standardmodell (und seinen dazu isomorphen Varianten) gibt es noch zahlreiche weitere Modelle der Peanoarithmetik, „Nichtstandardmodelle“ genannt.

Anders als bei der Peanoarithmetik fällt uns kein Kandidat für ein Standardmodell von ZFC ein: Das Universum eines solchen Modells müsste ja eine *Menge* in der Metasprache sein. Dieses Problem hat einen prinzipiellen Grund, der damit zusammenhängt, dass wir uns die Metasprache selbst als eine Kopie von ZFC vorstellen können. Diesen Grund werden wir mit den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen später genauer beschreiben können.

Semantik der abgeleiteten Junktoren. Die durch Abkürzungsregeln definierten objektsprachlichen Junktoren bekommen in jeder Struktur eine Semantik, die für die metasprachlichen Junktoren wohlbekannt ist. Wir fassen sie in den folgenden Tabellen zusammen. Hierzu seien $\mathcal{M}$ eine Struktur zu einer Sprache, ϕ und ψ zwei Formeln und b eine Belegung mindestens der freien Variablen in ϕ und ψ .

- *abgeleiteter 0-stelliger Junktor:* Es gilt $\top^{\mathcal{M}} = \text{wahr}$.
- *abgeleiteter 1-stelliger Junktor:*

$\phi^{\mathcal{M}}[b]$	$\neg\phi^{\mathcal{M}}[b]$
wahr	falsch
falsch	wahr

- *abgeleitete 2-stellige Junktoren:*

$\phi^{\mathcal{M}}[b]$	$\psi^{\mathcal{M}}[b]$	$(\phi \vee \psi)^{\mathcal{M}}[b]$	$(\phi \wedge \psi)^{\mathcal{M}}[b]$	$(\phi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{M}}[b]$
wahr	wahr	wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr	falsch	falsch
falsch	falsch	falsch	falsch	wahr

Semantik des Existenzquantors. Auch Existenzformeln $\exists x\phi$, abgekürzt für $\neg\forall x\neg\phi$, bekommen in einer Struktur $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$ die zu erwartende Semantik: Ist b eine Belegung mindestens der freien Variablen in $\exists x\phi$, so hat man den Wahrheitswert

$$(\exists x\phi)^{\mathcal{M}}[b] = \begin{cases} \text{wahr,} & \text{falls ein } y \in M \text{ mit } \phi^{\mathcal{M}}[b[x/y]] = \text{wahr existiert,} \\ \text{falsch} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Verkleben von Punkten bei Strukturen mit Gleichheitssymbol. Die folgende Konstruktion, das Verkleben von Punkten in einem Modell, wird auch viel in anderen mathematischen Fächern verwendet, z.B. bei der Konstruktion reeller Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen, bei der Konstruktion von Quotientenräumen u.v.a.: Es sei $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$ eine Struktur zu einer Sprache $\mathcal{S}$ 1. Stufe mit einem zweistelligen Prädikatensymbol $=$. Wir nehmen an, dass für dieses Symbol alle Gleichheitsaxiome in $\mathcal{M}$ gültig seien, aber $=^{\mathcal{M}}$ nicht die Gleichheitsrelation zu sein braucht. Dann ist $=^{\mathcal{M}}$ eine Äquivalenzrelation, denn wegen der Gültigkeit der ersten drei Gleichheitsaxiome ist sie reflexiv, symmetrisch und transitiv. Für $x \in M$ sei $[x] := \{y \in M : y =^{\mathcal{M}} x\}$ die Äquivalenzklasse von x und

$$M/{=^{\mathcal{M}}} := \{[x] : x \in M\}$$

der zugehörige Quotientenraum. Für jedes n -stellige Funktionssymbol f und alle $x_1, \dots, x_n \in M$, $y_1, \dots, y_n \in M$ mit $x_j =^{\mathcal{M}} y_j$, also mit $[x_j] = [y_j]$ für alle $j = 1, \dots, n$ folgt $f^{\mathcal{M}}(x_1, \dots, x_n) =^{\mathcal{M}} f^{\mathcal{M}}(y_1, \dots, y_n)$, also $[f^{\mathcal{M}}(x_1, \dots, x_n)] = [f^{\mathcal{M}}(y_1, \dots, y_n)]$, aufgrund der Gültigkeit des Gleichheitsaxioms für f in der Struktur $\mathcal{M}$. Damit ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f^{M/{=^{\mathcal{M}}}} : (M/{=^{\mathcal{M}}})^n &\rightarrow M/{=^{\mathcal{M}}}, \\ f^{M/{=^{\mathcal{M}}}}([x_1], \dots, [x_n]) &:= [f^{\mathcal{M}}(x_1, \dots, x_n)] \end{aligned}$$

wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten in jeder Äquivalenzklasse. Ebenso: Für jedes n -stellige Prädikatensymbol p und alle $x_1, \dots, x_n \in M$, $y_1, \dots, y_n \in M$ mit $[x_j] = [y_j]$ für alle $j = 1, \dots, n$ folgt $p^{\mathcal{M}}(x_1, \dots, x_n) = p^{\mathcal{M}}(y_1, \dots, y_n) \in \{\text{wahr, falsch}\}$ aufgrund der Gültigkeit des Gleichheitsaxioms für p in der Struktur $\mathcal{M}$. Damit ist die booleschwertige Abbildung

$$\begin{aligned} p^{M/{=^{\mathcal{M}}}} : (M/{=^{\mathcal{M}}})^n &\rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}, \\ p^{M/{=^{\mathcal{M}}}}([x_1], \dots, [x_n]) &:= p^{\mathcal{M}}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten in jeder Äquivalenzklasse. Mit diesen Interpretationen der Funktions- und Prädikatensymbole wird $M/{=^{\mathcal{M}}} := (M/{=^{\mathcal{M}}}, \cdot^{M/{=^{\mathcal{M}}}})$ ebenfalls eine Struktur zur Sprache $\mathcal{S}$, in der das Gleichheitssymbol $=$ nun als Gleichheitsrelation auf $M/{=^{\mathcal{M}}}$ interpretiert wird. Zudem haben wir die kanonische Abbildung $k : M \rightarrow M/{=^{\mathcal{M}}}$, $k(x) = [x]$.

Lemma 4.7 (Quotientenstrukturen) *In der Situation von oben sei ϕ eine Formel und b eine Belegung mit Werten in M mindestens aller freien Variablen in ϕ . Es sei $k \circ b : \text{domain}(b) \rightarrow M/{=^{\mathcal{M}}}$, $x \mapsto [b(x)]$ die Komposition der Belegung b mit der kanonischen Abbildung k . Dann sind äquivalent:*

1. $\mathcal{M} \models \phi[b]$,
2. $\mathcal{M}/{=^{\mathcal{M}}} \models \phi[k \circ b]$.

Insbesondere ist $\mathcal{M}$ genau dann ein Modell einer Theorie $\mathcal{T}$ über der Sprache $\mathcal{S}$, wenn $\mathcal{M}/{=^{\mathcal{M}}}$ ein Modell der gleichen Theorie ist.

Übung 4.8 *Beweisen Sie Lemma (4.7) durch Induktion über den Aufbau der Formel ϕ .*

Im Sinne dieses Lemmas ist es nicht mehr nötig, dem Gleichheitssymbol in Modellen eine besondere Rolle einzuräumen: Man kann ihm durch Übergang zur Quotientenstruktur stets die Gleichheitsrelation als Semantik geben, wenn in der Ausgangsstruktur die Gleichheitsaxiome gültig sind.

Die kanonische Abbildung ist also ein (starker) Homomorphismus von Strukturen im Sinne der folgenden Definition:

Definition 4.9 (Homomorphismen von Strukturen) *Es seien $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$ und $\mathcal{N} = (N, \cdot^{\mathcal{N}})$ zwei Strukturen über der gleichen Sprache $\mathcal{S}$. Eine Abbildung $k : M \rightarrow N$ wird (starker) Homomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ genannt, wenn für jede Formel ϕ in $\mathcal{S}$ und jede Belegung $b : \text{domain}(b) \rightarrow M$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:*

1. $\mathcal{M} \models \phi[b]$,
2. $\mathcal{N} \models \phi[k \circ b]$.

Ist dies nur für jede Primformel ϕ garantiert, so nennen wir k einen schwachen Homomorphismus.

4.2 Äquivalenz von Syntax und Semantik bei Sprachen 1. Stufe

Der syntaktische Zugang und der semantische Zugang zur Logik unterscheiden sich zunächst beträchtlich: Während das syntaktische Herleiten aus kombinatorischem Operieren mit endlichen Objekten besteht, beruht der semantische Gültigkeitsbegriff auf einer inhaltlichen Interpretation der Bedeutung von Formeln. Es ist daher nicht offensichtlich, dass syntaktische Herleitbarkeit und semantische Gültigkeit äquivalente Begriffe sind. Diese Äquivalenz wird das erste Hauptergebnis dieser Logikvorlesung:

Satz 4.10 Korrektheitssatz und Gödelscher Vollständigkeitssatz (Äquivalenz von syntaktischer Herleitbarkeit und semantischer Gültigkeit)

Es seien $\psi, \phi_1, \dots, \phi_n$ Formeln in einer Sprache $\mathcal{S}$ 1. Stufe, wobei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann sind äquivalent:

1. (syntaktische Herleitbarkeit) $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash^S \psi$,
2. (semantische Gültigkeit) Für jede Struktur $\mathcal{M}$ über $\mathcal{S}$ und jede Belegung b darüber mit $\text{freeVar}(\psi) \cup \bigcup_{i=1}^n \text{freeVar} \phi_i \subseteq \text{domain}(b)$ gilt:
Aus $\mathcal{M} \models \phi_j[b]$ für alle $j = 1, \dots, n$ folgt $\mathcal{M} \models \psi[b]$.

Halten wir den Spezialfall $n = 0$, $\text{freeVar}(\psi) = \emptyset$ davon gesondert fest:

Korollar 4.11 (Äquivalenz von Herleitbarkeit und Gültigkeit geschlossener Formeln) Es sei ψ eine geschlossene Formel in einer Sprache $\mathcal{S}$ 1. Stufe. Dann sind äquivalent:

1. $\vdash^S \psi$,
2. $\mathcal{M} \models \psi$ für jede Struktur $\mathcal{M}$ über $\mathcal{S}$.

Die Implikation “1. $\Rightarrow$ 2.” des Satzes wird “*Korrektheitssatz*” genannt. Die Implikation “2. $\Rightarrow$ 1.” ist der berühmte “*Gödelsche Vollständigkeitssatz*”. Die Beweise dieser beiden Implikationen sind ziemlich verschieden: Während der Korrektheitssatz fast offensichtlich ist, weil nur die semantische Richtigkeit der Herleitungsregeln gecheckt werden muss, ist der Gödelsche Vollständigkeitssatz ein tiefliegendes Resultat der Logik: Man braucht nicht mehr als die wenigen Herleitungsregeln, um die inhaltliche Gültigkeit für jede Struktur zu prüfen. In diesem Sinn ist der Herleitungskalkül “vollständig”.

Am Rande sei bemerkt, dass es *kein* Analogon für den Gödelschen Vollständigkeitssatz bei prädikatenlogischen Sprachen 2. oder höherer Stufen gibt. Das zeichnet Sprachen 1. Stufe gegenüber Sprachen höherer Stufen aus und ist der Hauptgrund, warum wir uns in der Vorlesung vorwiegend mit Sprachen 1. Stufe beschäftigen.

Beweis des Korrektheitssatzes. Wir beweisen den Satz durch Induktion über den Aufbau einer Herleitung H zu $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash_H \psi$. Gegeben eine solche Herleitung H , nehmen als Induktionsvoraussetzung an, dass die Aussage des Satzes für alle Teilerleitungen von H gelte. Es sei $\mathcal{M}$ eine Struktur zu $\mathcal{S}$ und b eine Belegung mindestens aller freien Variablen in $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi$. Es gelte $\mathcal{M} \models \phi_j[b]$ für alle $j = 1, \dots, n$.

1. *Annahmeneinführung A*: Ist H eine Annahmeneinführung, so ist ψ eine der Formeln $\phi_1, \dots, \phi_n$. In diesem Fall ist die Behauptung $\mathcal{M} \models \psi[b]$ eine der Voraussetzungen.
2. *Indirekter Beweis I*: Ist $H = (I, \neg\neg\chi \rightarrow \chi)$ so folgt $\mathcal{M} \models (\neg\neg\chi \rightarrow \chi)[b]$, wie die folgende Wahrheitstabelle zeigt:

$\chi^{\mathcal{M}}[b]$	$(\neg\chi)^{\mathcal{M}}[b]$	$(\neg\neg\chi)^{\mathcal{M}}[b]$	$(\neg\neg\chi \rightarrow \chi)^{\mathcal{M}}[b]$
wahr	falsch	wahr	wahr
falsch	wahr	falsch	wahr

3. *Gebundene Umbenennung U*: Ist $H = (U, \psi, H_1)$, so folgt $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash_{H_1} \chi$ mit einer gebunden umbenannten Formel $\chi \approx \psi$. Wir zeigen durch Induktion über den Aufbau von ψ , dass $\psi \approx \chi$ für jede Struktur $\mathcal{M}$ und Belegung b mindestens der freien Variablen in ψ impliziert: $\psi^{\mathcal{M}}[b] = \chi^{\mathcal{M}}[b]$:

- Ist ψ eine Primformel, so ist $\psi = \chi$ und damit die Behauptung trivial.
- Ist $\psi = (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ eine Implikation, so ist auch $\chi = (\chi_1 \rightarrow \chi_2)$ eine Implikation mit $\psi_1 \approx \chi_1$ und $\psi_2 \approx \chi_2$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\psi_j^{\mathcal{M}}[b] = \chi_j^{\mathcal{M}}[b]$ für $j = 1, 2$, und daher auch $(\psi_1 \rightarrow \psi_2)^{\mathcal{M}}[b] = (\chi_1 \rightarrow \chi_2)^{\mathcal{M}}[b]$.
- Ist $\psi = \forall x \psi_1$, so ist $\chi = \forall y \chi_1$ mit $\text{freeVar } \psi = \text{freeVar } \chi$ und einer gebunden umbenannten Formel $\chi_1 \approx \psi_1[x/y]$. Gegeben $z \in M$ im Universum M der Struktur $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$, betrachten wir die beiden Belegungen $b_1 = b[x/z]$ und $b_2 = b[y/z]$. Nach der (inneren) Induktionsvoraussetzung folgt $\chi_1^{\mathcal{M}}[b_2] = \psi_1[x/y]^{\mathcal{M}}[b_2] = \psi_1^{\mathcal{M}}[b_1]$, wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass es keinen Unterschied macht, ob wir erst x durch y substituieren und dann y mit z belegen, oder gleich x mit z belegen. Weil dies für alle $z \in M$ gilt, folgt $(\forall x \psi_1)^{\mathcal{M}}[b] = (\forall y \chi_1)^{\mathcal{M}}[b]$ nach der Definition der Gültigkeit von Allformeln.

Mit der Voraussetzung $\mathcal{M} \models \phi_j[b]$ für $j = 1, \dots, n$ folgt nun $\mathcal{M} \models \chi[b]$ nach Induktionsvoraussetzung, und damit auch $\mathcal{M} \models \psi[b]$ wegen der eben gezeigten Aussage $\psi^{\mathcal{M}}[b] = \chi^{\mathcal{M}}[b]$.

4. *Pfeilentfernung* $\rightarrow^-$: Hier ist $H = (\rightarrow^-, \psi, H_1, H_2)$, wobei $\phi_1 \dots, \phi_n \vdash_{H_1} \chi$ und $\phi_1 \dots, \phi_n \vdash_{H_2} \chi \rightarrow \psi$ mit einer Formel χ . Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir $\mathcal{M} \models \chi[b']$ und $\mathcal{M} \models (\chi \rightarrow \psi)[b']$ für jede Fortsetzung b' der Belegung b mit $\text{freeVar } \chi \subseteq \text{domain}(b')$; man beachte hierbei, dass χ möglicherweise Variablen enthalten könnte, die in b noch nicht belegt werden. Es ist hier nur die erste Zeile der Wahrheitstabelle für Implikationen

$\chi^{\mathcal{M}}[b']$	$\psi^{\mathcal{M}}[b']$	$(\chi \rightarrow \psi)^{\mathcal{M}}[b']$
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr
falsch	falsch	wahr

anwendbar, und wir lesen daraus ab, dass auch $\mathcal{M} \models \psi[b']$ gilt. Weil b' eine Fortsetzung von b mit $(\text{domain}(b') \setminus \text{domain}(b)) \cap \text{freeVar}(\psi) = \emptyset$ ist, folgt hieraus auch $\mathcal{M} \models \psi[b]$.

5. *Pfeileinführung* $\rightarrow^+$: Es sei $H = (\rightarrow^+, \chi \rightarrow \phi, H_1)$ mit $\psi = \chi \rightarrow \phi$ und einer Herleitung H_1 zu $\phi_1, \dots, \phi_n, \chi \vdash_{H_1} \phi$. Wir wissen nach Voraussetzung

$$\text{freeVar}(\{\phi_1, \dots, \phi_n, \chi, \phi\}) \subseteq \text{domain}(b).$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Falls $\chi^{\mathcal{M}}[b] = \text{wahr}$, verwenden wir die Voraussetzung $\phi_j^{\mathcal{M}}[b] = \text{wahr}$ für alle $j = 1, \dots, n$ und die Induktionsvoraussetzung, um $\phi^{\mathcal{M}}[b] = \text{wahr}$ zu schließen. In diesem Fall ist $\psi^{\mathcal{M}}[b] = (\chi \rightarrow \phi)^{\mathcal{M}}[b] = \text{wahr}$.

- Falls $\chi^{\mathcal{M}}[b] = \text{falsch}$, folgt $\psi^{\mathcal{M}}[b] = (\chi \rightarrow \phi)^{\mathcal{M}}[b] = \text{wahr}$ unmittelbar aus der Definition der Gültigkeit von Implikationsformeln.

Damit ist $\mathcal{M} \models \psi[b]$ in beiden Fällen gezeigt.

6. *Allentfernung* $\forall^-$: Es sei $H = (\forall^-, \phi[x/t], t, H_1)$, also $\psi = \phi[x/t]$ mit einer Formel ϕ , einem Term t und einer Herleitung H_1 mit $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash_{H_1} \forall x \phi$. Nach Induktionsvoraussetzung und der Voraussetzung $\mathcal{M} \models \phi_i[b]$ für alle $i = 1, \dots, n$ wissen wir $\mathcal{M} \models \forall x \phi[b]$, also mit der Definition der Gültigkeit von Allformeln $\mathcal{M} \models \phi[b[x/z]]$ für alle $z \in M$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Falls $x \in \text{freeVar}(\phi)$ ist $\text{freeVar}(t) \subseteq \text{freeVar}(\phi[x/t]) = \text{freeVar}(\psi) \subseteq \text{domain}(b)$. In diesem Fall ist $t^{\mathcal{M}}[b]$ definiert, und wir können $z = t^{\mathcal{M}}[b]$ nehmen. Weiter gilt $(\phi[x/t])^{\mathcal{M}}[b] = \phi^{\mathcal{M}}[b[x/t^{\mathcal{M}}[b]]]$, denn es macht keinen Unterschied, ob wir erst x durch t substituieren und dann die freien Variablen mit b belegen, oder gleich die freien Variablen ausser x mit b belegen und zusätzlich x mit der Interpretation von t unter b belegen. Mit $(\forall x \phi)^{\mathcal{M}}[b] = \text{wahr}$ und der Definition der Gültigkeit von Allformeln folgt die Behauptung:

$$\phi[x/t]^{\mathcal{M}}[b] = \phi^{\mathcal{M}}[b[x/t^{\mathcal{M}}[b]]] = \text{wahr}.$$

- Falls $x \notin \text{freeVar}(\phi)$ ist $\phi[x/t] = \phi$. Mit $(\forall x \phi)^{\mathcal{M}}[b] = \text{wahr}$ folgt mit einem beliebigen¹⁴ $z \in M$ ebenfalls die Behauptung:

$$\phi[x/t]^{\mathcal{M}}[b] = \phi^{\mathcal{M}}[b] = \phi^{\mathcal{M}}[b[x/z]] = \text{wahr}.$$

7. *Alleinführung* $\forall^+$: Es sei $\psi = \forall x \phi$ eine Allformel und

$$H = (\forall^+, \forall x \phi, H_1)$$

eine Herleitung zu $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash_H \psi$. Dann gelten $x \notin \text{freeVar}(\{\phi_1, \dots, \phi_n\})$ und $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash_{H_1} \phi$. Für $i = 1, \dots, n$ und $y \in M$ folgt aus der Voraussetzung $\mathcal{M} \models \phi_i[b]$ auch $\mathcal{M} \models \phi_i[b[x/y]]$, weil x in keinem der ϕ_i frei vorkommt. Mit der Induktionsvoraussetzung schließen wir $\mathcal{M} \models \phi[b[x/y]]$ für alle $y \in M$, also $\mathcal{M} \models \forall x \phi[b]$ mit Hilfe der Definition der Gültigkeit von Allformeln.

□

Übung 4.12 Es seien ϕ und ψ zwei geschlossene Formeln in einer Sprache 1. Stufe.

1. *Beweisen Sie:*

$$(\vdash \phi \text{ oder } \vdash \psi) \Rightarrow \vdash \phi \vee \psi.$$

¹⁴Hier brauchen wir, dass das Universum einer Struktur definitionsgemäß nichtleer ist. Würden wir auch leere Strukturen zulassen, so wäre die Allentfernung ungültig: $\emptyset \models \forall x \perp$, aber $\emptyset \not\models \perp$.

2. Widerlegen Sie für geeignete ϕ und ψ mit einem Gegenbeispiel:

$$\vdash \phi \vee \psi \Rightarrow (\vdash \phi \text{ oder } \vdash \psi).$$

Übung 4.13 Widerlegen Sie für eine geeignete Formel ϕ in einer Sprache 1. Stufe mit $\text{freeVar}(\phi) \subseteq \{x, y\}$:

$$\vdash \forall x \exists y \varphi \Rightarrow \vdash \exists x \forall y \varphi$$

Übung 4.14 1. Es seien ϕ und ψ zwei Formeln in einer Sprache 1. Stufe. Beweisen Sie:

$$\exists x \phi \vdash \psi \Rightarrow \vdash \exists x \phi \rightarrow \psi$$

2. Widerlegen Sie für geeignete ϕ und ψ mit einem Gegenbeispiel:

$$\vdash \exists x \phi \rightarrow \psi \Rightarrow \exists x \phi \vdash \psi$$

Termstrukturen. Als Vorbereitung für den Beweis des Gödelschen Vollständigkeitsatzes konstruieren wir nun Strukturen aus syntaktischem Material, genauer gesagt aus geschlossenen Termen, also Termen ohne freie Variablen. Natürlich brauchen wir dafür mindestens ein Konstantensymbol in der Sprache, da es sonst überhaupt keine geschlossenen Terme gibt.

Definition 4.15 (Termstrukturen)

Es sei $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ eine konsistente Theorie 1. Stufe, deren Sprache $\mathcal{S}$ mindestens ein Konstantensymbol enthält. Wir definieren die Termstruktur $\mathcal{H}_{\mathcal{T}} = (H_{\mathcal{T}}, \cdot^{\mathcal{H}_{\mathcal{T}}})$, synonym Herbrandstruktur, zu $\mathcal{T}$ so:

- Das Universum $H_{\mathcal{T}}$ ist die Menge der geschlossenen Terme über $\mathcal{S}$.
- Für jedes n -stellige Funktionssymbol f in $\mathcal{S}$ sei

$$f^{\mathcal{H}_{\mathcal{T}}} : H_{\mathcal{T}}^n \rightarrow H_{\mathcal{T}}, \quad f^{\mathcal{H}_{\mathcal{T}}}(t_1, \dots, t_n) := ft_1 \dots t_n.$$

- Für jedes n -stellige Prädikatensymbol p in $\mathcal{S}$ sei

$$p^{\mathcal{H}_{\mathcal{T}}} : H_{\mathcal{T}}^n \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}, \quad p^{\mathcal{H}_{\mathcal{T}}}(t_1, \dots, t_n) := \begin{cases} \text{wahr,} & \text{falls } \mathcal{A} \vdash^{\mathcal{S}} pt_1 \dots t_n, \\ \text{falsch,} & \text{falls } \mathcal{A} \not\vdash^{\mathcal{S}} pt_1 \dots t_n. \end{cases}$$

Insbesondere ist $\perp^{\mathcal{H}_{\mathcal{T}}} = \text{falsch}$, weil $\mathcal{T}$ konsistent ist.

Die Termstruktur zu $\mathcal{T}$ ist allerdings i.a. noch *kein* Modell zu $\mathcal{T}$, und zwar aus zwei verschiedenen Gründen:

1. Aus $\mathcal{A} \vdash^{\mathcal{S}} \exists x \phi$ mit einer geschlossenen Existenzformel $\exists x \phi$ folgt i.a. keineswegs, dass es einen geschlossenen Term $t \in H_{\mathcal{T}}$ mit $\mathcal{A} \vdash^{\mathcal{S}} \phi[x/t]$ gibt. Selbst im Fall, dass ϕ eine Primformel mit nur einer freien Variablen x ist, ist damit keineswegs $\mathcal{H}_{\mathcal{T}} \models \exists x \phi$ garantiert.

2. Sind ϕ und ψ zwei geschlossene Primformeln mit $\mathcal{A} \vdash \phi \leftrightarrow \neg\psi$, so folgt keineswegs $\mathcal{H}_{\mathcal{T}} \models \phi \leftrightarrow \neg\psi$, weil $\mathcal{A} \vdash \neg\psi$ nicht das Gleiche wie $\mathcal{A} \not\vdash \psi$ ist.

Das erste dieser beiden Probleme wird behoben, wenn wir in $\mathcal{A}$ zu jeder Formel ϕ , die höchstens eine freie Variable x enthält, ein Konstantensymbol $cx\phi$ mit $\mathcal{A} \vdash (\exists x\phi) \rightarrow (\phi[x/cx\phi])$ im Sinne von Lemma 2.43 haben. Das zweite der beiden Probleme tritt nicht auf, wenn $\mathcal{A}$ vollständig ist. Genauer gesagt gilt:

Satz 4.16 (Termstrukturen als Modelle) *Es sei $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ eine konsistente Theorie 1. Stufe, $\mathcal{S}' := \mathcal{S}_{\omega}^{+c}$ die durch iterierte Erweiterung durch Konstantensymbole $cx\phi$ gewonnene Sprache gemäß Definition 2.44, $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \cup \Xi$ mit*

$$\Xi := \{(\exists x\phi) \rightarrow (\phi[x/cx\phi]) : x \text{ ist eine Variable,} \\ \phi \text{ ist eine Formel in } \mathcal{S}' \text{ mit } \text{freeVar}(\phi) \subseteq \{x\}\}$$

die hieraus gemäß Satz 2.45 gewonnene über $\mathcal{S}'$ konsistente Erweiterung des Axiomensystems, und $\mathcal{A}' \supseteq \tilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$ ein über $\mathcal{S}'$ vollständiges, konsistentes, $\vdash$ -abgeschlossenes Axiomensystem nach Satz 3.12. Es sei $\mathcal{H}_{\mathcal{T}'} = (H_{\mathcal{T}'}, \cdot^{\mathcal{H}_{\mathcal{T}'}})$ die Termstruktur zur Theorie $\mathcal{T}' := (\mathcal{S}', \mathcal{A}')$. Dann gilt für jede Formel ϕ in $\mathcal{S}'$, jede Liste $x_1, \dots, x_n$ von verschiedenen Variablen mit $\text{freeVar}(\phi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ und alle geschlossenen Terme $t_1, \dots, t_n \in H_{\mathcal{T}'}$ die folgende Äquivalenz:¹⁵

$$\mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \phi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H}_{\mathcal{T}'} \models \phi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n] \quad (23)$$

Insbesondere ist $\mathcal{H}_{\mathcal{T}'}$ ein Modell der Theorie $\mathcal{T}'$, und seine Einschränkung auf die kleinere Sprache $\mathcal{S}$ ist ein Modell der eingeschränkten Theorie $\mathcal{T}$.

Beweis: Wir beweisen die Äquivalenz (23) durch Induktion über den Aufbau der Formel ϕ . Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass die behauptete Äquivalenz schon für die Teilformeln gelte, aus denen ϕ gebildet ist. Wir kürzen ab: $[x/t] := [x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$, $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\mathcal{T}'}$ und schreiben $\vdash$ für $\vdash^{\mathcal{S}'}$.

1. Als ersten Fall nehmen wir an, dass $\phi = ps_1 \dots s_m$ eine Primformel mit einem m -stelligen Prädikatensymbol und m Termen $s_1, \dots, s_m$ ist. Dann folgt $\bigcup_{j=1}^m \text{freeVar}(s_j) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ nach Voraussetzung, also ist $\phi[x/t]$ eine geschlossene Primformel. Nun ist für $j = 1, \dots, m$

$$s_j^{\mathcal{H}}[x/t] = s_j[x/t]$$

nach Definition der Semantik von Termen in $\mathcal{H}$, und daher

$$\phi^{\mathcal{H}}[x/t] = \phi[x/t]^{\mathcal{H}} = \begin{cases} \text{wahr,} & \text{falls } \mathcal{A}' \vdash \phi[x/t] \\ \text{falsch,} & \text{falls } \mathcal{A}' \not\vdash \phi[x/t] \end{cases}$$

nach der Definition der Gültigkeit von Primformeln in $\mathcal{H}$. Das ist die Äquivalenz (23) in anderer Notation.

¹⁵In der Aussage (23) ist $[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ links als Substitution, also syntaktisch, zu lesen, rechts dagegen als Belegung, also semantisch.

2. Ist $\phi = \psi \rightarrow \chi$ eine Implikation, so gelten nach Induktionsvoraussetzung die beiden folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}' \vdash \psi[x/t] &\Leftrightarrow \mathcal{H} \models \psi[x/t], \\ \mathcal{A}' \vdash \chi[x/t] &\Leftrightarrow \mathcal{H} \models \chi[x/t].\end{aligned}$$

Wir erhalten die folgende Äquivalenzkette:

$$\mathcal{H} \models (\psi \rightarrow \chi)[x/t]$$

ist äquivalent zu

$$\mathcal{H} \models \psi[x/t] \Rightarrow \mathcal{H} \models \chi[x/t]$$

ist äquivalent zu

$$\mathcal{A}' \vdash \psi[x/t] \Rightarrow \mathcal{A}' \vdash \chi[x/t]$$

ist äquivalent zu

$$\mathcal{A}' \not\vdash \psi[x/t] \text{ oder } \mathcal{A}' \vdash \chi[x/t].$$

Wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{A}'$ und der Geschlossenheit von $\psi[x/t]$ ist das äquivalent zu

$$\mathcal{A}' \vdash \neg\psi[x/t] \text{ oder } \mathcal{A}' \vdash \chi[x/t]. \quad (24)$$

Wir zeigen nun, dass dies äquivalent zu

$$\mathcal{A}' \vdash (\psi \rightarrow \chi)[x/t] \quad (25)$$

ist. Zur besseren Lesbarkeit kürzen wir ab: $\psi' := \psi[x/t]$, $\chi' := \chi[x/t]$

- Es gelte (24), also $\mathcal{A}' \vdash \neg\psi'$ oder $\mathcal{A}' \vdash \chi'$.
 - Im Fall $\mathcal{A}' \vdash \neg\psi'$ folgt $\mathcal{A}', \psi' \vdash \perp$ mit einer Pfeilentfernung, also zusammen mit $\vdash \perp \rightarrow \chi'$ und einer Pfeilentfernung $\mathcal{A}', \psi' \vdash \chi'$, also $\mathcal{A}' \vdash \psi' \rightarrow \chi'$ mit einer Pfeileinführung.
 - Im Fall $\mathcal{A}' \vdash \chi'$ folgt ebenfalls $\mathcal{A}' \vdash \psi' \rightarrow \chi'$ mit einer Pfeileinführung.

Damit ist $(24) \Rightarrow (25)$ gezeigt.

- Es gelte (25), also $\mathcal{A}' \vdash \psi' \rightarrow \chi'$. Mit einer Pfeilentfernung schließen wir $\mathcal{A}', \psi' \vdash \chi'$. Wir unterscheiden zwei Fälle:
 - Im Fall $\mathcal{A}' \vdash \chi'$ gilt (24) trivialerweise.
 - Im Fall $\mathcal{A}' \not\vdash \chi'$ gilt $\mathcal{A}' \vdash \neg\chi'$, weil $\mathcal{A}'$ vollständig und χ' geschlossen ist. Zusammen mit $\mathcal{A}', \psi' \vdash \chi'$ folgt $\mathcal{A}', \psi' \vdash \perp$ mit einer Pfeilentfernung, also auch $\mathcal{A}' \vdash \neg\psi'$ mit einer Pfeileinführung. In diesem Fall gilt also auch (24).

Damit ist auch $(25) \Rightarrow (24)$ gezeigt.

Die Äquivalenzkette zusammenfassend ist damit die Behauptung (23) für unsere Implikation $\phi = \psi \rightarrow \chi$ gezeigt:

$$\mathcal{H} \models (\psi \rightarrow \chi)[x/t] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}' \vdash (\psi \rightarrow \chi)[x/t]$$

3. Es sei $\phi = \forall z\psi$ eine Allformel. Zur Vereinfachung der Notation dürfen wir annehmen, dass die Variable z nicht unter den $x_1, \dots, x_n$ auftritt, denn sie tritt ja in ϕ nicht frei, sondern gebunden auf; andernfalls entfernen wir sie aus dieser Liste. Dann ist $\text{freeVar } \psi \subseteq \{x_1, \dots, x_n, z\}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt für alle geschlossenen Terme s in der Sprache $\mathcal{S}'$:

$$\mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \psi[x/t, z/s] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H} \models \psi[x/t, z/s]$$

Mit der Definition der Gültigkeit von Allformeln folgt

$$[\mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \psi[x/t, z/s] \text{ für alle geschlossenen Terme } s \text{ in } \mathcal{S}'] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H} \models \forall z\psi[x/t]$$

Wir kürzen ab: $\psi' := \psi[x/t]$. Zu zeigen ist nun noch:

$$[\mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \psi'[z/s] \text{ für alle geschlossenen Terme } s \text{ in } \mathcal{S}'] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \forall z\psi' \quad (26)$$

- Die Richtung “ $\Leftarrow$ ” in dieser Behauptung folgt unmittelbar mit einer Allentfernung.
- Zur Richtung “ $\Rightarrow$ ”: Nehmen wir $\mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \psi'[z/s]$ für alle geschlossenen Terme s in $\mathcal{S}'$ an. Die Formel ψ' enthält höchstens die Variable z frei. Nehmen wir speziell das Konstantensymbol $s := \mathbf{c}z \neg \psi'$; für es wissen wir $[(\exists z \neg \psi') \rightarrow (\neg \psi'[z/s])] \in \mathcal{A}'$ nach der Definition von $\mathcal{A}'$. Mit zwei Pfeilentfernungen folgt $\mathcal{A}', \exists z \neg \psi', \psi'[z/s] \vdash^{\mathcal{S}'} \perp$, also wegen $\mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \psi'[z/s]$ auch $\mathcal{A}', \exists z \neg \psi' \vdash^{\mathcal{S}'} \perp$. Mit einer Pfeileinführung schließen wir $\mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \neg \exists z \neg \psi'$, was dasselbe wie $\mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \neg \neg \forall z \neg \neg \psi'$ ist. Mit einem indirekten Beweis und einer Pfeilentfernung folgt $\mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \forall z \neg \neg \psi'$ und damit mit einer Allentfernung $\mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \neg \neg \psi'$. Nochmal mit einem indirekten Beweis und einer Pfeilentfernung schließen wir $\mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \psi'$. Weil alle Formeln im Axiomensystem $\mathcal{A}'$ geschlossen sind, tritt darin die Variable z nicht frei auf. Damit folgt mit einer Alleinführung $\mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \forall z\psi'$, wie zu zeigen war.

Damit ist die Behauptung (23) durch Induktion gezeigt.

Für jedes $\phi \in \mathcal{A}'$ schließen wir nun $\mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \phi$ und damit $\mathcal{H}_{\mathcal{T}'} \models \phi$ wegen (23). Also ist $\mathcal{H}_{\mathcal{T}'}$ ein Modell der Theorie $\mathcal{T}' = (\mathcal{S}', \mathcal{A}')$. Es ist also erst recht ein Modell der eingeschränkten Theorie $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$. □

Wir beobachten, dass in diesem Beweis die Vollständigkeit der Theorie $\mathcal{A}'$ bei der Behandlung von Implikationen verwendet wurde, die Realisierung von Existenzformeln mit Konstanten dagegen bei der Behandlung von Allformeln.

Der Gödelsche Vollständigkeitssatz wird damit eine einfache Folgerung des Satzes:

Beweis des Gödelschen Vollständigkeitssatzes, also von “2.⇒1.” in Satz 4.10.

Wir verwenden Kontraposition. Angenommen, es gelte die Aussage 2. und $\phi_1, \dots, \phi_n \not\models^S \psi$. Dann folgt $\phi_1, \dots, \phi_n, \neg\psi \not\models^S \perp$ mit Lemma 2.34 (Konklusion als negierte Annahme). Wir kürzen ab: $\phi_{n+1} := \neg\psi$. Es sei $x_1, \dots, x_m$ eine Aufzählung aller freien Variablen in den ϕ_j , $j = 1, \dots, n+1$, und $\phi'_j := \forall x_1 \dots \forall x_m \phi_j$ der “Allabschluss” aller ϕ_j . Dann folgt mit einer Allentfernung, dass $\mathcal{A} := \{\phi'_1, \dots, \phi'_{n+1}\}$ eine konsistente Menge geschlossener Formeln ist. Es seien die Theorie $\mathcal{T}' = (\mathcal{S}', \mathcal{A}')$ und die Termstruktur $\mathcal{H}_{\mathcal{T}'}$ zu $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ hierzu wie in Satz 4.16 gebildet. Nach dem Satz ist $\mathcal{H}_{\mathcal{T}'}$ ein Modell der Theorie $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$. Insbesondere gilt $\mathcal{H}_{\mathcal{T}'} \models \phi'_j$ für alle $j = 1, \dots, n+1$. Für jede Belegung b mit $\bigcup_{j=1}^{n+1} \text{freeVar } \phi_j \subseteq \text{domain}(b)$ erhalten wir $\mathcal{H}_{\mathcal{T}'} \models \phi_j[b]$ für alle $j = 1, \dots, n+1$. Wegen $\phi_{n+1} = \neg\psi$ schließen wir $\mathcal{H}_{\mathcal{T}'} \models \neg\psi[b]$ und damit $\mathcal{H}_{\mathcal{T}'} \not\models \psi[b]$ im Widerspruch zur Voraussetzung 2. □

Halten wir noch eine andere Formulierung des Gödelschen Vollständigkeitssatzes fest:

Korollar 4.17 (Gödelscher Vollständigkeitssatz – alternative Formulierung)

Zu jeder konsistenten Theorie über einer Sprache 1. Stufe gibt es ein Modell.

Beweis: Diese Aussage ist schon im Satz 4.16 enthalten. □

Übung 4.18 *Es sei $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ eine konsistente Theorie mit einem endlichem Axiomensystem $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ ein Modell besitzt, indem Sie nicht den Satz 4.16 direkt verwenden, sondern nur die Implikation “2.⇒1.” aus Satz 4.10.*

4.3 Anwendungen des Gödelschen Vollständigkeitssatzes

Für die praktische Arbeit in der Mathematischen Logik ist der Gödelsche Vollständigkeitssatz äußerst nützlich: Um Herleitbarkeit in einer Objektsprache zu verifizieren, braucht man nun nicht mehr nur rein syntaktisch zu argumentieren. Vielmehr kann man auch inhaltlich in einem Modell argumentieren, und dabei sich vorübergehend vorstellen, das mathematische Universum der Metasprache sei das Universum in einem Modell. Damit hat man für viele Sätze der mathematischen Logik, die zunächst rein syntaktisch gelesen werden können, zwei verschiedene Strategien für den Beweis zur Verfügung: syntaktisch und semantisch.

Zur Illustration hier eine semantische Lösung von Übungsaufgabe 3.9 1.:

$$\text{ZF} \vdash \forall x \forall y : x \cup y = \bigcup \{x, y\}$$

Beweis in ZF:¹⁶ Gegeben zwei Mengen x, y , existiert die Paarmenge $z := \{x, y\}$ nach dem Paarmengenaxiom, und dessen Vereinigung $v := \bigcup z$ nach dem Vereinigungsaxiom. Wir zeigen nun $v = x \cup y$. In der Tat gilt für alle t die Äquivalenzkette:

¹⁶Mit dem Zusatz “in ZF” soll der *Sprachebenenwechsel* angedeutet werden: Der Beweis wird innerhalb der Theorie ZF, also in der Sprache der Mengenlehre mit den Axiomen von ZF, inhaltlich geführt. Die Theorie ZF wird also in dem Beweis unsere neue Metatheorie.

$$t \in v$$

$\Leftrightarrow$ Es existiert $a \in \{x, y\}$ mit $t \in a$ (aufgrund der Definition von $\bigcup z$)

$\Leftrightarrow t \in x$ oder $t \in y$ (aufgrund der Definition von $\{x, y\}$)

$\Leftrightarrow t \in x \cup y$ (aufgrund der Definition von $x \cup y$)

Die Behauptung $v = x \cup y$ folgt nun aus der Definition der Gleichheit.

□

Semantische Beweise haben oft den Vorteil, dass sie anschaulicher und einfacher aufzuschreiben sind. Syntaktische Beweise haben dagegen oft den Vorteil, dass sie auf der Metaebene konstruktiv, als kombinatorische Manipulation von objektsprachlichen Formeln und damit als eine Grundlage für Algorithmen gelesen werden können.

4.3.1 Definitorische Erweiterungen

Bei der mathematischen Arbeit nimmt man laufend neue Definitionen zur Theorie, in der man arbeitet, hinzu. Beweise dürfen dann nicht nur die Sätze der ursprünglichen Theorie verwenden, sondern auch die Definition. Durch Definitionen wird also nicht nur die Sprache erweitert, sondern man bekommt auch neue “definitorische Axiome”. Mit Definitionen kann man oft die Sprechweise vereinfachen. Jedem arbeitenden Mathematiker ist aber klar (wenn auch manchmal nur unbewusst), dass man mit Definitionen keine zusätzlichen Sätze der ursprünglichen Theorie beweisen kann. Dieses Phänomen können wir nun präzise beschreiben und beweisen:

Definition 4.19 (Definitorische Erweiterungen) *Es seien $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ eine Theorie 1. Stufe und ϕ eine Formel in der Sprache $\mathcal{S}$.*

1. **Definierte Funktionssymbole:** *Es sei $y, x_1, \dots, x_n$ eine Aufzählung (mindestens) aller freien Variablen in ϕ . Weiter sei f ein neues, nicht in $\mathcal{S}$ vorkommendes n -stelliges Funktionssymbol, und $\mathcal{S}'$ die um f erweiterte Sprache $\mathcal{S}$. Es sei*

$$\psi := \forall x_1 \dots \forall x_n (\exists y \phi) \rightarrow (\phi[y/fx_1 \dots x_n]) \quad (27)$$

und $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cup \{\psi\}$. Die Theorie $\mathcal{T}' = (\mathcal{S}', \mathcal{A}')$ wird eine definitorische Erweiterung von $\mathcal{T}$ mit dem Funktionssymbol f genannt.

2. **Definierte Prädikatensymbole:** *Es sei $x_1, \dots, x_n$ eine Aufzählung (mindestens) aller freien Variablen in ϕ . Weiter sei p ein neues, nicht in $\mathcal{S}$ vorkommendes n -stelliges Prädikatensymbol, und $\mathcal{S}'$ die um p erweiterte Sprache $\mathcal{S}$. Es sei*

$$\psi := \forall x_1 \dots \forall x_n \phi \leftrightarrow px_1 \dots x_n \quad (28)$$

und $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cup \{\psi\}$. Die Theorie $\mathcal{T}' = (\mathcal{S}', \mathcal{A}')$ wird eine definitorische Erweiterung von $\mathcal{T}$ mit dem Prädikatensymbol p genannt.

In beiden Fällen wird die Formel ψ das “definitorische Axiom” der Erweiterung genannt.

Eigentlich haben wir mit den Abkürzungsregeln schon mehrfach von solchen definitorischen Erweiterungen Gebrauch gemacht.

Die Erweiterung der Sprache mit Konstantensymbolen, die wir in Abschnitt 2.7 besprochen haben, ist das Gleiche wie eine definitorische Erweiterung mit 0-stelligen Funktionssymbolen.

Satz 4.20 (Definitionen liefern keine neuen Sätze)¹⁷ *Ist $(\mathcal{S}', \mathcal{A}')$ eine definitorische Erweiterung einer Theorie $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$, so gilt für alle Formeln χ in der Ausgangssprache $\mathcal{S}$:*

$$\mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \chi \Leftrightarrow \mathcal{A} \vdash^{\mathcal{S}} \chi.$$

Insbesondere ist $(\mathcal{S}', \mathcal{A}')$ genau dann konsistent, wenn $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$ konsistent ist.

Beweis: Die Implikation $\mathcal{A} \vdash^{\mathcal{S}} \chi \Rightarrow \mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \chi$ folgt unmittelbar aus $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$, weil jede Herleitung H über $\mathcal{S}$ auch eine Herleitung über der erweiterten Sprache $\mathcal{S}'$ ist.

Die umgekehrte Implikation $\mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \chi \Rightarrow \mathcal{A} \vdash^{\mathcal{S}} \chi$ beweisen wir so: Wir betrachten den “Allabschluss” $\chi' := \forall z_1 \dots \forall z_m \chi$, wobei $\text{freeVar}(\chi) = \{z_1, \dots, z_m\}$. Wir zeigen unten

$$\mathcal{A}' \cup \{\neg \chi'\} \vdash^{\mathcal{S}'} \perp \Rightarrow \mathcal{A} \cup \{\neg \chi'\} \vdash^{\mathcal{S}} \perp. \quad (29)$$

Nehmen für den Moment an, dass dies gilt. Dann folgt aus der Annahme $\mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \chi$ zunächst $\mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \chi'$ mit Alleinführung, und dann $\mathcal{A}' \cup \{\neg \chi'\} \vdash^{\mathcal{S}'} \perp$ mit einer Pfeilentfernung. Mit (29) schließen wir $\mathcal{A} \cup \{\neg \chi'\} \vdash^{\mathcal{S}} \perp$, also, indem wir die negierte Annahme zur Konklusion machen, $\mathcal{A} \vdash^{\mathcal{S}} \chi'$. Es folgt $\mathcal{A} \vdash^{\mathcal{S}} \chi$ mittels Allentfernung. Die verbleibende Behauptung (29) zeigen wir durch (Meta-)Kontraposition: Angenommen, $\mathcal{A} \cup \{\neg \chi'\} \not\vdash^{\mathcal{S}} \perp$. Anders gesagt nehmen wir an, dass die Theorie $\mathcal{T}'' := (\mathcal{S}, \mathcal{A} \cup \{\neg \chi'\})$ konsistent sei. Sei ψ das definitorische Axiom der definitorischen Erweiterung $\mathcal{A}'$, also $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{\psi\}$. Im Rest des Beweises betrachten wir definitorische Erweiterungen um Funktionssymbole und um Prädikatensymbole getrennt:

1. Betrachten wir zuerst den Fall, dass $(\mathcal{S}', \mathcal{A}')$ eine definitorische Erweiterung zu einer Formel ϕ mit $\text{freeVar}(\phi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ mit einem n -stelligen *Prädikatensymbol* p ist. Das zugehörige definitorische Axiom ψ wird also durch (28) gegeben. Weil $\mathcal{T}''$ nach unserer Annahme konsistent ist, liefert der Gödelsche Vollständigkeitssatz ein Modell $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$ von $\mathcal{T}''$. Wir erweitern dieses Modell zu einer Struktur $\mathcal{M}' = (M, \cdot^{\mathcal{M}'})$ über $\mathcal{S}'$, indem wir dem Prädikatensymbol p die folgende Interpretation geben:

$$p^{\mathcal{M}'} := \{(y_1, \dots, y_n) \in M^n : \mathcal{M} \models \phi[x_1/y_1, \dots, x_n/y_n]\} \subseteq M^n$$

¹⁷Obwohl definitorische Erweiterungen mit Funktionssymbolen formal so ähnlich wie das Auswahlaxiom aussehen, hat dieser Satz nichts mit dem Auswahlaxiom zu tun: Es wird nicht die Existenz einer Auswahlfunktion f als *Objekt* im *Universum* garantiert, sondern nur ein neues *Funktionssymbol* eingeführt. Ein mögliches Missverständnis, man könne mit definitorischen Erweiterungen durch Funktionssymbole das Auswahlaxiom beweisen, beruht also auf einer unzulässigen Vermischung von Objekt- und Metasprache und von verschiedenen Typen.

Dann gilt das definitorische Axiom ψ in $\mathcal{M}'$, weil für alle $y_1, \dots, y_n \in M$ gilt:

$$\mathcal{M}' \models (\phi \leftrightarrow px_1 \dots x_n)[x_1/y_1, \dots, x_n/y_n].$$

Anders gesagt: $\mathcal{M}'$ ein Modell von $\mathcal{A} \cup \{\neg\chi', \psi\}$ über der Sprache $\mathcal{S}'$. Aus dem Korrektheitssatz folgt $\mathcal{A}' \cup \{\neg\chi'\} \not\models^{\mathcal{S}'} \perp$, wie zu zeigen war.

2. Wir betrachten nun den Fall, dass $(\mathcal{S}', \mathcal{A}')$ eine definitorische Erweiterung zu einer Formel ϕ mit $\text{freeVar}(\phi) \subseteq \{y, x_1, \dots, x_n\}$ mit einem n -stelligen *Funktionssymbol* f ist. Das definitorische Axiom ψ wird also durch (27) gegeben.

Wir betrachten eine vervollständigte Erweiterung um Konstantensymbole wie in Satz 4.16 (Termstrukturen als Modelle) dazu, sowie die Termstruktur $\mathcal{H} = (H, \cdot^{\mathcal{H}})$ davon. Insbesondere ist $\mathcal{H}$ auch ein Modell von $\mathcal{T}''$. Wir erweitern $\mathcal{H}$ zu einer Struktur $\mathcal{H}' = (H, \cdot^{\mathcal{H}'})$ über der um das Funktionssymbol f erweiterten Sprache mittels der folgenden Interpretation:

$$f^{\mathcal{H}'} : H^n \rightarrow H, \quad f^{\mathcal{H}'}(t_1, \dots, t_n) := \mathbf{cy}\phi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$$

Man beachte, dass hierbei $t_1, \dots, t_n$ Elemente von H , also geschlossene Terme sind, so dass $\text{freeVar}(\phi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]) \subseteq \{y\}$ folgt. Außerdem bezeichnet

$$\mathbf{cy}\phi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$$

das Konstantensymbol, das zur Formel $\phi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ mit der Erweiterung der Sprache um Konstantensymbole bei der Definition von $\mathcal{H}$ hinzugefügt wurde. Insbesondere gilt

$$\mathcal{H} \models (\exists y \phi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]) \rightarrow (\phi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/\mathbf{cy}\phi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]]),$$

anders geschrieben¹⁸

$$\mathcal{H} \models ((\exists y \phi) \rightarrow \phi)[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/f^{\mathcal{H}'}(t_1, \dots, t_n)],$$

wobei man hierin die eckige Klammer sowohl als Substitution als auch als Belegung lesen kann. Es folgt

$$\mathcal{H}' \models ((\exists y \phi) \rightarrow (\phi[y/fx_1 \dots x_n]))[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n].$$

Weil das für alle $t_1, \dots, t_n \in H$ gilt, schließen wir

$$\mathcal{H}' \models \forall x_1 \dots \forall x_n (\exists y \phi) \rightarrow (\phi[y/fx_1 \dots x_n]),$$

¹⁸Man beachte, dass die Auftreten von y in der Existenzformel gebunden sind, also von der darauffolgenden Belegung nicht betroffen werden.

was dasselbe wie $\mathcal{H}' \models \psi$ ist. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{H}'$ ein Modell von $\mathcal{A}' \cup \{\neg\chi'\} = \mathcal{A} \cup \{\neg\chi', \psi\}$ ist. Es folgt $\mathcal{A}' \cup \{\neg\chi'\} \not\models^{S'} \perp$ nach dem Korrektheitsatz, was zu zeigen war.¹⁹

□

Definitorische Erweiterungen sind also *konservativ* im Sinne der folgenden Definition:

Definition 4.21 (konservative Erweiterung) *Es seien $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ eine Theorie 1. Stufe, $\mathcal{S}'$ eine Erweiterung der Sprache $\mathcal{S}$ mit neuen Funktions- oder Prädikatensymbolen, und $\mathcal{A}'$ eine Menge geschlossener Formeln in der erweiterten Sprache $\mathcal{S}'$. Die Theorie $\mathcal{T}' = (\mathcal{S}', \mathcal{A}')$ heißt eine konservative Erweiterung von $\mathcal{T}$, wenn für alle geschlossenen Formeln ϕ in der Ausgangssprache $\mathcal{S}$ gilt:*

$$\mathcal{A}' \vdash^{\mathcal{S}'} \phi \Leftrightarrow \mathcal{A} \vdash^{\mathcal{S}} \phi.$$

Übung 4.22 *Geben Sie einen alternativen Beweis des Satzes 4.20 “Definitionen liefern keine neuen Sätze” im Fall einer definitorischen Erweiterung mit einem Funktionssymbol f , bei dem Sie den Gödelschen Vollständigkeitssatz statt des Satzes 4.16 “Termstrukturen als Modelle” verwenden. Arbeiten Sie also mit einem beliebigen Modell statt mit einer Termstruktur. Verwenden Sie dabei das Auswahlaxiom der Metasprache zur Auswahl einer Interpretation des neuen Funktionssymbols f .*

Übung 4.23 *Beweisen Sie, dass man auch mit iterierten definitorischen Erweiterungen einer Theorie mit möglicherweise unendlich vielen neuen Funktions- und Prädikatensymbolen und den zugehörigen definitorischen Axiomen keine zusätzlichen Formeln der Ausgangstheorie herleiten kann.*

Übung 4.24 *Denken Sie über Strategien nach, mit denen Satz 4.20 rein syntaktisch-konstruktiv bewiesen werden könnte, also über Algorithmen, aus einer Herleitung H' mit $\mathcal{A}' \vdash_{H'}^{\mathcal{S}'} \phi$ eine Herleitung H mit $\mathcal{A} \vdash_H^{\mathcal{S}} \phi$ zu gewinnen. Es ist damit nicht gemeint, dass Sie so ein Verfahren explizit angeben sollten.*

¹⁹Der Beweis wird im Fall einer Erweiterungen mit einem Funktionssymbol mit einem speziellen Modell, nämlich einer Termstruktur, geführt, während bei einer Erweiterung mit einem Prädikatensymbol mit einem beliebigen Modell gearbeitet wurde. Wenn wir auch im ersten Fall mit einem beliebigen Modell gearbeitet hätten, hätten wir das Auswahlaxiom in der Metasprache einsetzen müssen, um dem definierten Funktionssymbol eine Interpretation zu geben, siehe Übung 4.22, während das bei dem Termstrukturmodell nicht nötig ist. Der Beweis wurde so geführt, um zu illustrieren, dass definitorische Erweiterungen mit Funktionssymbolen (wenigstens im Fall einer abzählbaren Sprache) nichts mit dem Auswahlaxiom zu tun haben, weder auf Objektebene, noch auf Metaebene.

Beispiele. Bisher waren das Inklusionszeichen “ $\subseteq$ ” und das Gleichheitszeichen “ $=$ ” mit Abkürzungsregeln zur Sprache der Mengenlehre hinzugenommen worden. Wir können sie nun als definitorische Erweiterungen mit zwei zweistelligen Prädikatensymbolen auffassen, mit den definitorischen Axiomen

$$\begin{aligned}\forall x_1 \forall x_2 : x_1 \subseteq x_2 &\leftrightarrow \forall z : z \in x_1 \rightarrow z \in x_2, \\ \forall x_1 \forall x_2 : x_1 = x_2 &\leftrightarrow \forall z : z \in x_1 \leftrightarrow z \in x_2.\end{aligned}$$

Auch manche Klassenterme können wir nun als definitorische Erweiterungen der Sprache auffassen: Wir erweitern die Sprache der Mengenlehre definitorisch um die Funktionszeichen $\emptyset$ (0-stellig), $\{\cdot, \cdot\}$ (2-stellig), $\bigcup$ (1-stellig) und $\mathfrak{P}$ (1-stellig) mit den definitorischen Axiomen

$$\begin{aligned}(\exists y \forall z : z \notin y) &\rightarrow \forall z : z \notin \emptyset, \\ \forall x_1 \forall x_2 (\exists y \forall z : z \in y &\leftrightarrow z = x_1 \vee z = x_2) \rightarrow \forall z : z \in \{x_1, x_2\} \leftrightarrow z = x_1 \vee z = x_2, \\ \forall x (\exists y \forall z : z \in y &\leftrightarrow \exists u : z \in u \wedge u \in x) \rightarrow \forall z : z \in \bigcup x \leftrightarrow \exists u : z \in u \wedge u \in \bigcup x, \\ \forall x (\exists y \forall z : z \in y &\leftrightarrow z \subseteq x) \rightarrow \forall z : z \in \mathfrak{P}(x) \leftrightarrow z \subseteq x.\end{aligned}$$

Die ZF-Axiome NULL, PAIR, UNION und POWER garantieren jeweils die Prämisse in diesen definitorischen Axiomen.

Ebenso kann man das Symbol ω für die Menge der natürlichen Zahlen definitorisch einführen; wir verzichten auf die Darstellung, weil in der Definition von ω schon andere definierte Symbole und Klassenterme vorkommen.

Übung 4.25 Schreiben Sie ein definitorisches Axiom für das Nachfolgerfunktionszeichen $N(x) := x \cup \{x\}$ in der Mengenlehre auf. Ist die Prämisse dieses definitorischen Axioms in ZF herleitbar?

Allerdings ist es nicht sinnvoll, *alle* Klassenterme mittels definitorischer Erweiterungen zur Sprache hinzuzunehmen. Zum Beispiel wäre ein definitorisches Axiom

$$(\exists y \forall z : z \in y \leftrightarrow \top) \rightarrow \forall z : z \in V \leftrightarrow \top$$

für das Mengenuniversum V zur Erweiterung von ZF ziemlich nutzlos, weil das Gegenteil seiner Prämisse in ZF herleitbar ist:

$$\text{ZF} \vdash \neg \exists y \forall z : z \in y \leftrightarrow \top.$$

Allgemeinen Klassentermen können wir also allein mit definitorischen Erweiterungen keine sinnvolle Semantik geben. Klassenterme entsprechen ja eher *Aussagen über Mengen* als Mengen. Klassenterme sind also gewissermaßen Modellierungselemente einer prädikatenlogischen Sprache 2. Stufe, die in einem Modell von ZF, einer Theorie 1. Stufe, manchmal nicht durch Objekte im Universum wiedergegeben werden können. Im nächsten Abschnitt besprechen wir eine Lösung dieses Problems.

Übung 4.26 (Skolemisierung) Es sei ϕ eine Formel in pränexer Normalform in einer Sprache $\mathcal{S}$ 1. Stufe. Wir definieren die Skolemisierung ϕ^{Sk} von ϕ rekursiv so:

- Ist ϕ quantorenfrei, so setzen wir $\phi^{\text{Sk}} := \phi$.
- Ist $\phi = \forall x\psi$, so setzen wir $\phi^{\text{Sk}} := \forall x(\psi^{\text{Sk}})$
- Ist $\phi = \exists y\psi$ und $x_1, \dots, x_n$ die Liste der in ψ^{Sk} freien Variablen außer y (in irgendeiner fixierten Anordnung), so wählen wir ein neues n -stelliges Funktionssymbol f , das nicht in der Sprache $\mathcal{S}$ vorkommt, und setzen $\phi^{\text{Sk}} := \psi^{\text{Sk}}[y/fx_1 \dots x_n]$.

1. Zeigen Sie für jede Formel χ über $\mathcal{S}$:

$$\phi \vdash \chi \quad \Leftrightarrow \quad \phi^{\text{Sk}} \vdash \chi$$

2. Es sei $\mathcal{S}$ die um das Gleichheitszeichen erweiterte Sprache der Mengenlehre. Bilden Sie die Skolemisierung PAIR^{Sk} des Paarmengenaxioms

$$\text{PAIR} := \forall x_1 \forall x_2 \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z = x_1 \vee z = x_2)$$

4.3.2 Klassen in der Mengenlehre

In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass das Axiomensystem ZF konsistent ist, also nach dem Gödelschen Vollständigkeitssatz ein Modell besitzt. Fixieren wir für den Moment so ein ZF-Modell $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$ mit einem “Mengenuniversum” M . Indem wir wenn nötig zu einer Quotientenstruktur übergehen, dürfen wir annehmen, dass darin das durch definitorische Erweiterung hinzugefügte Gleichheitszeichen als Gleichheit interpretiert wird: $=^{\mathcal{M}} = \{(x, x) : x \in M\}$.

Das Klassenuniversum. Wir wollen nun auch *allen* Klassentermen eine Semantik geben, nicht nur solchen, die Mengen entsprechen: Klassenterme bekommen “*Klassen*” als Interpretation. Nachdem es sich um ein Konstrukt handelt, das eher schon zu einer Sprache 2. Stufe gehört, suchen wir eine Interpretation innerhalb der Potenzmenge²⁰ $\mathfrak{P}(M)$ des Universums M . Wir definieren das zugehörige “*Klassenuniversum*” so:

$$\begin{aligned} \widehat{M} := & \{A \in \mathfrak{P}(M) : \text{Es existieren eine Formel } \phi, \\ & \text{verschiedene Variablen } x, y_1, \dots, y_n \text{ mit } \text{freeVar}(\phi) \subseteq \{x, y_1, \dots, y_n\} \\ & \text{und } u_1, \dots, u_n \in M \text{ mit } A = \{z \in M : \mathcal{M} \models \phi[x/z, y_1/u_1, \dots, y_n/u_n]\}\} \end{aligned}$$

sowie die folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \iota : M & \rightarrow \widehat{M} \\ u & \mapsto \{z \in M : z \in^{\mathcal{M}} u\} = \{z \in M : \mathcal{M} \models (x \in y)[x/z, y/u]\}. \end{aligned}$$

²⁰Hier ist die Potenzmenge in der *Metasprache* gemeint.

Weil das mittels $\in$ definierte Gleichheitszeichen in $\mathcal{M}$ als Gleichheit interpretiert wird, wissen wir für alle $u_1, u_2 \in M$ die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models (\forall x : x \in y_1 \leftrightarrow x \in y_2)[y_1/u_1, y_2/u_2] \\ &\Leftrightarrow (\text{Für alle } z \in M \text{ gilt: } z \in^{\mathcal{M}} u_1 \Leftrightarrow z \in^{\mathcal{M}} u_2) \\ &\Leftrightarrow \iota(u_1) = \iota(u_2), \end{aligned}$$

also ist $\iota : M \rightarrow \widehat{M}$ injektiv. Das “Universum 1. Stufe” oder “Mengenuniversum” M wird also mittels ι in das “Universum 2. Stufe” $\widehat{M}$ oder “Klassenuniversum” eingebettet.

Wir definieren zudem die folgende Interpretation des $\in$ -Symbols als zweistellige Relation $\in^{\widehat{\mathcal{M}}} \subseteq \widehat{M}^2$: Für $a, b \in \widehat{M}$ sei

$$a \in^{\widehat{\mathcal{M}}} b \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Es existiert } z \in b \text{ mit } \iota(z) = a.$$

Damit wird $(\widehat{M}, \in^{\widehat{\mathcal{M}}})$ eine Struktur zur Sprache der Mengenlehre. Für alle $z, u \in M$ gilt die Äquivalenzkette

$$z \in^{\mathcal{M}} u \quad \Leftrightarrow \quad z \in \iota(u) \quad \Leftrightarrow \quad \iota(z) \in^{\widehat{\mathcal{M}}} \iota(u),$$

so dass ι eine *Einbettung* von $\mathcal{M}$ in $(\widehat{M}, \in^{\widehat{\mathcal{M}}})$ im Sinne der folgenden Definition ist:

Definition 4.27 (Einbettung) *Es seien $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$ und $\mathcal{N} = (N, \cdot^{\mathcal{N}})$ zwei Strukturen über der gleichen Sprache $\mathcal{S}$ 1. Stufe. Eine Einbettung von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$ ist ein injektiver schwacher Homomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$.*

Die Elemente von $\widehat{\mathcal{M}}$ nennen wir *Klassen*; die Elemente von $\iota[M]$ *Mengen*. Klassen, die keine Mengen sind, nennt man *echte Klassen*.

Nun erweitern wir die Sprache $\mathcal{S}$ der Mengenlehre um Klassenterme $\{x : \phi\}$ für jede Formel ϕ in $\mathcal{S}$ und Variable x ; sie werden nun wirklich als Terme und nicht mehr nur als mit Ersetzungsregeln zu entfernende Symbole aufgefasst.

Strenggenommen ist das so gemeint: Gegeben eine Formel ϕ in $\mathcal{S}$ und eine Variable x , betrachten wir die Auflistung $y_1, \dots, y_n$ der Variablen in $\text{freeVar}(\phi) \setminus \{x\}$ bezüglich einer beliebigen, vorher festgelegten Ordnung der Variablen. Wir fügen ein neues n -stelliges Funktionssymbol $f_{\phi, x}$ zur Sprache der Mengenlehre hinzu. Dann steht der Klassenterm $\{x : \phi\}$ für den Term $f_{\phi, x}y_1 \dots y_n$ in der so erweiterten Sprache; insbesondere enthält $\{x : \phi\}$ genau die Variablen $y_1, \dots, y_n$ frei. Die so erweiterte Sprache bezeichnen wir mit $\widehat{\mathcal{S}}$.

Klassen als Interpretation von Klassentermen. Wir skizzieren nun die Interpretation von Klassentermen in dieser erweiterten Sprache. Mit den Bezeichnungen von eben

interpretieren wir Klassenterme zunächst mit Belegungen $b = [y_1/\iota(u_1), \dots, y_n/\iota(u_n)]$ mit Werten in $\iota[M]$, also mit *Mengen*, (wobei $u_1, \dots, u_n \in M$) so:

$$\{x : \phi\}^{\widehat{\mathcal{M}}}[b] := \{z \in M : \mathcal{M} \models \phi[x/z, y_1/u_1, \dots, y_n/u_n]\}$$

Nach der Definition des Klassenuniversums $\widehat{M}$ besteht also $\widehat{M}$ genau aus diesen Interpretationen $\{x : \phi\}^{\widehat{\mathcal{M}}}[b]$ von Klassentermen mit $\iota[M]$ -wertigen Belegungen.

Zum Beispiel bekommt die Allklasse $V = \{x : \top\}$ hiermit das Mengenuniversum M als Interpretation:

$$V^{\widehat{\mathcal{M}}} = M \in \widehat{M}$$

Schließlich interpretieren wir Klassenterme $\{x : \phi\}$ auch mit allgemeinen klassenwertigen Belegungen

$$\tilde{b} = [y_1/(\{x_1 : \psi_1\}^{\widehat{\mathcal{M}}}[\iota \circ b_1]), \dots, y_n/(\{x_n : \psi_n\}^{\widehat{\mathcal{M}}}[\iota \circ b_n])],$$

wobei jedes b_j eine Belegung der Variablen $\text{freeVar}(\{x_j : \psi_j\})$ mit Werten in M ist. Indem wir wenn nötig die Variablen umbenennen, dürfen o.B.d.A. annehmen, dass die Definitionsbereiche der Belegungen $b_1, \dots, b_n$ paarweise disjunkt sind, so dass $b := b_1 \cup \dots \cup b_n$ ebenfalls eine wohldefinierte Belegung mit Werten in M ist. Es sei χ die Formel in der Sprache der Mengenlehre $\mathcal{S}$, die aus der substituierten Formel $\phi[y_1/\{x_1 : \psi_1\}, \dots, y_n/\{x_n : \psi_n\}]$ durch Entfernung aller Klassenterme mit den Ersetzungsregeln 2.19 entsteht.²¹ Wir setzen dann

$$\{x : \phi\}^{\widehat{\mathcal{M}}}[\tilde{b}] := \{x : \chi\}^{\widehat{\mathcal{M}}}[b].$$

Diese Definition hängt nicht von der Auswahl der Klassenterme $\{x_j : \psi_j\}$ und der Belegung b_j ab, sondern nur von den Werten $\{x_j : \psi_j\}^{\widehat{\mathcal{M}}}[b_j] \in \widehat{M}$, also nur von der Belegung $\tilde{b}$.

Für mengenwertige Belegungen stimmt diese erweiterte Definition der Interpretation von Klassentermen mit der vorhergehenden überein.

Mit diesen Interpretationen wird $\widehat{\mathcal{M}} = (\widehat{M}, \cdot^{\widehat{\mathcal{M}}})$ eine Struktur der um Klassenterme erweiterten Sprache $\widehat{\mathcal{S}}$.

²¹Man beachte, dass bei der Interpretation des Klassenterms $\{x : \phi\}$ die Formel ϕ in $\mathcal{M}$, also im *Mengenuniversum*, interpretiert wird, nicht in $\widehat{\mathcal{M}}$. Insbesondere beziehen sich bei dieser Interpretation die Allquantoren auf den Bereich der *Mengen*, nicht auf Klassen; andernfalls wäre im Allgemeinen keine Interpretation in $\widehat{M}$ möglich. Aus diesem Grund können die Ersetzungsregeln 2.19 bei der Umformung von ϕ zu χ unter Belegung der freien Variablen mit Klassen unverändert verwendet werden. Weil ϕ eine Formel in der Sprache der Mengenlehre ist, enthält sie keine Klassenterme.

Beispiel: Unter der Belegung von y durch $V^{\widehat{\mathcal{M}}}$ bekommt $\{x : x = y\}$ die Interpretation

$\{x : x = y\}^{\widehat{\mathcal{M}}}[y/V^{\widehat{\mathcal{M}}}] = \emptyset$, und $\{x : x \in y\}$ die Interpretation $\{x : x \in y\}^{\widehat{\mathcal{M}}}[y/V^{\widehat{\mathcal{M}}}] = M$.

Verallgemeinerte Klassenterme $\{x : \phi\}$, bei denen auch ϕ selbst Klassenterme enthält, kommen eigentlich zunächst in der erweiterten Sprache $\widehat{\mathcal{S}}$ nicht vor. Verwendet man sie dennoch, ist bei ihnen genau wie früher erst ϕ mit den Ersetzungsregeln 2.19 umzuformen. Gleichwertig damit ist: $\{x : \phi\}^{\widehat{\mathcal{M}}}[b] = \{z \in M : \widehat{\mathcal{M}} \models \phi^V[b[x/\iota(z)]]\}$; hier wird ϕ also auf die Allklasse relativiert.

Relativierungen. Relativierungen von Formeln sind Einschränkungen von Formeln, die man erhält, indem man alle Allquantoren auf einen bestimmten Bereich einschränkt. Genauer definieren wir

Definition 4.28 (Relativierungen) Für jede Formel ϕ in einer Sprache 1. Stufe und jedes 1-stellige Prädikatensymbol π definieren wir die π -Relativierung ϕ^π von ϕ so:

1. Ist ϕ eine Primformel, so sei $\phi^\pi = \phi$.
2. Ist $\phi = \psi \rightarrow \chi$ eine Implikation, so sei $\phi^\pi := \psi^\pi \rightarrow \chi^\pi$.
3. Ist $\phi := \forall x \psi$ eine Allformel, so sei $\phi^\pi := \forall x \pi x \rightarrow \psi^\pi$.

Das bedeutet, dass alle Allquantoren in ϕ auf den durch π gegebenen Bereich beschränkt werden.

Etwas allgemeiner definieren wir für jede Formel π und jede Variable y die Relativierung $\phi^{\pi,y}$ einer Formel ϕ so:

1. Ist ϕ eine Primformel, so sei $\phi^{\pi,y} = \phi$.
2. Ist $\phi = \psi \rightarrow \chi$ eine Implikation, so sei $\phi^{\pi,y} := \psi^{\pi,y} \rightarrow \chi^{\pi,y}$.
3. Ist $\phi := \forall x \psi$ eine Allformel, so sei $\phi^{\pi,y} := \forall x \pi[y/x] \rightarrow \psi^{\pi,y}$. Dabei muss die Variable x verschieden von y und allen freien Variablen in π sein, andernfalls muss die Allformel erst gebunden umbenannt werden.

Diese rein syntaktische Definition hat zunächst nichts mit Mengenlehre zu tun, sondern funktioniert über jeder Sprache 1. Stufe. Im gegenwärtigen Kontext brauchen wir sie aber in der Sprache $\mathcal{S}$ der Mengenlehre zur Relativierung auf einen Klassenterm K , insbesondere auf den Allklassenterm $V = \{y : \top\}$. Hier steht ϕ^K für $\phi^{x \in K, x}$, wobei x eine “neue”, nicht in K frei auftretende Variable bezeichnet. Insbesondere wird ϕ^V als die Relativierung von ϕ auf das Mengenuniversum interpretiert.

Die Aussage, dass $\iota : \mathcal{M} \rightarrow (\widehat{M}, \in^{\widehat{M}})$ eine Einbettung ist, können wir damit auch so formulieren:

Satz 4.29 (Einbettung des Mengenuniversums ins Klassenuniversum) Für jede Formel ϕ in der Sprache $\mathcal{S}$ der Mengenlehre und jede Belegung $b : \text{freeVar}(\phi) \rightarrow M$ ihrer freien Variablen mit Werten im Mengenuniversum gilt:

$$\mathcal{M} \models \phi[b] \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\mathcal{M}} \models \phi^V[\iota \circ b]$$

Übung 4.30 Zeigen Sie: $\widehat{\mathcal{M}} \models \forall x \forall y x \in V \rightarrow x \cap y \in V$.

Übung 4.31 Zeigen Sie: $\widehat{\mathcal{M}} \models \forall x x \in V \leftrightarrow \exists y x \in y$. Die Allklasse V ist also schon innerhalb der Sprache $\mathcal{S}$ der Mengenlehre definierbar.

Übung 4.32 Wir nehmen für diese Aufgabe $\text{ZF} \not\vdash \perp$ an. Es sei $\mathcal{A}$ die Menge aller geschlossenen Formeln ψ in der Sprache $\mathcal{S}$ der Mengenlehre mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes ZF-Modell $\mathcal{M}$ und die zugehörige Erweiterung $\widehat{\mathcal{M}}$ gilt $\widehat{\mathcal{M}} \models \psi$. Zeigen Sie für jede geschlossene Formel ϕ in der Sprache $\mathcal{S}$ der Mengenlehre:

$$\text{ZF} \vdash \phi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \vdash \phi^V$$

Dabei sei die Allklasse V wie in Übung 4.31 definitorisch zur Sprache $\mathcal{S}$ hinzugenommen.

Man kann das System $\mathcal{A}$ aus dieser Übungsaufgabe auch rein syntaktisch als die Menge der Theoreme über einem explizit bekannten Axiomensystem darstellen, der von Neumann-Bernays-Gödelschen Mengenlehre NBG. In dieser Vorlesung wird das nicht genauer ausgeführt.

4.3.3 Der Satz von Löwenheim-Skolem und der Kompaktheitssatz

Wir halten eine wichtige Folgerung des Satzes 4.16 (Termstrukturen als Modelle) im Fall von abzählbaren Sprachen fest:

Satz 4.33 (Satz von Löwenheim-Skolem) Es sei $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ eine Theorie über einer abzählbaren Sprache 1. Stufe. Wenn $\mathcal{T}$ ein Modell besitzt, so besitzt $\mathcal{T}$ auch ein abzählbares Modell $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$, d.h. ein Modell mit abzählbarem Universum M .

Beweis: Angenommen, $\mathcal{T}$ besitzt ein Modell. Dann ist diese Theorie nach dem Korrektheitssatz konsistent. Weil die Sprache $\mathcal{S}$ abzählbar ist, bleibt auch die Sprache $\mathcal{S}_\omega^{+c}$ aus Satz (2.45), die aus $\mathcal{S}$ durch iterierte Hinzunahme neuer Konstantensymbole $c_{x\phi}$ zu geschlossenen Existenzformeln $\exists x\phi$ entsteht, abzählbar. Insbesondere hat sie nur abzählbar viele geschlossene Terme. Das Termstrukturmodell $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ zu $\mathcal{T}$ aus Satz 4.16 besitzt also ein abzählbares Universum $H_{\mathcal{T}}$. □

Beispiel: Abzählbare Modelle der Mengenlehre. Die Sprache der Mengenlehre $\mathcal{S}$ ist abzählbar, denn sie besitzt ja kein Funktionssymbol und nur die beiden Prädikatensymbole $\perp$ und $\in$. Also besitzt jede konsistente Theorie $\mathcal{T}$ über $\mathcal{S}$ ein abzählbares Modell. Insbesondere besitzt ZF ein abzählbares Modell, falls ZF konsistent ist.

Dies erscheint zunächst paradox, weil in ZF herleitbar ist, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\omega)$ der Menge der natürlichen Zahlen ω überabzählbar ist.

Genauer gesagt gilt:

Satz 4.34 (Cantorsches Diagonalargument) Es gilt

$$\text{ZF} \vdash \forall x \forall f : f : x \longrightarrow \mathfrak{P}(x) \rightarrow f[x] \neq \mathfrak{P}(x).$$

Insbesondere folgt

$$\text{ZF} \vdash \forall f : f : \omega \longrightarrow \mathfrak{P}(\omega) \rightarrow f[\omega] \neq \mathfrak{P}(\omega).$$

Beweis in ZF: Es seien eine Menge x und eine Funktion $f : x \longrightarrow \mathfrak{P}(x)$ gegeben. Wir bilden mittels Aussonderung die folgende Teilmenge von x :

$$y := \{z : z \in x, z \notin f(z)\} \subseteq x.$$

Nach der Definition von $\mathfrak{P}(x)$ gilt $y \in \mathfrak{P}(x)$. Andererseits folgt für alle $z \in x$ die Äquivalenz

$$z \in y \quad \Leftrightarrow \quad z \notin f(z),$$

und daher $y \neq f(z)$. Es folgt $y \notin f[x]$, also $f[x] \neq \mathfrak{P}(x)$ wegen $y \in \mathfrak{P}(x)$, also die erste Behauptung.

Die zweite Behauptung erhalten wir im Spezialfall $x = \omega$.

□

Dieses “*Skolemsche Paradoxon*”, dass $\mathcal{P}(\omega)$ in einem abzählbaren Modell von ZF sowohl abzählbar als auch überabzählbar zu sein scheint, wird aufgelöst, wenn wir berücksichtigen, was die Gültigkeit der Überabzählbarkeit von $\mathcal{P}(\omega)$ in einem abzählbaren ZF-Modell $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$ eigentlich besagt: Es besagt nur, dass jede Surjektion von der Klasse $\omega^{\widehat{\mathcal{M}}}$ nach der Klasse $\mathfrak{P}(\omega)^{\widehat{\mathcal{M}}}$ nicht durch ein Objekt $f \in M$ im Universum des Modells repräsentiert wird. Eine Abzählung von $\mathfrak{P}(\omega)^{\widehat{\mathcal{M}}}$ aus “externer”, metasprachlicher Sicht ist damit nicht ausgeschlossen. Insofern ist die Bezeichnung “überabzählbar” vielleicht etwas irreführend; “nichtabzählbar” wäre ein besseres Wort.

Für ein beliebiges ZF-Modell $\mathcal{M}$ muß zudem die Klasse $\omega^{\widehat{\mathcal{M}}}$, durch die die objektsprachliche Menge der natürlichen Zahlen interpretiert wird, keineswegs abzählbar sein. Das ist eine Folgerung des folgenden Satzes:

Satz 4.35 (Kompaktheitssatz) *Es sei $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ eine Theorie 1. Stufe. Besitzt dann jede endliche Teilmenge $\Phi \subseteq \mathcal{A}$ von $\mathcal{A}$ ein Modell, so besitzt auch $\mathcal{A}$ ein Modell.*

Beweis: Besitzt jede endliche Teilmenge Φ von $\mathcal{A}$ ein Modell, so ist sie nach dem Korrektheitssatz konsistent. Dann ist nach Lemma 2.31 (Herleitungen brauchen nur endlich viele Prämissen) auch $\mathcal{A}$ konsistent, besitzt also nach dem Gödelschen Vollständigkeitssatz ein Modell.

□

Korollar 4.36 (Existenz großer Modelle) *Es sei $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ eine Theorie 1. Stufe mit Gleichheit, so dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Modell zu $\mathcal{T}$ mit einem Universum mit mindestens n verschiedenen Elementen gibt. Dann gibt es zu jeder Menge C ein Modell $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$ zu $\mathcal{T}$, so dass es eine injektive Abbildung $f : C \rightarrow M$ gibt.*

Beweis: Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, dass C disjunkt von der Menge aller Symbole, Termen und Formeln der Sprache $\mathcal{S}$ ist; andernfalls benennen wir die Elemente von C

um. Wir erweitern die Sprache $\mathcal{S}$ zu einer Sprache $\mathcal{S}^C$, indem wir alle Elemente von C als neue Konstantensymbole hinzunehmen, und betrachten das Axiomensystem

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{\neg c = d : c, d \in C, c \neq d\}.$$

Wir zeigen nun, dass jede endliche Teilmenge Φ von $\mathcal{A}'$ ein Modell besitzt. Gegeben so eine endliche Teilmenge Φ , treten nur endlich viele der neuen Konstantensymbole $c \in C$ in Formeln in Φ auf, sagen wir $c_1, \dots, c_n$. Unter Verwendung der Voraussetzung nehmen wir ein Modell $\mathcal{N} = (N, \cdot^{\mathcal{N}})$ von $\mathcal{A}$, dessen Universum N mindestens n verschiedene Elemente besitzt, sagen wir $a_1, \dots, a_n \in N$. Wir erweitern die Struktur $\mathcal{N}$ über $\mathcal{S}$ zu einer Struktur $\mathcal{N}' = (N, \cdot^{\mathcal{N}'})$ über $\mathcal{S}^C$, indem wir den Konstantensymbolen $c_1, \dots, c_n$ die Interpretation

$$c_1^{\mathcal{N}'} := a_1, \dots, c_n^{\mathcal{N}'} := a_n$$

und allen übrigen Konstantensymbolen $c \in C \setminus \{c_1, \dots, c_n\}$ irgendeine Interpretation in N geben. Dann folgt

$$\mathcal{N}' \models \neg c = d$$

je zwei verschiedene Konstantensymbole c, d aus $c_1, \dots, c_n$. Wir schließen $\mathcal{N}' \models \Phi$. Damit ist unsere Zwischenbehauptung gezeigt.

Aus dem Kompaktheitssatz folgt, dass $\mathcal{A}'$ ein Modell $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$ besitzt. Insbesondere wird dort das Gleichheitssymbol $=$ als Gleichheit interpretiert. Die gesuchte Abbildung $f : C \rightarrow M$ ist nun die Einschränkung der Interpretationsabbildung $\cdot^{\mathcal{M}}$ auf die Konstantenmenge C . Wegen der Gültigkeit der Formeln $\neg c = d$ mit $c, d \in C, c \neq d$ in $\mathcal{M}$ ist sie injektiv, weil das Gleichheitssymbol $=$ als Gleichheit in $\mathcal{M}$ interpretiert wird.

Beispiele:

- Das Standardmodell der Peanoarithmetik besitzt unendlich viele Objekte in seinem Universum $\mathbb{N}_0$. Also besitzt die Peanoarithmetik auch ein Modell $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$, in dessen Universum M sich die nichtabzählbare Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen injektiv einbetten läßt, und zwar obwohl das Gleichheitssymbol in $\mathcal{M}$ durch die Gleichheit interpretiert wird. Solch ein Modell ist ein *Nichtstandardmodell*, also ein Modell, das nicht isomorph zum Standardmodell ist. Es ist eine Herausforderung an die Anschauung, sich für solche Modelle vorzustellen, dass darin das Induktionsschema der Peanoarithmetik gültig bleibt.
- Ebenso besitzt die um ein Konstantensymbol ω und die Axiome

$$\omega > \mathbf{0}, \omega > \mathbf{1}, \omega > \mathbf{2}, \dots,$$

anders gesagt $\omega > \mathbf{N}^n \mathbf{0}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, erweiterte Peanoarithmetik ein Modell. In solch einem Nichtstandardmodell wird ω also als “aktual unendlich große ’natürliche’ Zahl” interpretiert.

- Falls ZF konsistent ist, so besitzt es ein Modell, in dem die objektsprachliche Menge der natürlichen Zahlen ω durch eine Klasse interpretiert wird, in die sich zum Beispiel die metasprachliche Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen einbetten läßt. Es gilt nämlich

mit dem Synonym $\mathbf{0} := \emptyset$:

$$\mathbf{ZF} \vdash N^n(\mathbf{0}) \in \omega \quad \text{und} \quad \mathbf{ZF} \vdash \neg N^n(\mathbf{0}) = N^m(\mathbf{0})$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \neq n$, wobei die Ziffern $N^n(\mathbf{0})$ durch metasprachliche Rekursion mittels $N^0(\mathbf{0}) := \mathbf{0}$ und $N^{n+1}(\mathbf{0}) := N(N^n(\mathbf{0})) = N^n(\mathbf{0}) \cup \{N^n(\mathbf{0})\}$ (objekt-sprachlich zu lesen) definiert sind. Endlich viele neue Konstantensymbole $c_0, \dots, c_n$ lassen nämlich stets durch verschiedene Elemente der Interpretation der Klasse ω interpretieren, indem jedes c_j durch das gleiche Objekt wie $N^j(\mathbf{0})$ interpretiert wird.

Die Existenz von Nichtstandardmodellen reflektiert also die Unzulänglichkeit von Sprachen 1. Stufe, die natürlichen Zahlen bis auf Isomorphie eindeutig zu charakterisieren. In einer Sprache 2. Stufe tritt dieses Phänomen nicht mehr auf, wie die folgende Übungsaufgabe zeigt:

Übung 4.37 (Charakterisierung der natürlichen Zahlen in einer Sprache 2. Stufe) *Es sei $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$ ein Modell der Peanoarithmetik mit der folgenden Eigenschaft: Es gelte das folgende Induktionsaxiom 2. Stufe: Für alle $A \subseteq M$:*

$$\mathbf{0}^{\mathcal{M}} \in A \Rightarrow (\text{Für alle } m \in M : m \in A \Rightarrow \mathbf{N}^{\mathcal{M}}(m) \in A) \Rightarrow \text{Für alle } m \in M : m \in A.$$

Weiter sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}_0, \cdot^{\mathcal{N}})$ das Standardmodell der Peanoarithmetik. Wir definieren rekursiv:

$$\iota : \mathbb{N}_0 \rightarrow M, \quad \iota(0) := \mathbf{0}^{\mathcal{M}}, \quad \iota(n+1) := \mathbf{N}^{\mathcal{M}}(\iota(n)) \text{ für } n \in \mathbb{N}_0,$$

andere gesagt: $\iota(n) = (\mathbf{N}^n \mathbf{0})^{\mathcal{M}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass ι ein Isomorphismus von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{M}$ ist, d.h. ein bijektiver starker Homomorphismus.

Halten wir eine weitere Beschränkung der Ausdrucksstärke von Sprachen 1. Stufe fest:

Korollar 4.38 (Nichtaxiomatisierbarkeit der Endlichkeit) *Besitzt eine Theorie 1. Stufe zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ein endliches Modell mit einem mindestens n -elementigen Universum, so besitzt sie auch ein unendliches Modell.*

Das ist eine unmittelbare Folgerung aus Korollar (4.36).

Beispiel 4.39 (Nichtaxiomatisierbarkeit der endlichen Gruppen) *Es gibt kein Axiomensystem in der Sprache der Gruppentheorie, dessen Modelle genau die endlichen Gruppen sind. Es gibt nämlich beliebig große endliche Gruppen, z.B. die zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}$.*

Die Existenz von Nichtstandardmodellen von Theorien 1. Stufe ist allerdings nicht nur ein Nachteil Sprachen 1. Stufe. Vielmehr gibt sie Anlass zu einer “Nichtstandardmathematik”, z.B. einer “Nichtstandardanalysis”, die vielleicht in gewisser Hinsicht intuitiver als die Standardanalysis ist. Das nächste Kapitel soll dies illustrieren.

5 Nonstandardmodelle

5.1 Ultrapotenzen

Wir besprechen nun ein systematisches Verfahren, Nichtstandardmodelle zu generieren, das nicht auf dem Kompaktheitssatz aufbaut, sondern sogenannte “*Ultrafilter*” verwendet. Wir beginnen daher mit der Definition der Begriffe *Filter* und *Ultrafilter*.

Definition 5.1 (Filter und Ultrafilter) *Es sei I eine nichtleere Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{P}(I)$ über I wird ein Filter über I genannt, wenn gilt:*

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. $\mathcal{F} \neq \emptyset$
3. Für alle $A, B \in \mathcal{F}$ gilt $A \cap B \in \mathcal{F}$.
4. Für alle $A \in \mathcal{F}$ und $B \in \mathfrak{P}(I)$ mit $A \subseteq B$ gilt $B \in \mathcal{F}$.

Gilt zudem:

5. Für alle $A \in \mathfrak{P}(I)$ gilt $A \in \mathcal{F}$ oder $I \setminus A \in \mathcal{F}$,

so wird $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter über I genannt.

Die Ultrafiltereigenschaft 5 kann man auch so verschärfen:

- 5'. Für alle $A \in \mathfrak{P}(I)$ gilt entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $I \setminus A \in \mathcal{F}$,

weil $A \in \mathcal{F}$ und $I \setminus A \in \mathcal{F}$ wegen der Filtereigenschaften 3 und 1 nicht zugleich gelten können

Filter und Ultrafilter spielen nicht nur in der Logik, genauer gesagt der Modelltheorie, eine wichtige Rolle, sondern auch in anderen Gebieten der Mathematik. Hier ein Beispiel aus der Topologie:²²

Beispiel 5.2 (Umgebungsfilter) *Ist $(I, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, also $\mathcal{T}$ das System der offenen Mengen in I , und $x \in I$ ein Punkt, so ist das Mengensystem der Umgebungen von x*

$$\mathcal{U}(x) := \{U \in \mathcal{P}(I) : \exists O \in \mathcal{T} : x \in O \subseteq U\}$$

ein Filter, der Umgebungsfilter von x .

Beispiel 5.3 (co-endlicher Filter) *Der Endstückfilter auf $\mathbb{N}$ wird durch*

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \forall m > n, m \in \mathbb{N} : m \in A\} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ ist endlich}\}$$

gegeben. Dieser Filter ist jedoch kein Ultrafilter, denn zum Beispiel ist weder die Menge der geraden natürlichen Zahlen noch die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen ein Element von $\mathcal{F}$.

²²Zum Beispiel kann man mit Hilfe von Ultrafiltern einen besonders eleganten Beweis des Satzes von Tychonov (beliebige Produkte kompakter topologischer Räume sind kompakt) führen.

Beispiel 5.4 (feste Ultrafilter) Ist I eine Menge und $x \in I$ ein Element davon, so ist

$$\mathcal{U}_x := \{A \subseteq I : x \in A\}$$

ein Ultrafilter. Allerdings sind gerade die so gewonnenen Ultrafilter für unsere Zwecke in der Modelltheorie nicht interessant.

Ultrafilter, die nicht von der Gestalt $\mathcal{U}_x$ für ein $x \in I$ sind, werden *freie Ultrafilter* genannt. Freie Ultrafilter sind genau die Ultrafilter $\mathcal{U}$ mit $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$. Allerdings gelingt es uns nicht, auch nur ein einziges Beispiel für freie Ultrafilter explizit-konstruktiv anzugeben. Ihre Existenz zeigen wir dagegen nichtkonstruktiv mit Hilfe des Zornschen Lemmas. Hierzu eine Vorbereitung:

Wir fixieren eine Menge $I \neq \emptyset$ über I . Die Menge $\text{Filter}(I)$ aller Filter über I ist durch Inklusion $\subseteq$ partiell geordnet.

Satz 5.5 (maximale Filter) Ein Filter $\mathcal{F} \in \text{Filter}(I)$ ist genau dann ein Ultrafilter, wenn er bezüglich der Inklusion maximal ist.

Beweis: “ $\Leftarrow$ ”: Es sei $\mathcal{F} \in \text{Filter}(I)$ ein maximaler Filter. Zu zeigen ist, dass für jedes $A \subseteq I$ gilt: $A \in \mathcal{F}$ oder $I \setminus A \in \mathcal{F}$. Hierzu sei $A \subseteq I$ gegeben. Annahme: $I \setminus A \notin \mathcal{F}$. Wir setzen

$$\mathcal{G} := \{B \subseteq I : \exists C \in \mathcal{F} : C \cap A \subseteq B\}.$$

Wir zeigen zuerst $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Hierzu sei $B \in \mathcal{F}$ gegeben. Wegen $B \cap A \subseteq B$ folgt dann $B \in \mathcal{G}$. Nun zeigen wir, dass $\mathcal{G}$ ein Filter ist.

1. Wäre $\emptyset \in \mathcal{G}$, so könnten wir $C \in \mathcal{F}$ mit $C \cap A \subseteq \emptyset$ nehmen, also $\mathcal{F} \ni C \subseteq I \setminus A$ und daher $I \setminus A \in \mathcal{F}$ nach Filtereigenschaft 4. im Widerspruch zur Annahme. Es folgt $\emptyset \notin \mathcal{G}$.
2. Wegen $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ folgt $\mathcal{G} \neq \emptyset$.
3. Es seien $B, B' \in \mathcal{G}$ gegeben. Wir nehmen $C, C' \in \mathcal{F}$ mit $C \cap A \subseteq B$ und $C' \cap A \subseteq B'$ nach der Definition von $\mathcal{G}$. Dann folgt $C \cap C' \in \mathcal{F}$ nach der Filtereigenschaft 3 sowie $C \cap C' \cap A \subseteq B \cap B' \subseteq I$. Es folgt $B \cap B' \in \mathcal{G}$ nach Definition von $\mathcal{G}$.
4. Es seien $\mathcal{G} \ni B \subseteq B' \subseteq I$ gegeben. Wir nehmen mit der Definition von $\mathcal{G}$ ein $C \in \mathcal{F}$ mit $C \cap A \subseteq B$. Dann folgt auch $C \cap A \subseteq B'$, also $B' \in \mathcal{G}$.

Weil $\mathcal{F}$ nach Annahme ein maximaler Filter ist, folgt $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. Wir zeigen nun $A \in \mathcal{F}$. Hierzu nehmen wir ein beliebiges $C \in \mathcal{F}$; ein solches existiert nach Filtereigenschaft 2. Mit $C \cap A \subseteq A$ folgt $A \in \mathcal{G} = \mathcal{F}$ nach Definition von $\mathcal{G}$.

“ $\Rightarrow$ ”: Es sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter und $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ ein weiterer Filter über I . Angenommen, $\mathcal{G} \neq \mathcal{F}$. Dann können wir ein $A \in \mathcal{G}$ mit $A \notin \mathcal{F}$ nehmen. Es folgt $I \setminus A \in \mathcal{F}$ nach der Ultrafiltereigenschaft 5., also auch $I \setminus A \in \mathcal{G}$ wegen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Mit der Filtereigenschaft 3 von $\mathcal{G}$ schließen wir $\emptyset = A \cap (I \setminus A) \in \mathcal{G}$ im Widerspruch zur Filtereigenschaft 1 von $\mathcal{G}$. Damit ist $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ gezeigt. Also ist $\mathcal{F}$ ein maximaler Filter über I .

□

Der folgende Satz enthält das nichtkonstruktive Element im Existenzbeweis freier Ultrafilter:

Satz 5.6 (Erweiterung von Filtern zu Ultrafiltern) *Es sei $\mathcal{F}$ ein Filter über einer nichtleeren Menge I . Dann gibt es einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ über I mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Ist $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, so ist $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter.*

Beweis: Die Menge $\text{Filter}(I, \mathcal{F})$ aller Filter $\mathcal{G} \in \text{Filter}(I)$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ist durch Inklusion partiell geordnet. Jede linear geordnete Teilmenge $\mathfrak{L} \subseteq \text{Filter}(I, \mathcal{F})$ besitzt eine obere Schranke. In der Tat:

- Ist $\mathfrak{L} \neq \emptyset$, so ist $\bigcup \mathfrak{L}$ eine obere Schranke von $\mathfrak{L}$. Man beobachte hierzu, dass $\bigcup \mathfrak{L}$ ein Filter ist, der $\mathcal{F}$ umfasst. (Übung!)
- Ist $\mathfrak{L} = \emptyset$, so ist $\mathcal{F} \in \text{Filter}(I, \mathcal{F})$ eine obere Schranke für $\mathfrak{L}$.

Aus dem Zornschen Lemma folgt, dass $\text{Filter}(I, \mathcal{F})$ ein maximales Element $\mathcal{U}$ besitzt. Als maximaler Filter ist $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter.

Ist zusätzlich $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, so folgt auch $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$ wegen $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$. In diesem Fall ist also $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter.

□

Beispiel: Es gibt einen freien Ultrafilter $\mathcal{U}$ über $I = \mathbb{N}$, der den Endstückfilter umfasst. Wir definieren nun ein systematisches Verfahren, mit Hilfe von Ultrafiltern Strukturen zu erweitern, das in vielen Fällen Nichtstandardmodelle liefert:

Definition 5.7 (Ultrapotenzen, 1. Version) *Es sei $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$ eine Struktur zu einer Sprache $\mathcal{S}$ 1. Stufe. Weiter sei I eine nichtleere Menge und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter darüber. Wir definieren eine neue Struktur $\mathcal{M}^{\mathcal{U}} = (M^I, \cdot^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}})$, Ultrapotenz genannt, über der gleichen Sprache $\mathcal{S}$ so:*

1. Das Universum von $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ ist die kartesische Potenz M^I .
2. Jedes n -stellige Funktionssymbol f in $\mathcal{S}$ wird komponentenweise interpretiert:

$$f^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}} : (M^I)^n \rightarrow M^I,$$

$$f^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}}((x_{1,i})_{i \in I}, \dots, (x_{n,i})_{i \in I}) := (f^{\mathcal{M}}(x_{1,i}, \dots, x_{n,i}))_{i \in I}$$

3. Jedes n -stellige Prädikatensymbol p in $\mathcal{S}$ wird so interpretiert:

$$p^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}} := \{((x_{1,i})_{i \in I}, \dots, (x_{n,i})_{i \in I}) \in (M^I)^n : \{i \in I : (x_{1,i}, \dots, x_{n,i}) \in p^{\mathcal{M}}\} \in \mathcal{U}\} \quad (30)$$

Insbesondere ist $\perp^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}} = \emptyset$ wegen $\emptyset \notin \mathcal{U}$.

Weiter definieren wir $\iota : M \rightarrow M^I$ mit den konstanten Familien

$$\iota(x) := (x)_{i \in I}.$$

Die Bedeutung der so eingeführten Potenzstrukturen beruht auf dem folgenden

Satz 5.8 (Gültigkeit von Formeln in Ultrapotenzen) *Es sei ϕ eine Formel der Sprache $\mathcal{S}$ und $b : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow M^I$ eine Belegung mindestens aller freien Variablen von ϕ mit Werten in M^I . Für jedes $i \in I$ sei $\pi_i : M^I \rightarrow M$, $\pi_i((x_j)_{j \in I}) = x_i$ die kanonische Projektion zu i . Dann gilt:*

$$\mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \phi[b] \Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M} \models \phi[\pi_i \circ b]\} \in \mathcal{U}.$$

Beweis: Zunächst beobachten wir, dass für jeden Term t in der Sprache $\mathcal{S}$ und jede M^I -wertige Belegung b mindestens aller freien Variablen in t gilt:

$$t^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}}[b] = (t^{\mathcal{M}}[\pi_i \circ b])_{i \in I},$$

anders gesagt $\pi_i(t^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}}[b]) = t^{\mathcal{M}}[\pi_i \circ b]$ für alle $i \in I$, weil die Funktionszeichen in $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ komponentenweise interpretiert werden.

Wir führen den Beweis des Satzes induktiv über den Aufbau der Formel ϕ :

- Ist $\phi = pt_1 \dots t_n$ eine Primformel, so gilt die Äquivalenzkette

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models pt_1 \dots t_n[b] \\ \Leftrightarrow & \{i \in I : (\pi_i(t_1^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}}[b]), \dots, \pi_i(t_n^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}}[b])) \in p^{\mathcal{M}}\} \in \mathcal{U} \quad (\text{wg. (30)}) \\ \Leftrightarrow & \{i \in I : (t_1^{\mathcal{M}}[\pi_i \circ b], \dots, t_n^{\mathcal{M}}[\pi_i \circ b]) \in p^{\mathcal{M}}\} \in \mathcal{U} \\ \Leftrightarrow & \{i \in I : \mathcal{M} \models pt_1 \dots t_n[\pi_i \circ b]\} \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

- Ist $\phi = \psi \rightarrow \chi$ eine Implikation, so gilt die Äquivalenzkette

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \psi \rightarrow \chi[b] \\ \Leftrightarrow & \mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \psi[b] \text{ und } \mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \chi[b] \\ \Leftrightarrow & \{i \in I : \mathcal{M} \models \psi[\pi_i \circ b]\} \in \mathcal{U} \text{ und } \{i \in I : \mathcal{M} \models \chi[\pi_i \circ b]\} \notin \mathcal{U} \quad (\text{nach I.V.}) \\ \Leftrightarrow & \{i \in I : \mathcal{M} \models \psi[\pi_i \circ b]\} \in \mathcal{U} \text{ und } \{i \in I : \mathcal{M} \not\models \chi[\pi_i \circ b]\} \in \mathcal{U} \\ & (\text{wg. Ultrafiltereigenschaft 5'}) \\ \Leftrightarrow & \{i \in I : \mathcal{M} \models \psi[\pi_i \circ b]\} \cap \{i \in I : \mathcal{M} \not\models \chi[\pi_i \circ b]\} \in \mathcal{U} \\ & (\text{wg. Filtereigenschaften 3 und 4}) \\ \Leftrightarrow & \{i \in I : \mathcal{M} \models \psi[\pi_i \circ b] \text{ und } \mathcal{M} \not\models \chi[\pi_i \circ b]\} \in \mathcal{U} \\ \Leftrightarrow & \{i \in I : \mathcal{M} \not\models \psi \rightarrow \chi[\pi_i \circ b]\} \in \mathcal{U} \\ \Leftrightarrow & \{i \in I : \mathcal{M} \models \psi \rightarrow \chi[\pi_i \circ b]\} \notin \mathcal{U} \\ & (\text{wg. Ultrafiltereigenschaft 5'}) \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung für die Implikation:

$$\mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \psi \rightarrow \chi[b] \Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M} \models \psi \rightarrow \chi[\pi_i \circ b]\} \in \mathcal{U}.$$

- Ist $\phi = \forall x\psi$ eine Allformel, so gilt die Äquivalenzkette

$$\mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \forall x\psi[b] \quad (31)$$

$$\Leftrightarrow \forall z \in M^I : \mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \psi[b, x/z] \quad (32)$$

$$\Leftrightarrow \forall z \in M^I : \{i \in I : \mathcal{M} \models \psi[\pi_i \circ b, x/\pi_i(z)]\} \in \mathcal{U} \text{ (mit der I.V.)} \quad (33)$$

$$\Leftrightarrow \{i \in I : \forall z \in M : \mathcal{M} \models \psi[\pi_i \circ b, x/z]\} \in \mathcal{U} \text{ (wird gleich begründet)} \quad (34)$$

$$\Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M} \models \forall x\psi[\pi_i \circ b]\} \in \mathcal{U}, \quad (35)$$

wie zu zeigen war.

Zur Begründung der dritten Äquivalenz in dieser Kette:

“ $\Rightarrow$ ”: Es gelte die Formel in (33). Für jedes $i \in I$ wählen wir mit dem Auswahlaxiom ein z_i in M mit $\mathcal{M} \models \psi[\pi_i \circ b, x/z_i]$ aus, falls ein solches z_i existiert, andernfalls wählen wir $z_i \in M$ beliebig. Wir fassen die ausgewählten z_i zu $z = (z_i)_{i \in I}$ zusammen: $z_i = \pi_i(z)$. Nach Konstruktion gilt

$$\{i \in I : \forall w \in M : \mathcal{M} \models \psi[\pi_i \circ b, x/w]\} = \{i \in I : \mathcal{M} \models \psi[\pi_i \circ b, x/z_i]\} \in \mathcal{U},$$

wobei wir im letzten Schritt die Formel in (33) angewandt haben.

“ $\Leftarrow$ ”: Es gelte die Formel in (34). Es sei $z \in M^I$. Dann folgt

$$\{i \in I : \mathcal{M} \models \psi[\pi_i \circ b, x/\pi_i(z)]\} \supseteq \{i \in I : \forall w \in M : \mathcal{M} \models \psi[\pi_i \circ b, x/w]\} \in \mathcal{U},$$

also

$$\{i \in I : \mathcal{M} \models \psi[\pi_i \circ b, x/\pi_i(z)]\} \in \mathcal{U}$$

mit Hilfe der Filtereigenschaft 4. Es folgt die Formel in (33).

□

Als eine einfache Folgerung erhalten wir:

Korollar 5.9 (Transferprinzip) *Die Abbildung ι ist ein starker Homomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$, d.h. für alle Formeln ϕ der Sprache $\mathcal{S}$ und jede Belegung b mindestens aller freien Variablen in ϕ mit Werten in M gilt:*

$$\mathcal{M} \models \phi[b] \Leftrightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \phi[\iota \circ b]$$

Beweis: Gegeben ϕ und b wie im Satz, wenden wir den Satz auf die Belegung $\iota \circ b$ an. Es gilt also

$$\mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \phi[\iota \circ b] \Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M} \models \phi[\pi_i \circ \iota \circ b]\} \in \mathcal{U}.$$

Nun ist $\pi_i \circ \iota \circ b = b$, also

$$\{i \in I : \mathcal{M} \models \phi[\pi_i \circ \iota \circ b]\} = \{i \in I : \mathcal{M} \models \phi[b]\} = \begin{cases} I \in \mathcal{U}, & \text{falls } \mathcal{M} \models \phi[b], \\ \emptyset \notin \mathcal{U}, & \text{falls } \mathcal{M} \not\models \phi[b]. \end{cases}$$

Hier haben wir die Folgerung $I \in \mathcal{U}$ der Filtereigenschaften 2 und 4 und die Filtereigenschaft 1, also $\emptyset \notin \mathcal{U}$, verwendet. Zusammen folgt die Behauptung. $\square$

Ist $\mathcal{S}$ eine Sprache mit Gleichheit, so gelten in $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ insbesondere auch die Gleichheitsaxiome. Insbesondere ist dann die Quotientenstruktur $\mathcal{M}^* = (M^*, \cdot^*) := \mathcal{M}^{\mathcal{U}} / \equiv^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}}$ definiert. Natürlich hängt $\mathcal{M}^*$ ebenfalls von der Wahl des Ultrafilters $\mathcal{U}$ ab, obwohl das in der Notation unterdrückt wird.

Definition 5.10 (Ultrapotenzen – 2. Version) Die Struktur $\mathcal{M}^*$ wird Ultrapotenz von $\mathcal{M}$ bezüglich des Ultrafilters $\mathcal{U}$ auf I genannt. Die Verknüpfung $* := k \circ \iota : M \rightarrow M^*$ der kanonischen Abbildung $k : M^I \rightarrow M^*$, $k(x) = [x]_{\equiv^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}}} = \{y \in M^I : y \equiv^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}} x\}$, mit der Abbildung $\iota : M \rightarrow M^I$ wird die kanonische Einbettung genannt. Mit ihrer Hilfe wird M als Teilmenge von M^* aufgefasst, indem man jedes $z \in M$ mit $*(z)$ identifiziert. Wir nennen die Elemente von $*[M]$ die Standardelemente von M^* . Die Notation $\text{st } x$, gelesen als “ x ist standard”, für $x \in M^*$ soll bedeuten, dass es ein $z \in M$ mit $x = *(z)$ gibt, also dass x ein Standardelement ist.

Die Abbildung $*$ ist also eine elementare Einbettung von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ im Sinne der folgenden Sprechweise:

Definition 5.11 (elementare Einbettung) Eine Einbettung $*$ von einer Struktur $\mathcal{M} = (M, \cdot^{\mathcal{M}})$ in eine andere $\mathcal{N} = (N, \cdot^{\mathcal{N}})$ wird eine elementare Einbettung genannt, wenn sie ein starker Homomorphismus ist,

Im Fall eines festen Ultrafilters, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_j = \{A \subseteq I : j \in A\}$ für ein festes $j \in I$, ist $*$ einfach nur ein Isomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{M}^*$; seine Umkehrung wird durch $[(x_i)_{i \in I}]_{\equiv^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}}} \mapsto x_j$ gegeben.

Interessant ist die Ultrapotenzkonstruktion dagegen im Fall von freien Ultrafiltern.

Formulieren wir das Transferprinzip nochmal nach Quotientenbildung modulo des interpretierten Gleichheitssymbols:

Korollar 5.12 (Transferprinzip – 2. Version) Für alle Formeln ϕ der Sprache $\mathcal{S}$ und jede Belegung b mindestens aller freien Variablen in ϕ mit Werten in M gilt:

$$\mathcal{M} \models \phi[b] \Leftrightarrow \mathcal{M}^* \models \phi[* \circ b]$$

Beweis: Das ist nur die Aussage, dass $*$ eine elementare Einbettung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{M}^*$ ist, mit anderen Worten gesagt. $\square$

Wir konzentrieren uns nun auf den Fall, dass $I = \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen ist, und $\mathcal{U}$ ein fixierter Ultrafilter, der den Endstückfilter $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{N}$ umfasst. Insbesondere ist $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter.

In diesem Fall haben wir die folgende “Existenz idealer Punkte”:

Satz 5.13 (Prinzip vom idealen Punkt) *Es sei $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Formeln der Sprache $\mathcal{S}$ und x eine Variable. Weiter sei $b : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{freeVar } \phi_n \setminus \{x\} \rightarrow M$ eine Belegung mindestens aller freien Variablen der ϕ_n außer x mit Werten im Ausgangsuniversum²³ M . Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiere ein $z \in M^*$, so dass gilt*

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \leq n : \mathcal{M}^* \models \phi_m[b[x/z]]. \quad (36)$$

Dann existiert ein $z \in M^$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*²⁴

$$\mathcal{M}^* \models \phi_n[b[x/z]].$$

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Aus der Voraussetzung folgt:

$$\mathcal{M}^* \models \exists x \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n[b]$$

Mit dem Transferprinzip, Korollar 5.9 schließen wir

$$\mathcal{M} \models \exists x \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n[b].$$

Wir können also ein $z_n \in M$ wählen, so dass gilt:

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \leq n : \mathcal{M} \models \phi_m[b[x/z_n]].$$

Mit dem Auswahlaxiom wählen wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein solches z_n aus und setzen $z := [(z_n)_{n \in \mathbb{N}}]_{=\mathcal{M}^{\mathcal{U}}} \in M^*$. Wir fixieren nun $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\{n \in \mathbb{N} : \mathcal{M} \models \phi_m[b[x/z_n]]\} \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U},$$

also auch

$$\{n \in \mathbb{N} : \mathcal{M} \models \phi_m[b[x/z_n]]\} \in \mathcal{U}$$

mit der Filtereigenschaft 4. Nach dem Satz 5.8 (Gültigkeit von Formeln in Ultrapotenzen) folgt zuerst

$$\mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \phi_m[(\iota \circ b)[x/(z_n)_{n \in \mathbb{N}}]]$$

und dann mit Quotientenbildung modulo $=^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}}$:

$$\mathcal{M}^* \models \phi_m[(\ast \circ b)[x/z]].$$

Der Punkt $z \in M^*$ ist also der gesuchte “ideale Punkt”.

□

²³Man kann die Beschränkung der Werte der Belegung b auf das Standarduniversum aufheben, indem man die Ultrapotenzkonstruktion iteriert: Nonstandardelemente bezüglich einer Iterationsstufe werden Standardelemente bezüglich der nächsten Iterationsstufe. Im Rahmen dieser Vorlesung diskutieren wir solche iterierten Ultrapotenzen nicht im Detail.

²⁴Man beachte, dass hier M als Teilmenge von M^* aufgefasst wird, so dass wir b statt $\ast \circ b$ schreiben.

5.2 Nonstandard-Analysis

Bekanntlich wurde die Differential- und Integralrechnung von Newton und Leibniz mit anschaulich-heuristische verwendeten “infinitesimalen Größen” eingeführt. Differentiale sind in dieser Welt nicht lineare Abbildungen, sondern “infinitesimal kleine Zuwächse”. Das findet sich heute noch in manchen Sprechweisen, wie “Differentialquotient” als “Quotient von Differentialen”, und selbst in der Bezeichnung “Infinitesimalrechnung”. Erst im 19. Jahrhundert, mit Cauchy und Weierstraß, wurden die infinitesimalen Größen aus der Standardanalysis verbannt. Allerdings haben sie sich in den Anwendungswissenschaften, zum Beispiel der Physik, als heuristische Sprech- und Denkweisen bis heute erhalten.

In den 1960er Jahren hatte Abraham Robinson die Idee, den Infinitesimalien mit Hilfe der Modelltheorie, genauer gesagt mit Ultrapotenzen, einen rigorosen mathematischen Sinn zu geben. Er hat damit vielen der heuristischen Ideen von Newton, Leibniz und vielen anderen eine moderne rigorose Interpretation gegeben. Wir besprechen hier kurz die Anfänge der damit von Robinson begründeten Nonstandard-Analysis:

Definition 5.14 (Nonstandard reelle Zahlen) Die Sprache $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ der reellen Zahlen besitzt jede n -stellige Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, als ein n -stelliges Funktionszeichen, und jede n -stellige Relation $p \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, als ein n -stelliges Prädikatsymbol. Es sei $\mathbf{R} = (\mathbb{R}, \text{id})$ die Struktur über $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit Universum $\mathbb{R}$, in der jedes Funktionszeichen und jedes Prädikatsymbol in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ durch sich selbst interpretiert. Es sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter über $\mathbb{N}$, der den Endstückfilter umfasst, und $\mathbf{R}^* = (\mathbb{R}^*, \cdot^*)$ die zugehörige Ultrapotenz, wobei $\mathbf{R}$ elementar eingebettet als Unterstruktur von $\mathbf{R}^*$ aufgefasst wird. Zusätzlich zu den Prädikatsymbolen der Sprache $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ haben wir noch das Standard-Prädikat st , das für $x \in \mathbb{R}^*$ durch

$$\text{st } x \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

charakterisiert ist.

Eine Zahl $x \in \mathbb{R}^*$ heißt infinitesimal, in Zeichen $x \approx 0$, wenn für alle standard $\epsilon > 0$ gilt:

$$|x|^* <^* \epsilon.$$

Zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}^*$ heißen infinitesimal benachbart, in Zeichen $x \approx y$, wenn gilt:

$$x -^* y \approx 0.$$

Es gibt infinitesimale Zahlen $\epsilon \approx 0$, $\epsilon >^* 0$, z.B. $\epsilon = [(1/n)_{n \in \mathbb{N}}]$. In der Tat ist für jedes standard $\epsilon > 0$

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{1}{n} \right| < \epsilon \right\} \in \mathcal{U},$$

denn es ist ein Endstück in $\mathbb{N}$.

Alternativ liefert auch das Prinzip vom idealen Punkt infinitesimale positive* Zahlen:

$$\exists z \in \mathbb{R}^* \forall n \in \mathbb{N} : 0 <^* z <^* \frac{1}{n},$$

weil

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{R}^* \forall m \in \mathbb{N}, m \leq n : 0 <^* z <^* \frac{1}{m}.$$

Übung 5.15 Zeigen Sie, dass die $\approx$ -Relation auf $\mathbb{R}^*$ eine Äquivalenzrelation ist.

Bemerkung zu partiell definierten Funktionen: Ist $f : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}$ eine partiell definierte Funktion, also eine Funktion $f : \text{domain}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{domain}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$, so fassen wir f als eine Relation

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in \text{domain}(f), f(x) = y\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

auf. Ihre Nichtstandarderweiterung $f^* \subseteq (\mathbb{R}^*)^{n+1}$ ist dann ebenfalls eine partiell definierte Funktion $f^* : (\mathbb{R}^*)^n \dashrightarrow \mathbb{R}^*$, genauer gesagt $f^* : \text{domain}(f)^* \rightarrow f[\mathbb{R}^n]^*$, denn nach dem Transferprinzip gilt

$$\begin{aligned} \forall x_1, \dots, x_n : (x_1, \dots, x_n) \in \text{domain}(f)^* &\Rightarrow \exists y \in f[\mathbb{R}^n]^* : (x_1, \dots, x_n, y) \in f^*, \\ \forall x_1, \dots, x_n, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^* & (x_1, \dots, x_n, y_1) \in f^* \wedge (x_1, \dots, x_n, y_2) \in f^* \Rightarrow y_1 = y_2 \end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned} \forall x_1, \dots, x_n : (x_1, \dots, x_n) \in \text{domain}(f) &\Rightarrow \exists y \in f[\mathbb{R}] : (x_1, \dots, x_n, y) \in f, \\ \forall x_1, \dots, x_n, y_1, y_2 \in \mathbb{R} & (x_1, \dots, x_n, y_1) \in f \wedge (x_1, \dots, x_n, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2. \end{aligned}$$

Als erstes Beispiel hier die nonstandard Charakterisierung der Stetigkeit:

Satz 5.16 (Stetigkeit – nonstandard Charakterisierung) Für alle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ sind äquivalent:²⁵

1. f ist stetig in x .
2. Für alle $y \in \mathbb{R}^*$ mit $y \approx x$ gilt $f^*(y) \approx f(x)$.

Beweis: “1. $\Rightarrow$ 2.”: Es seien f stetig in $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^*$ mit $y \approx x$ gegeben. Zu zeigen ist $f^*(y) \approx f(x)$, also $\forall \epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{R} : |f^*(y) -^* f(x)|^* <^* \epsilon$. Hierzu sei ein standard $\epsilon > 0$ gegeben. Aufgrund der Stetigkeit von f in x finden wir ein standard $\delta > 0$, so dass gilt:

$$\forall z \in \mathbb{R} : |z - x| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(x)| < \epsilon.$$

Mit dem Transferprinzip folgt

$$\forall z \in \mathbb{R}^* : |z -^* x|^* <^* \delta \Rightarrow |f^*(z) -^* f(x)|^* <^* \epsilon,$$

wobei wir $f(x) = f^*(x)$ verwendet haben, da x und damit auch $f(x)$ standard sind. Nehmen wir insbesondere unser gegebenes y , so folgt $|y -^* x|^* <^* \delta$, weil δ standard ist und $y \approx x$, und daher $|f^*(y) -^* f(x)|^* <^* \epsilon$, wie zu zeigen war.

“2. $\Rightarrow$ 1.”: Es gelte 2., und es sei ein standard $\epsilon > 0$ gegeben. Zu zeigen ist:

$$\exists \delta > 0, \delta \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

²⁵Analoges gilt, wenn f nur partiell definiert ist. Wir führen das hier nicht aus.

Nach dem Transferprinzip ist die Behauptung äquivalent zu

$$\exists \delta >^* 0, \delta \in \mathbb{R}^* \forall y \in \mathbb{R}^* : |y -^* x|^* <^* \delta \Rightarrow |f^*(y) -^* f(x)|^* <^* \epsilon,$$

wobei wir wieder $f(x) = f^*(x)$ verwendet haben. Nehmen wir ein infinitesimales $\delta >^* 0$. Nun sei ein $y \in \mathbb{R}^*$ mit $|y -^* x|^* <^* \delta$ gegeben. Weil die Relation $<^*$ nach dem Transferprinzip transitiv ist, folgt auch $|y -^* x|^* \approx 0$ und damit $y \approx x$. Mit der Voraussetzung 2. schließen wir $f^*(y) \approx f(x)$. Weil $\epsilon > 0$ standard ist, folgt $|f^*(y) -^* f(x)|^* <^* \epsilon$, wie zu zeigen war.

Übung 5.17 (Ableitung – nonstandard Charakterisierung) Für alle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x, a \in \mathbb{R}$ sind äquivalent:

1. f ist differenzierbar in x mit Ableitung a ,
2. Für jedes infinitesimale $dx \neq 0$ und $dy := f^*(x +^* dx) -^* f(x)$ gilt:

$$dy/^* dx \approx a$$

mit der Quotientenabbildung $/^* : \mathbb{R}^* \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})^* \rightarrow \mathbb{R}$.

Aus der Analysis 1 wissen Sie, dass jede Teilmenge A von $\mathbb{R}$ ein Supremum in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ besitzt, und zwar gleichgültig, ob A mit Standardmethoden oder mit Nonstandardmethoden gewonnen wurde.

Definition 5.18 (Standardteil einer nonstandard reellen Zahl) Für jedes $x \in \mathbb{R}^*$ definieren wir ihren Standardteil

$$x^\circ := \sup\{y \in \mathbb{R} : y <^* x\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Wir nennen x endlich, wenn $x^\circ \in \mathbb{R}$ gilt.

Beispiel: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in \mathbb{R}$, so gilt für $0 \neq dx \approx 0$ und $dy = f^*(x +^* dx) -^* f(x)$:

$$f'(x) = (dy/^* dx)^\circ.$$

Übung 5.19 (Gleichmäßige Stetigkeit – nonstandard Charakterisierung) Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen.²⁶

1. f ist gleichmäßig stetig.
2. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^*$ mit $x \approx y$ gilt $f^*(x) \approx f^*(y)$.

Die Kompaktheit von Mengen K wird nun charakterisiert durch: “Jeder Punkt in K^* ist nahstandard in K .” Genauer gesagt gilt:

²⁶Analoges gilt auch wieder, wenn f nur partiell definiert ist. Sie brauchen das nicht zu beweisen.

Satz 5.20 (Kompaktheit – nonstandard Charakterisierung) Für jede Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ sind äquivalent:

1. K ist kompakt.
2. Für alle $x \in K^*$ existiert $y \in K$ mit $x \approx y$.

Beweis: “1. $\Rightarrow$ 2.”: Es seien $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $x \in K^*$ gegeben. Angenommen, für jedes $y \in K$ gilt $y \not\approx x$. In diesem Fall können wir zu jedem $y \in K$ ein standard $\epsilon_y > 0$ mit $|y - x|^* \geq^* \epsilon$ wählen. Anders gesagt (mit dem Transferprinzip) gilt für jedes $y \in K$ die Aussage $x \notin U_{\epsilon_y}(y)^*$, wobei $U_{\epsilon_y}(y) := \{z \in K : |z - y| < \epsilon_y\}$ die ϵ_y -Umgebung von y bezeichnet. Nun ist $\{U_{\epsilon_y}(y) : y \in K\}$ eine offene Überdeckung von K . Wegen der Kompaktheit von K finden wir eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{\epsilon_{y_i}}(y_i) : y_i \in \{y_1, \dots, y_n\}\}$ von K mit geeigneten $y_1, \dots, y_n \in K$. Es gilt also

$$\forall z \in K : z \in U_{\epsilon_{y_1}}(y_1) \vee \dots \vee z \in U_{\epsilon_{y_n}}(y_n).$$

Mit dem Transferprinzip folgt

$$\forall z \in K^* : z \in U_{\epsilon_{y_1}}(y_1)^* \vee \dots \vee z \in U_{\epsilon_{y_n}}(y_n)^*,$$

insbesondere

$$x \in \bigcup_{k=1}^n U_{\epsilon_{y_k}}(y_k)^*,$$

ein Widerspruch.

“2. $\Rightarrow$ 1.”: Es gelte die Aussage 2 für K . Weiter sei eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von K gegeben. Dann besitzt $\mathcal{U}$ eine abzählbare Teilüberdeckung $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (!), z.B. weil sich jede offene Menge als Vereinigung von offenen Intervallen mit rationalen Endpunkten schreiben lässt.²⁷ Wir setzen

$$A_n := K \setminus \bigcup_{k=1}^n U_k$$

für $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist die Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ absteigend. Zu zeigen ist nun, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A_n = \emptyset$ gibt. Wenn dies nicht der Fall wäre, könnten wir nach dem Prinzip vom idealen Punkt ein $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^*$ nehmen. Insbesondere ist $x \in K^*$, weil $A_n^* \subseteq K^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (mittels Transfer aus $A_n \subseteq K$). Nach Voraussetzung 2. finden wir dann ein $y \in K$ mit $x \approx y$. Wir nehmen ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y \in U_n$; dies ist möglich, da die U_n die Menge K überdecken. Wegen $y \in U_n$ und $x \approx y$ folgt $x \in U_n^*$ nach dem Transferprinzip, weil U_n offen ist. Nochmal mit dem Transferprinzip erhalten wir $x \in U_n^* \cap A_n^* = (U_n \cap A_n)^* = \emptyset$, ein Widerspruch.

²⁷Wir brauchen hier wesentlich, dass jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt, was über $K \subseteq \mathbb{R}$ zwar richtig ist, in beliebigen topologischen Räumen aber falsch werden kann. Im Rahmen allgemeinerer Nonstandardmodelle lässt sich dieses Problem lösen, indem man die Ultrapotenzkonstruktion transfinit iteriert. Diese Konstruktion übersteigt den Rahmen dieser Vorlesung.

□

Korollar 5.21 Jede stetige Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

Beweis: Es seien $x, y \in K^*$ mit $x \approx y$ gegeben. Mit der Kompaktheit von K wählen wir ein $z \in K$ mit $z \approx x$. Dann folgt auch $z \approx y$. Wir erhalten $f(z) \approx f^*(x)$ und $f(z) \approx f^*(y)$ wegen der Stetigkeit von f in z , also auch $f^*(x) \approx f^*(y)$.

□

Übung 5.22 Es seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a < b$ zwei reelle Zahlen. Wir definieren die Riemannsumme

$$S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(n) := \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right).$$

Zeigen Sie für alle unendlichen $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_a^b f(x) dx = S^*(n)^\circ.$$

Rolle des Vollständigkeitsaxioms in der Nichtstandardwelt. Wir untersuchen nun, inwieweit wir das Vollständigkeitsaxiom von $\mathbb{R}$, “Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum”, in die Nonstandardwelt übertragen können:

In der Sprache $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, einer Sprache 1. Stufe, gibt es keinen Quantor über *alle* Teilmengen A von $\mathbb{R}$; das wäre ja ein Konstrukt 2. Stufe.

Wir können das Vollständigkeitsaxiom also nicht mit dem Transferprinzip nach $\mathbb{R}^*$ übertragen, und in der Tat wird es falsch, wenn wir nach dem Supremum von *beliebigen* in $\mathbb{R}^*$ beschränkten Teilmengen fragen: Zum Beispiel besitzt die Menge $\mathbb{R}$ der standard reellen Zahlen kein Supremum in $\mathbb{R}^*$, obwohl sie nichtleer und nach oben beschränkt im folgenden Sinn ist:

$$\exists x \in \mathbb{R}^* \forall y \in \mathbb{R} : y \leq^* x,$$

wie man z.B. mit dem Prinzip vom idealen Punkt sieht.

Wir können also das Vollständigkeitsaxiom nur für manche Teilmengen von $\mathbb{R}^*$ erwarten, den sogenannten *internen* Mengen:

In Analogie zu den Klassen in der Mengenlehre definieren wir:

Definition 5.23 (interne Mengen) Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^*$ wird intern genannt, wenn es ein Prädikatensymbol $p \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit einer Stelligkeit $n+1 \in \mathbb{N}$ und n Parameter $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^*$ mit

$$A = \{x \in \mathbb{R}^* : (x, a_1, \dots, a_n) \in p^*\}$$

gibt. Andernfalls heisst die Menge $A \subseteq \mathbb{R}^*$ extern. Kann man p sogar einstellig wählen, nennen wir A eine standard Teilmenge von $\mathbb{R}^*$.

Standard Teilmengen von $\mathbb{R}^*$ sind also genau die Mengen $A = B^*$ mit $B \subseteq \mathbb{R}$.

Beispiele:

- Die Menge $]0, 1]^* = \{x \in \mathbb{R}^* : 0 <^* x \leq^* 1\}$ ist standard.
- Ist $0 <^* \epsilon \approx 0$, so ist die Menge $]0, \epsilon]^* = \{x \in \mathbb{R}^* : 0 <^* x \leq^* \epsilon\}$ zwar intern, aber nicht standard.
- Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^* : 0 <^* x \approx 0\}$ ist extern.

Satz 5.24 (Internes Vollständigkeitsprinzip) *Jede nichtleere, in $\mathbb{R}^*$ nach oben beschränkte interne Menge $A \subseteq \mathbb{R}^*$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}^*$.*

Anders gesagt: Für jede interne Menge $A \subseteq \mathbb{R}^$ gilt:*

$$(\exists x \in \mathbb{R}^* : x \in A) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}^* \forall y \in \mathbb{R}^* : y \in A \Rightarrow y \leq^* x) \\ \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R}^* : (\forall y \in \mathbb{R}^* : y \in A \Rightarrow y \leq^* x) \wedge (\forall y \in \mathbb{R}^* : y <^* x \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}^* : z \in A \wedge z >^* y))$$

Beweis: Gegeben eine Darstellung $A = \{x \in \mathbb{R}^* : (x, a_1, \dots, a_n) \in p^*\}$ von A mit Parametern $a_1, \dots, a_n$, ersetzen wir “ $x \in A$ ” in der obigen Formel durch “ $(x, a_1, \dots, a_n) \in p^*$ ”; analog für “ $y \in A$ ” und “ $z \in A$ ”. Schließlich allquantifizieren wir die $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^*$. Dann folgt die Behauptung unmittelbar mit dem Transferprinzip aus dem (klassischen) Vollständigkeitsaxiom.

□

Ausblick: Interne Mengenlehre Man kann die Nichtstandardmathematik auf zwei verschiedene Weisen betreiben: Eine Möglichkeit ist es, für den Teil der Mathematik, den man gerade betrachten möchte, ein optimal angepasstes Nonstandardmodell zu konstruieren. Das hat den Vorteil, dass man hier stets auch die volle Stärke der Metasprache einsetzen kann und somit auch beliebige externe Konstruktionen zur Verfügung hat.

Eine Alternative ist es, beliebige Modelle der gesamten Mengenlehre ZFC nonstandard zu erweitern und das “standard”-Prädikat als neues Prädikatensymbol dazuzunehmen, dann aber nur mit neuen Axiomen, die in jeder solchen Nonstandarterweiterung gelten, zu arbeiten. Eine solche konservative Erweiterung von ZFC, die “*internal set theory, IST*”, stammt von Edward Nelson.

Die Nonstandardmathematik gibt zwar viele gute neue Intuitionen und Methoden, doch wird sie in der Forschung kaum verwendet, weil sie sehr nichtkonstruktiv ist und nur wenige Mathematiker damit gut vertraut sind.

6 Induktion und Rekursion in der Mengenlehre

6.1 Ordinalzahlen

In diesem Abschnitt arbeiten wir innerhalb der Mengenlehre ZF . Erinnern Sie sich an die Klasse der Ordinalzahlen und das Nachfolgersymbol:

$$\begin{aligned}\text{On} &= \{x : \text{transitiv } x \wedge \text{linOrd } x\}, \\ N(x) &= x \cup \{x\} \quad \text{für } x \in V.\end{aligned}$$

Die Elemente von On werden *Ordinalzahlen* genannt. Es gilt:

Lemma 6.1 (Fragment der Peanoaxiome für Ordinalzahlen)

1. $0 := \emptyset \in \text{On}$.
2. Für alle $\alpha \in \text{On}$ gilt $N(\alpha) \in \text{On}$.
3. Für alle $\alpha \in \text{On}$ gilt $N(\alpha) \neq 0$.
4. Für alle $\alpha \in \text{On}$ haben wir $\bigcup N(\alpha) = \alpha$. Insbesondere folgt für alle $\alpha, \beta \in \text{On}$ mit $N(\alpha) = N(\beta)$ auch $\alpha = \beta$.

Beweis:

1. Jedes Element von $\emptyset$ ist transitiv und durch $\in$ linear geordnet, denn es gibt kein solches Element.
2. Es sei $\alpha \in \text{On}$. Zu zeigen ist, $N(\alpha)$ transitiv und $\in$ -linear geordnet ist.
Zur Transitivität von $N(\alpha)$: Seien $\gamma \in \beta \in N(\alpha)$ gegeben. Dann folgt $\beta \in \alpha$ oder $\beta = \alpha$. Falls $\beta \in \alpha$ folgt $\gamma \in \alpha \subseteq N(\alpha)$, weil die Ordinalzahl α transitiv ist, also auch $\gamma \in N(\alpha)$. Falls $\beta = \alpha$ folgt ebenfalls $\gamma \in N(\alpha)$ wegen $\gamma \in \beta = \alpha \subseteq N(\alpha)$.
Zur $\in$ -linearen Ordnung von $N(\alpha)$: Es seien $\beta, \gamma \in N(\alpha)$ gegeben. Zu zeigen ist $\beta \in \gamma$ oder $\beta = \gamma$ oder $\gamma \in \beta$. Wir wissen $\beta \in \alpha$ oder $\beta = \alpha$, und ebenso $\gamma \in \alpha$ oder $\gamma = \alpha$. Wir unterscheiden also 4 Fälle:
 - $\beta \in \alpha$ und $\gamma \in \alpha$. In diesem Fall folgt die Behauptung wegen $\alpha \in \text{On}$.
 - $\beta \in \alpha = \gamma$. Hier ist nichts mehr zu zeigen.
 - $\gamma \in \alpha = \beta$. Hier ist auch nichts mehr zu zeigen.
 - $\beta = \gamma = \alpha$. Hier ist ebenfalls nichts mehr zu zeigen.
3. Gegeben $\alpha \in \text{On}$, folgt $\alpha \in N(\alpha)$ und $\alpha \notin 0$, also $N(\alpha) \neq 0$.
4. Für $\alpha \in \text{On}$ zeigen wir zuerst $\bigcup N(\alpha) = \alpha$.
“ $\subseteq$ ”: Gegeben sei $\gamma \in \bigcup N(\alpha)$. Wir nehmen ein $\delta \in N(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ mit $\gamma \in \delta$. Im Fall $\delta \in \alpha$ folgt auch $\gamma \in \alpha$, weil $\alpha \in \text{On}$ transitiv ist. Im Fall $\delta \in \{\alpha\}$, d.h. $\delta = \alpha$,

folgt ebenfalls $\gamma \in \alpha$.

“ $\supseteq$ ”: Gegeben sei $\gamma \in \alpha$. Zusammen $\alpha \in N(\alpha)$ folgt $\gamma \in \bigcup N(\alpha)$, weil $N(\alpha)$ transitiv ist, denn $N(\alpha) \in \text{On}$ wegen Aussage 2.

Damit ist $\bigcup N(\alpha) = \alpha$ gezeigt.

Nun seien $\alpha, \beta \in \text{On}$ mit $N(\alpha) = N(\beta)$ gegeben. Dann folgt $\alpha = \bigcup N(\alpha) = \bigcup N(\beta) = \beta$.

□

Lemma 6.2 (Grundlegende Eigenschaften von Ordinalzahlen)

1. *On ist transitiv, d.h. für alle α, β mit $\alpha \in \beta \in \text{On}$ gilt $\alpha \in \text{On}$. Anders gesagt: Für alle $\beta \in \text{On}$ gilt $\beta \subseteq \text{On}$.*
2. *Für alle $\alpha, \beta \in \text{On}$ gilt die Äquivalenz $\alpha \subseteq \beta \Leftrightarrow (\alpha \in \beta \text{ oder } \alpha = \beta)$. Das Gleiche anders gesagt: $\alpha \subseteq \beta \Leftrightarrow \alpha \in N(\beta)$.*
3. *Für alle $\alpha, \beta \in \text{On}$ mit $\alpha \subseteq \beta$ und $\alpha \neq \beta$ gilt $N(\alpha) \subseteq \beta$.*
4. *Für alle $\alpha, \beta \in \text{On}$ ist $\alpha \cap \beta \in \text{On}$.*
5. *Es gilt $\text{linOrd}(\text{On})$, d.h. für alle $\alpha, \beta \in \text{On}$ gilt $\alpha \in \beta$ oder $\alpha = \beta$ oder $\beta \in \alpha$.*
6. $\text{On} \notin V$.
7. *Für alle $x \in V$ gilt die Äquivalenz*

$$x \in \text{On} \Leftrightarrow (x \subseteq \text{On} \text{ und } x \text{ ist transitiv}).$$

Beweis:

1. Es seien α, β mit $\beta \in \alpha \in \text{On}$ gegeben. Zu zeigen ist $\beta \in \text{On}$, d.h. β ist transitiv und $\in$ -linear geordnet.

β ist transitiv: Hierzu seien $\delta \in \gamma \in \beta$ gegeben. Weil $\alpha \in \text{On}$ transitiv ist, folgt erst $\gamma \in \alpha$ wegen $\gamma \in \beta \in \alpha$ und dann $\delta \in \alpha$ wegen $\delta \in \gamma \in \alpha$. Weil α als Ordinalzahl $\in$ -linear geordnet ist, folgt $\delta \in \beta$ oder $\delta = \beta$ oder $\beta \in \delta$. Der Fall $\delta = \beta$ ist nicht möglich, weil dann sowohl $\gamma \in \beta \in \gamma$ gelten würde, ein Widerspruch zum Fundierungsaxiom, weil dann $\{\beta, \gamma\}$ kein $\in$ -minimales Element hätte. Der Fall $\beta \in \delta$ ist ebenso unmöglich, weil dann $\beta \in \delta \in \gamma \in \beta$ gelten würde, so dass dann $\{\beta, \delta, \gamma\}$ kein $\in$ -minimales Element hätte, ebenfalls im Widerspruch zu FUND. Es folgt $\delta \in \beta$, wie zu zeigen war.

β ist $\in$ -linear geordnet: Hierzu seien $\gamma, \delta \in \beta$ gegeben. Mit $\beta \in \alpha$ folgt $\gamma, \delta \in \alpha$, weil α transitiv ist. Weil α $\in$ -linear geordnet ist, schließen wir $\gamma \in \delta$ oder $\gamma = \delta$ oder $\delta \in \gamma$, wie zu zeigen war.

2. Es seien $\alpha, \beta \in \text{On}$ gegeben.

“ $\Rightarrow$ ”: Es gelte $\alpha \subseteq \beta$ und $\alpha \neq \beta$. Zu zeigen ist nun $\alpha \in \beta$. Wir nehmen ein $\gamma \in \beta$ mit $\gamma \notin \alpha$. Mit FUND können wir γ sogar $\in$ -minimal wählen. Wir zeigen nun $\gamma = \alpha$:

- Behauptung: $\gamma \subseteq \alpha$. Hierzu sei $\delta \in \gamma$ gegeben; zu zeigen ist $\delta \in \alpha$. Es gilt $\delta \in \beta$ wegen $\delta \in \gamma \in \beta$, weil β transitiv ist. Weil γ $\in$ -minimal mit $\gamma \in \beta$ und $\gamma \notin \alpha$ ist, folgt $\delta \in \alpha$. Damit ist $\gamma \subseteq \alpha$ gezeigt.
- Behauptung: $\alpha \subseteq \gamma$. Hierzu sei $\delta \in \alpha$ gegeben; zu zeigen ist $\delta \in \gamma$. Mit $\delta \in \alpha \subseteq \beta$ folgt auch $\delta \in \beta$. Zusammen mit $\gamma \in \beta \in \text{On}$ folgt $\delta \in \gamma$ oder $\delta = \gamma$ oder $\gamma \in \delta$. Die Aussage $\delta \in \gamma$ ist unser Beweisziel; deshalb müssen wir $\delta = \gamma$ und $\gamma \in \delta$ ausschließen. Der Fall $\delta = \gamma$ ist wegen $\delta \in \alpha$, $\gamma \notin \alpha$ unmöglich. Ebenso ist der Fall $\gamma \in \delta$ unmöglich, weil $\gamma \in \delta \in \alpha \in \text{On}$ impliziert: $\gamma \in \alpha$, ein Widerspruch. Damit ist $\delta \in \gamma$ gezeigt.

Insgesamt ist somit $\alpha = \gamma \in \beta$ und daher der Beweisteil “ $\Rightarrow$ ” gezeigt.

“ $\Leftarrow$ ”: Falls $\alpha \in \beta$ folgt $\alpha \subseteq \beta$, da die Ordinalzahl β transitiv ist. Im Fall $\alpha = \beta$ folgt $\alpha \subseteq \beta$ trivialerweise.

3. Gegeben seien $\alpha, \beta \in \text{On}$ mit $\beta \neq \alpha \subseteq \beta$ sowie $\gamma \in N(\alpha)$. Zu zeigen ist $\gamma \in \beta$. Wir wissen $\gamma \in \text{On}$ wegen $\gamma \in N(\alpha) \in \text{On}$, weil On transitiv ist. Es ist $\gamma \in \alpha$ (1. Fall) oder $\gamma = \alpha$ (2. Fall). Im 1. Fall folgt $\gamma \in \beta$ wegen $\alpha \subseteq \beta$. Im 2. Fall wissen wir $\gamma \subseteq \beta$ und $\gamma \neq \beta$, also ebenfalls $\gamma \in \beta$ wegen Aussage 2.

4. Gegeben $\alpha, \beta \in \text{On}$, müssen wir zeigen, dass $\alpha \cap \beta$ transitiv und $\in$ -linear geordnet ist.

Zur Transitivität: Es seien $\delta \in \gamma \in \alpha \cap \beta$ gegeben. Dann folgt $\delta \in \alpha$, weil α transitiv ist, und $\delta \in \beta$, weil β transitiv ist, also zusammen $\delta \in \alpha \cap \beta$.

Zur $\in$ -linearen Ordnung: Es seien $\gamma, \delta \in \alpha \cap \beta$ gegeben. Dann folgt $\gamma, \delta \in \alpha$ und daher $\gamma \in \delta$ oder $\gamma = \delta$ oder $\delta \in \gamma$, weil α $\in$ -linear geordnet ist.

5. Gegeben seien $\alpha, \beta \in \text{On}$. Wegen Aussage 4. wissen wir $\alpha \cap \beta \in \text{On}$. Wir unterscheiden 3 Fälle:

- 1. Fall: $\alpha \cap \beta = \alpha$, also $\alpha \subseteq \beta$. In diesem Fall folgt $\alpha \in \beta$ oder $\alpha = \beta$ wegen Aussage 2.
- 2. Fall: $\alpha \cap \beta = \beta$, also $\beta \subseteq \alpha$. In diesem Fall folgt ebenso $\beta \in \alpha$ oder $\alpha = \beta$ wegen Aussage 2.
- 3. Fall: $\alpha \cap \beta \neq \alpha$ und $\alpha \cap \beta \neq \beta$. In diesem Fall folgt $\alpha \cap \beta \in \alpha$ wegen $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$ und Aussage 2. Ebenso folgt $\alpha \cap \beta \in \beta$ wegen $\alpha \cap \beta \subseteq \beta$ und Aussage 2. Zusammen bedeutet das $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$, im Widerspruch zum Fundierungsaxiom, weil dann $\{\alpha \cap \beta\}$ kein $\in$ -minimales Element enthält. Dieser Fall tritt also nicht auf.

6. Wäre $\text{On} \in V$, so wäre $\text{On} \in \text{On}$, denn On ist transitiv und $\in$ -linear geordnet nach den Aussagen 1 und 5. Das ist ein Widerspruch zum Fundierungsaxiom.

7. “ $\Rightarrow$ ”: Es sei $x \in \text{On}$. Dann ist $x \subseteq \text{On}$, weil On transitiv ist, und x ist transitiv nach Definition von On .

“ $\Leftarrow$ ”: Es sei $x \in V$ transitiv mit $x \subseteq \text{On}$. Zu zeigen ist $x \in \text{On}$. Weil x als transitiv vorausgesetzt ist, müssen wir nur mehr zu zeigen, dass $x \in$ -linear geordnet ist. Hierzu seien $\alpha, \beta \in x$ gegeben. Wegen $x \subseteq \text{On}$ folgt $\alpha, \beta \in \text{On}$ und daher $\alpha \in \beta$ oder $\alpha = \beta$ oder $\beta \in \alpha$ nach Aussage 5.

□

Für $\alpha, \beta \in \text{On}$ sei die Notation $\alpha < \beta$ oder auch $\beta > \alpha$ ein Synonym für $\alpha \in \beta$, und $\alpha \leq \beta$ oder auch $\beta \geq \alpha$ ein Synonym für $\alpha \subseteq \beta$. Nach dem Lemma gilt dann:

$$\begin{aligned}\alpha \leq \beta &\Leftrightarrow (\alpha < \beta \vee \alpha = \beta), \\ \alpha < \beta &\Leftrightarrow N(\alpha) \leq \beta.\end{aligned}$$

Erinnern Sie sich an die Definition der Menge ω der natürlichen Zahlen und das Unendlichkeitsaxiom:

$$\omega = \{x : x \in \text{On} \wedge \forall y : y \in N(x) \rightarrow y = \emptyset \vee \exists z : z \in \text{On} \wedge y = N(z)\} \in V$$

Korollar 6.3 (ω ist eine Ordinalzahl) *Es gilt $\omega \in \text{On}$.*

Beweis: Dies folgt aus Teil 7. des Lemmas (6.2), denn $V \ni \omega \subseteq \text{On}$ und ω ist transitiv: Ist nämlich $n \in m \in \omega$, so folgt $n \in \text{On}$, denn On ist transitiv, und zudem gilt

$$\forall y : y \in N(n) \rightarrow y = \emptyset \vee \exists z : z \in \text{On} \wedge y = N(z)$$

wegen $N(n) \subseteq N(m)$ und

$$\forall y : y \in N(m) \rightarrow y = \emptyset \vee \exists z : z \in \text{On} \wedge y = N(z).$$

□

Insbesondere sind auch $N(\omega), N(N(\omega)), N(N(N(\omega))), \dots$ Ordinalzahlen, aber keine natürlichen Zahlen.

Korollar 6.4 *Für alle $x \in V$ mit $x \subseteq \text{On}$ ist $\bigcup x \in \text{On}$.*

Beweis: Wir wenden nochmal Teil 7. des Satzes 6.2 an. Nach dem Vereinigungsaxiom ist $\bigcup x \in V$. Weiter ist x transitiv. Um das zu sehen, seien $\alpha < \beta \in \bigcup x$ gegeben. Wir nehmen ein $\gamma \in x$ mit $\beta < \gamma$, dann folgt auch $\alpha < \gamma$, also $\alpha \in \bigcup x$.

□

Die Klasse der Ordinalzahlen wird in 3 Teile partitioniert:

1. Die Null $0 \in \text{On}$,
2. Nachfolgerordinalzahlen, also Ordinalzahlen der Gestalt $N(\alpha)$ mit $\alpha \in \text{On}$,

3. “Limesordinalzahlen”, das sind alle übrigen Ordinalzahlen.

Die Menge ω der natürlichen Zahlen ist die kleinste Limesordinalzahl.

Übung 6.5 Zeigen Sie: Eine Ordinalzahl $\alpha \neq 0$ ist genau dann eine Limesordinalzahl, wenn $\bigcup \alpha = \alpha$ gilt.

Übung 6.6 (Charakteristische Eigenschaft von Paaren in der Mengenlehre) Zeigen Sie in ZF für alle $x_1, y_1, x_2, y_2 \in V$:

$$(x_1, y_2) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2.$$

Erinnerung: $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

6.2 Induktion in der Mengenlehre

Induktion spielt in der Mathematik und natürlich insbesondere in der Logik eine wesentliche Rolle. Dabei tritt nicht nur vollständige Induktion auf, also Induktion über die natürlichen Zahlen, sondern auch allgemeinere Induktionsschemata. Ein Beispiel sind Induktionen über den Aufbau von Formeln oder Herleitungen, wie wir sie in dieser Vorlesung schon oft verwendet haben.

In diesem Abschnitt arbeiten wir wieder in ZF. Auch um daran zu erinnern, schreiben wir ω statt $\mathbb{N}_0$ für die Menge der natürlichen Zahlen.

Allgemeine Induktion in einer Klasse K bezieht sich auf eine zweistellige Relation $\triangleleft \subseteq K \times K$. Sie muss wohlfundiert im Sinne der folgenden Definition sein:

Definition 6.7 (Wohlfundierte Relationen) Eine Relation $\triangleleft \subseteq K \times K$ auf einer Klasse K heißt fundiert, wenn gilt:

$$\forall x : \emptyset \neq x \subseteq K \Rightarrow \exists z : z \in x \wedge \forall u : u \triangleleft z \Rightarrow u \notin x.$$

Das bedeutet, dass jede nichtleere Teilmenge x von K ein bezüglich $\triangleleft$ minimales Element besitzen muss.²⁸

Gilt zusätzlich

$$\forall x \in K : \{y \in K : y \triangleleft x\} \in V,$$

so heißt $\triangleleft$ wohlfundiert.

Beispiel 6.8 (Wohlfundiertheit der Elementrelation) Die Elementrelation

$$\in = \{z : \exists x \exists y z = (x, y) \wedge x \in y\} \subseteq V \times V$$

ist fundiert nach dem Fundierungsaxiom. Sie ist sogar wohlfundiert, denn für alle $x \in V$ gilt nach der Definition der Gleichheit:

$$\{y : y \in x\} = x \in V.$$

²⁸Man beachte aber, dass wir *nicht* fordern, dass $\triangleleft$ eine transitive Relation sein soll.

Wohlfundiertheit bleibt unter Verkleinerung von Relationen erhalten:

Lemma-Schema 6.9 (Erhaltung der Wohlfundiertheit bei Verkleinerung) ²⁹ Für alle Klassen $K' \subseteq K \subseteq V$ und Relationen $\triangleleft' \subseteq K' \times K'$ und $\triangleleft \subseteq K \times K$ mit $\triangleleft' \subseteq \triangleleft$ gilt: Ist $\triangleleft$ wohlfundiert, so auch $\triangleleft'$.

Beweis: $\triangleleft'$ ist fundiert: Hierzu sei $\emptyset \neq x \subseteq K'$ gegeben. Insbesondere folgt $x \subseteq K$ wegen $K' \subseteq K$. Mit der Fundiertheit von $\triangleleft$ nehmen wir ein $z \in x$, so dass für alle $u \in K$ mit $u \triangleleft z$ gilt: $u \notin x$. Dann folgt erst recht für alle $u \in K'$ mit $u \triangleleft' z$ auch $u \triangleleft z$ wegen $\triangleleft' \subseteq \triangleleft$, also $u \notin x$.

$\triangleleft'$ ist wohlfundiert: Gegeben $x \in K'$, gilt

$$\{y \in K' : y \triangleleft' x\} \subseteq \{y \in K : y \triangleleft x\} \in V,$$

weil $\triangleleft$ wohlfundiert ist, also auch $\{y \in K' : y \triangleleft' x\} \in V$ mit Aussonderung.

□

Beispiel 6.10 (Wohlfundiertheit der $<$ -Relation auf On) Die $<$ -Relation auf der Klasse der Ordinalzahlen

$$< = \in \cap (\text{On} \times \text{On})$$

ist wohlfundiert, da $< \subseteq \in$ und $\in$ wohlfundiert ist. Ebenso ist die Kleinerrelation $< \cap (\omega \times \omega)$ auf der Menge ω der natürlichen Zahlen wohlfundiert.

Beispiel 6.11 (Wohlfundiertheit der Nachfolgerrelation auf ω) Die Nachfolgerrelation auf ω

$$S := \{z : \exists m \in \omega \exists n \in \omega : n = N(m) \wedge z = (m, n)\} \subseteq \omega \times \omega$$

ist wohlfundiert, da $S \subseteq \in$.

Allgemeine Induktionen beruhen nun auf dem folgenden Schema:

Satz-Schema 6.12 (Allgemeines Induktionsprinzip) Es sei $\triangleleft \subseteq K \times K$ eine wohlfundierte Relation auf einer Klasse K . Dann gilt für alle Klassen $A \subseteq K$:

$$[\forall x \in K : (\forall y \in K : y \triangleleft x \Rightarrow y \in A) \Rightarrow x \in A] \Rightarrow A = K$$

²⁹Der Zusatz "Schema" soll andeuten, dass über Klassen allquantifiziert wird, was natürlich einer metasprachlichen Allquantifizierung über Klassenterme zusammen mit einer objektsprachlichen Allquantifizierung über alle freien Variablen in den Klassentermen entspricht. Es ist also aus Sicht der Metasprache ein Schema, mit dem Klassentermen $K, K', \triangleleft, \triangleleft'$ eine in ZF herleitbare Formel zugeordnet wird.

Beweis im Fall $K \in V$: Wir beweisen den Satz zuerst im Fall, dass K eine Menge ist. In diesem Fall sei $A \subseteq K$ mit

$$\forall x \in K : (\forall y \in K : y \triangleleft x \Rightarrow y \in A) \Rightarrow x \in A \quad (37)$$

gegeben. Wir betrachten $K \setminus A = \{x : x \in K \wedge x \notin A\}$; zu zeigen ist $K \setminus A = \emptyset$; nehmen wir also für einen indirekten Beweis $K \setminus A \neq \emptyset$ an. Wegen der Annahme $K \setminus A \subseteq K \in V$ ist auch $K \setminus A \in V$ mittels Aussonderung. Weil $\triangleleft$ fundiert ist, finden wir ein $x \in K \setminus A$, so dass für alle $y \in K$ mit $y \triangleleft x$ gilt: $y \notin K \setminus A$, also $y \in A$. Die Prämisse in (37) ist also erfüllt, und wir schließen $x \in A$ im Widerspruch zu $x \in K \setminus A$.

□

Der Spezialfall der Nachfolgerrelation auf ω führt uns zum bekannten Prinzip der vollständigen Induktion:

Satz 6.13 (vollständige Induktion) *Für alle $A \subseteq \omega$ gilt:*

$$0 \in A \wedge (\forall m \in \omega : m \in A \Rightarrow N(m) \in A) \Rightarrow A = \omega$$

Beweis: Gegeben sei $A \subseteq \omega$ mit $0 \in A$ und

$$\forall m \in \omega : m \in A \Rightarrow N(m) \in A \quad (38)$$

Nach dem Unendlichkeitsaxiom wissen wir $\omega \in V$, so dass das Induktionsprinzip für *Mengen* anwendbar ist. Weil die Nachfolgerrelation $S \subseteq \omega \times \omega$ wohlfundiert ist, genügt es nach dem allgemeinen Induktionsprinzip Folgendes zu zeigen:

$$\forall n \in \omega : (\forall m \in \omega : n = N(m) \Rightarrow m \in A) \Rightarrow n \in A \quad (39)$$

Hierzu sei $n \in \omega$ mit

$$\forall m \in \omega : n = N(m) \Rightarrow m \in A \quad (40)$$

gegeben. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $n = 0$. In diesem Fall gilt $n = 0 \in A$ nach Voraussetzung.
2. Fall: $n \neq 0$. Dann gibt es ein $m \in \text{On}$ mit $n = N(m)$; hierbei verwenden wir $n \in N(n)$ und die Definition von ω :

$$n \in \omega \Leftrightarrow n \in \text{On} \wedge \forall k \in N(n) : (k = 0 \vee \exists \alpha \in \text{On} : k = N(\alpha))$$

Nun ist sogar $m \in \omega$, denn für alle $k \in N(m) = n \subseteq N(n)$ gilt $k = 0$ oder $\exists l \in \text{On} : k = N(l)$ wegen $n \in \omega$. Mit der Voraussetzung (40) schließen wir $m \in A$, und weiter mit (38): $n \in A$. Damit ist (39) gezeigt.

□

Für den Beweis des allgemeinen Induktionsprinzips für Klassen brauchen wir noch einige Vorbereitungen:

Definition 6.14 (transitiver Abschluss von Relationen) Es sei $\triangleleft \subseteq K \times K$ eine zweistellige Relation auf einer Klasse K . Wir definieren die von einem Parameter $n \in \omega$ abhängige Relation

$$\triangleleft_n := \{z : \exists f \exists x \exists y : f : N(N(n)) \longrightarrow K \wedge f(0) = y \wedge f(N(n)) = x \\ \wedge \forall m \in N(n) : f(N(m)) \triangleleft f(m) \wedge z = (x, y)\} \subseteq K \times K.$$

sowie

$$\triangleleft^* := \{z : \exists x \in K \exists y \in K \exists n \in \omega : x \triangleleft_n y \wedge z = (x, y)\}.$$

Die Relation $\triangleleft^*$ wird der transitive Abschluss von $\triangleleft$ genannt.

Lemma-Schema 6.15 Für jede zweistellige Relation $\triangleleft \subseteq K \times K$, $n \in \omega$ und $x, y \in K$ gelten die Äquivalenzen

$$x \triangleleft_0 y \Leftrightarrow x \triangleleft y, \quad (41)$$

$$x \triangleleft_{N(n)} y \Leftrightarrow \exists z \in K : x \triangleleft z \wedge z \triangleleft_n y, \quad (42)$$

$$x \triangleleft_{N(n)} y \Leftrightarrow \exists z \in K : x \triangleleft_n z \wedge z \triangleleft y. \quad (43)$$

Beweis: “ $\Rightarrow$ ” in (41): Es seien $x, y \in K$ mit $x \triangleleft_0 y$ gegeben. Wir nehmen $f : 2 = \{0, 1\} \rightarrow K$ mit $x = f(1) \triangleleft f(0) = y$. Insbesondere gilt die Behauptung $x \triangleleft y$.

“ $\Leftarrow$ ” in (41): Es seien $x, y \in K$ mit $x \triangleleft y$ gegeben. Wir setzen $f = \{(0, y), (1, x)\} : \{0, 1\} \rightarrow K$. Insbesondere folgt $f : \{0, 1\} \rightarrow K$, $f(1) = x \triangleleft y = f(0)$ und daher $x \triangleleft_0 y$.

“ $\Rightarrow$ ” in (42): Es seien $n \in \omega$ und $x, y \in K$ mit $x \triangleleft_{N(n)} y$ gegeben. Wir nehmen $f : N(N(N(n))) \rightarrow K$ hierzu wie in der Definition von $\triangleleft_{N(n)}$. Wir setzen $g := f \cap (N(N(n)) \times K)$ und $z = f(N(n)) \in K$. Dann folgen $g : N(N(n)) \rightarrow K$, $g(0) = y$, und für alle $m \in N(n)$: $g(N(m)) \triangleleft g(m)$, also $z \triangleleft_n y$ sowie $x = f(N(N(n))) \triangleleft f(N(n)) = z$, wie zu zeigen war.

“ $\Leftarrow$ ” in (42): Es seien $x, y, z \in K$ mit $x \triangleleft z \triangleleft_n y$ gegeben. Wir nehmen $g : N(N(n)) \rightarrow K$ mit $g(0) = y$, $g(N(n)) = z$ und $g(N(m)) \triangleleft g(m)$ für alle $m \in N(n)$ gemäß der Definition der Aussage $z \triangleleft_n y$. Weiter setzen wir $f := g \cup \{(N(N(n)), x)\}$. Dann folgt wegen $f(N(N(n))) = x \triangleleft z = f(N(n))$ auch $f(N(m)) \triangleleft f(m)$ sogar für alle $m \in N(N(n))$. Mit der Definition von $\triangleleft_{N(n)}$ schließen wir $x \triangleleft_{N(n)} y$.

“ $\Leftrightarrow$ ” in (43) durch Induktion über n :

Induktionsanfang, $n = 0$:

$$x \triangleleft_1 y \stackrel{\text{wg. (42)}}{\Leftrightarrow} \exists z \in K : x \triangleleft z \wedge z \triangleleft_0 y \stackrel{\text{wg. (41)}}{\Leftrightarrow} \exists z \in K : x \triangleleft_0 z \wedge z \triangleleft y$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein gegebenes $n \in \omega$ gelte (43).

Induktionsschluss: Dann folgen die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
x \triangleleft_{N(N(n))} y &\stackrel{\text{wg. (42)}}{\Leftrightarrow} \exists w \in K : x \triangleleft w \wedge w \triangleleft_{N(n)} y \\
&\stackrel{\text{wg. I.V.}}{\Leftrightarrow} \exists z, w \in K : x \triangleleft w \wedge w \triangleleft_n z \wedge z \triangleleft y \\
&\stackrel{\text{wg. (42)}}{\Leftrightarrow} \exists z \in K : x \triangleleft_{N(n)} z \wedge z \triangleleft y.
\end{aligned}$$

□

Übung 6.16 *Es sei $\triangleleft \subseteq K \times K$ eine zweistellige Relation auf einer Klasse K und $\triangleleft^*$ ihr transitiver Abschluss. Zeigen Sie, dass $\triangleleft^*$ transitiv ist, d.h.*

$$\forall x, y, z \in K : x \triangleleft^* y \wedge y \triangleleft^* z \Rightarrow x \triangleleft^* z.$$

Korollar 6.17 *Für alle $x, y \in K$ mit $x \triangleleft^* y$ gilt mindestens eine der beiden folgenden Aussagen:*

1. $x \triangleleft y$.
2. $\exists z \in K : x \triangleleft^* z \triangleleft y$.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus der Definition von $\triangleleft^*$ und dem Lemma 6.15, da $x \triangleleft_0 y$ oder $x \triangleleft_{N(n)} y$ für ein $n \in \omega$ gilt.

□

Lemma-Schema 6.18 (Wohlfundiertheit vererbt sich auf den transitiven Abschluss) *Es sei $\triangleleft$ eine wohlfundierte Relation auf K und $\triangleleft^*$ ihr transitiver Abschluss. Dann ist auch $\triangleleft^*$ wohlfundiert.*

Beweis:

- *Erstes Beweisziel:* $\forall x \in K : \{y \in K : y \triangleleft^* x\} \in V$.

Es sei $x \in K$ gegeben. Wir setzen $A_n = \{y \in K : y \triangleleft_n x\}$ für $n \in \omega$. Wir zeigen nun $A_n \in V$ für alle $n \in \omega$ durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $A_0 = \{y \in K : y \triangleleft x\} \in V$ folgt aus der Wohlfundiertheit von $\triangleleft$. Gegeben $n \in \omega$, nehmen wir als *Induktionsvoraussetzung* $A_n \in V$ an.

Induktionsschluss: Wegen der Wohlfundiertheit von $\triangleleft$ gilt für alle $z \in A_n$ die Aussage $\{y \in K : y \triangleleft z\} \in V$. Wir definieren $f : A_n \rightarrow V$, $f(z) := \{y \in K : y \triangleleft z\}$. Mit anderen Worten: $f = \{u : \exists z \in A_n : u = (z, \{y \in K : y \triangleleft z\})\}$. Es folgt $f[A_n] \in V$ nach dem Ersetzungsschema, also auch mit dem Vereinigungsaxiom

$$\begin{aligned}
V \ni \bigcup f[A_n] &= \{y \in K : \exists z \in A_n : y \triangleleft z\} \\
&= \{y \in K : \exists z \in K : y \triangleleft z \triangleleft_n x\} = \{y \in K : y \triangleleft_{N(n)} x\} = A_{N(n)}.
\end{aligned}$$

Damit ist $A_n \in V$ für alle $n \in \omega$ durch vollständige Induktion gezeigt.

Wir setzen nun $g : \omega \rightarrow V$, $g(n) := A_n$, also $g = \{(n, A_n) : n \in \omega\}$.³⁰ Nach dem Ersetzungsschema ist $g[\omega] \in V$, weil $\omega \in V$ nach dem Unendlichkeitsaxiom gilt. Es folgt nach dem Ersetzungsschema $g[\omega] \in V$, also nach dem Vereinigungsaxiom:

$$V \ni \bigcup_{n \in \omega} A_n := \bigcup g[\omega] = \{y \in K : \exists n \in \omega : y \triangleleft_n x\} = \{y \in K : y \triangleleft^* x\}. \quad (44)$$

- *Zweites Beweisziel: Fundiertheit von $\triangleleft^*$.* Hierzu sei $a \in V$ mit $\emptyset \neq a \subseteq K$ gegeben. Wir setzen

$$b := \{y \in K : \exists z, x \in a : z \triangleleft^* y \triangleleft^* x\}.$$

Wir erhalten

$$b \subseteq \{y \in K : \exists x \in a : y \triangleleft^* x\} = \bigcup_{x \in a} \{y \in K : y \triangleleft^* x\}^{31} \in V, \quad (45)$$

wobei wir $a \in V$, Aussage (44), das Ersetzungsschema und das Vereinigungsaxiom verwendet haben. Es folgt auch $b \in V$ mittels Aussonderung, also $\emptyset \neq a \cup b \in V$ sowie $a \cup b \subseteq K$. Mit der Wohlfundiertheit von $\triangleleft$ nehmen wir ein in $a \cup b$ $\triangleleft$ -minimales $y \in a \cup b$.

Wir zeigen nun $y \notin b$: Annahme $y \in b$, dann finden wir $z, w \in a$ mit $z \triangleleft^* y \triangleleft^* w$, also $z \triangleleft y \triangleleft^* w$ oder $\exists u \in b : z \triangleleft^* u \triangleleft y \triangleleft^* w$ im Widerspruch zur $\triangleleft$ -Minimalität von y in $a \cup b$. Wir schließen $y \in a$.

Wir zeigen nun, dass $y \triangleleft^*$ -minimal in a ist. Angenommen, wir haben $z \in a$ mit $z \triangleleft^* y$. Mit Korollar 6.17 folgt $z \triangleleft y$ oder $\exists u \in b : z \triangleleft^* u \triangleleft y$. Beides widerspricht der $\triangleleft$ -Minimalität von y in $a \cup b$.

Damit ist die Fundiertheit von $\triangleleft^*$ gezeigt.

Beide Beweisteile zusammen liefern die Wohlfundiertheit von $\triangleleft^*$.

□

Beispiel 6.19

Der transitive Abschluss $\in^$ der Elementrelation ist wohlfundiert, weil $\in$ wohlfundiert ist. Also ist auch z.B. die Relation $\triangleleft \subseteq V \times V$,*

$$x \triangleleft y :\Leftrightarrow \exists z : (x, z) = y \vee (z, x) = y$$

wohlfundiert, weil $\triangleleft \subseteq \in^$.*

³⁰Das ist natürlich eine Kurznotation für $g = \{u : \exists n : n \in \omega \wedge u = (n, A_n)\}$.

³¹Das ist eine Abkürzung für $\bigcup F[A]$, wobei $F : A \rightarrow V$, $F(x) = \{y \in K : y \triangleleft^* x\}$. Es ist $F[A] \in V$ nach dem Ersetzungsschema, da $A \in V$.

Beweis des Satzschemas 6.12 (allgemeines Induktionsprinzip) für Klassen: Gegeben eine wohlfundierte Relation $\triangleleft \subseteq K \times K$ auf einer Klasse K und eine Teilklasse $A \subseteq K$, nehmen wir an:

$$\forall x \in K : (\forall y \in K : y \triangleleft x \Rightarrow y \in A) \Rightarrow x \in A \quad (46)$$

Zu zeigen ist $K \subseteq A$, denn zusammen mit $A \subseteq K$ folgt dann $A = K$. Hierzu sei $x \in K$ gegeben. Weil $\triangleleft$ wohlfundiert ist, ist auch der transitive Abschluss $\triangleleft^*$ wohlfundiert, so dass

$$k := \{y \in K : y \triangleleft^* x\} \cup \{x\} \in V$$

und damit mit Aussonderung auch $a := k \cap A \in V$ folgt. Wir zeigen nun $a = k$, denn hieraus folgt die Behauptung $x \in A$ wegen $x \in k = a \subseteq A$. Zum Nachweis von $a = k$ wenden wir das schon bewiesene Induktionsprinzip für *Mengen* auf die wohlfundierte Relation $\triangleleft' := \triangleleft \cap (k \times k)$, die Menge k und die Teilmenge $a \subseteq k$ an. Wir müssen also für alle $y \in k$ zeigen:

$$\{z \in k : z \triangleleft' y\} \subseteq a \Rightarrow y \in a$$

Gegeben $y \in k$ mit $\{z \in k : z \triangleleft' y\} \subseteq a$, folgt mit der Definition von k und der Transitivität von $\triangleleft^*$:

$$\{z \in K : z \triangleleft y\} \subseteq \{z \in k : z \triangleleft' y\} \subseteq a \subseteq A,$$

also $y \in A$ wegen der Annahme (46), und damit $y \in k \cap A = a$, wie zu zeigen war. $\square$

Beispiel 6.20 (Zwei Induktionsprinzipien für echte Klassen)

1. **Induktionsprinzip für die $\in$ -Relation:** Für jede Klasse A gilt:

$$[\forall x : x \subseteq A \Rightarrow x \in A] \Rightarrow A = V. \quad (47)$$

Das ist das allgemeine Induktionsprinzip angewandt auf die wohlfundierte Relation $\in \subseteq V \times V$.

2. **Prinzip der transfiniten Induktion:** Für jede Klasse $A \subseteq \text{On}$ gilt:

$$[\forall \alpha \in \text{On} : \alpha \subseteq A \Rightarrow \alpha \in A] \Rightarrow A = \text{On}.$$

Das ist das allgemeine Induktionsprinzip angewandt auf die wohlfundierte Relation $< \subseteq \text{On} \times \text{On}$.

6.3 Rekursion in der Mengenlehre

Induktion bezieht sich auf den *Beweis* von Aussagen unter Rückgriff auf vorhergehende Instanzen ebendieser Aussagen, während sich *Rekursion* auf die *Definition* von Objekten unter Rückgriff auf vorhergehende Instanzen ebendieser Objekte bezieht. In beiden Fällen ist “vorhergehend” im Bezug auf eine wohlfundierte Relation $\triangleleft$ auf einer Klasse K gemeint. Wir kürzen für $x \in K$ ab:

$$\text{less}(x, \triangleleft) := \{y : y \triangleleft x\} \quad (48)$$

Satz-Schema 6.21 (Rekursionssatz der Mengenlehre) *Es seien K und A Klassen, $\triangleleft \subseteq K \times K$ eine wohlfundierte Relation auf K , und*

$$R : \{(x, f) : x \in K, f : \text{less}(x, \triangleleft) \longrightarrow A\} \longrightarrow A \quad (49)$$

eine Funktion. Dann gibt es³² genau eine Funktion $F : K \rightarrow A$, so dass für alle $x \in K$ gilt:

$$F(x) = R(x, F \cap (\text{less}(x, \triangleleft) \times A)). \quad (50)$$

Die Funktion F wird die durch die Rekursionsvorschrift R rekursiv definierte Funktion genannt. Die Gleichung (50) heißt die zugehörige Rekursionsgleichung.

Die Rekursionsvorschrift legt also für gegebenes $x \in K$ und gegebenen Funktionswerten $F(y)$ mit $y \triangleleft x$ fest, was der Funktionswert $F(x)$ sein soll.

Beweis des Rekursionssatzes:

Zur Existenz von F : Es sei $\triangleleft^*$ der transitive Abschluss von $\triangleleft$. Wir definieren für $x \in K$ den “Sockel” von x so:

$$\text{founding}(x, \triangleleft) := \{y \in K : y \triangleleft^* x\} \cup \{x\} = \text{less}(x, \triangleleft^*) \cup \{x\}.$$

Weil mit $\triangleleft$ auch $\triangleleft^*$ wohlfundiert ist, ist der Sockel stets eine Menge:

$$\forall x \in K : \text{founding}(x, \triangleleft) \in V.$$

Wir setzen

$$F := \bigcup \mathcal{I} \quad (51)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{I} := \{ & f : \exists x \in K : f : \text{founding}(x, \triangleleft) \longrightarrow A, \\ & \forall y \in \text{founding}(x, \triangleleft) : f(y) = R(y, f \cap (\text{less}(y, \triangleleft) \times A)) \}. \end{aligned} \quad (52)$$

Die Klasse $\mathcal{I}$ besteht also aus allen partiellen Lösungen der Rekursionsgleichung, die auf Anfangsstücken, “Sockeln”, definiert sind. Die Klasse F ist also die Vereinigung aller dieser partiellen Lösungen.

Wir zeigen zuerst, dass F eine partiell definierte Funktion vom Typ $F : K \dashrightarrow A$ ist. Hierzu stellen wir zuerst fest, dass $F \subseteq K \times A$ gilt, weil $f \subseteq K \times A$ für alle $f \in \mathcal{I}$ gilt. Nun betrachten wir die Klasse

$$B := \{x \in K : \forall a_1, a_2 \in A : (x, a_1) \in F \wedge (x, a_2) \in F \Rightarrow a_1 = a_2\};$$

³²Diese Existenzaussage für eine *Klasse* ist auf der Metaebene konstruktiv gemeint: Im Beweis wird ein F definierender Klassenterm explizit angegeben.

zu zeigen ist also $B = K$. Wir zeigen das durch Induktion bezüglich $\triangleleft$. Nach dem allgemeinen Induktionsprinzip ist also zu zeigen:

$$\forall x \in K : (\forall y \in K : y \triangleleft x \Rightarrow y \in B) \Rightarrow x \in B. \quad (53)$$

Hierzu sei $x \in K$ mit

$$\forall y \in K : y \triangleleft x \Rightarrow y \in B \quad (54)$$

gegeben; zu zeigen ist nun $x \in B$. Hierzu seien $a_1, a_2 \in A$ mit $(x, a_1), (x, a_2) \in F$ gegeben; zu zeigen ist nun $a_1 = a_2$. Wir nehmen $f_1, f_2 \in \mathcal{I}$ mit $(x, a_1) \in f_1$ und $(x, a_2) \in f_2$, anders gesagt $x \in \text{domain}(f_1)$ und $x \in \text{domain}(f_2)$ mit $f_1(x) = a_1$ und $f_2(x) = a_2$. Wir wissen

$$\text{less}(x, \triangleleft) \subseteq \text{domain}(f_1) \cap \text{domain}(f_2), \quad (55)$$

weil $\text{domain}(f_1)$ und $\text{domain}(f_2)$ bezüglich $\triangleleft$ transitiv sind. Nach der Definition von $\mathcal{I}$ gilt

$$f_1(x) = R(x, f_1 \cap (\text{less}(x, \triangleleft) \times A)), \quad (56)$$

$$f_2(x) = R(x, f_2 \cap (\text{less}(x, \triangleleft) \times A)). \quad (57)$$

Nach der Induktionsvoraussetzung (54) haben wir $\text{less}(x, \triangleleft) \subseteq B$ und daher

$$f_1 \cap (\text{less}(x, \triangleleft) \times A) = F \cap (\text{less}(x, \triangleleft) \times A) = f_2 \cap (\text{less}(x, \triangleleft) \times A)$$

nach der Definition von B und wegen $f_1, f_2 \subseteq F$ und der Inklusion (55). Mit den Rekursionsgleichungen (56) und (57) schließen wir

$$a_1 = f_1(x) = R(x, f_1 \cap (\text{less}(x, \triangleleft) \times A)) = R(x, f_2 \cap (\text{less}(x, \triangleleft) \times A)) = f_2(x) = a_2,$$

wie zu zeigen war.

Wir betrachten den Definitionsbereich von F , gegeben durch

$$\text{domain}(F) = \{x : \exists y (x, y) \in F\}.$$

Nun zeigen wir, dass F total definiert ist und überall die Rekursionsgleichung erfüllt.

Hierzu definieren wir die Klasse

$$C = \{x \in K : \text{founding}(x, \triangleleft) \subseteq \text{domain}(F), \\ \forall y \in \text{founding}(x, \triangleleft) : F(y) = R(y, F \cap (\text{less}(y, \triangleleft) \times A))\}$$

und zeigen $C = K$ durch Induktion über die wohlfundierte Relation $\triangleleft^*$; weil $x \in \text{founding}(x, \triangleleft)$ für alle $x \in K$ gilt, leistet dann F das Gewünschte.

Gegeben $x \in K$, nehmen wir als Induktionsvoraussetzung $\text{less}(x, \triangleleft^*) \subseteq C$ an; zu zeigen ist nun $x \in C$. Gegeben $y \in \text{founding}(x, \triangleleft)$ ist also $y \in \text{domain}(F)$ und $F(y) = R(y, F \cap (\text{less}(y, \triangleleft) \times A))$ zu zeigen. Im Fall $y \triangleleft^* x$ folgt das schon aus der Induktionsvoraussetzung. Zu zeigen ist also noch $x \in \text{domain}(F)$ und $F(x) = R(x, F \cap (\text{less}(x, \triangleleft) \times A))$. Aus der Induktionsvoraussetzung und wegen $F : K \dashrightarrow A$ folgt

$$(F \cap (\text{less}(x, \triangleleft^*) \times A)) : \text{less}(x, \triangleleft^*) \longrightarrow A,$$

so dass wegen $\text{less}(x, \triangleleft) \subseteq \text{less}(x, \triangleleft^*)$ und $x \notin \text{less}(x, \triangleleft^*)$ die um ein Wertepaar fortgesetzte Abbildung

$$\begin{aligned} f &: \text{founding}(x, \triangleleft) \longrightarrow A, \\ f &:= [F \cap (\text{less}(x, \triangleleft^*) \times A)] \cup \{(x, R(x, F \cap (\text{less}(x, \triangleleft) \times A)))\} \end{aligned}$$

wohldefiniert ist. Insbesondere gilt nach Definition

$$f(x) = R(x, F \cap (\text{less}(x, \triangleleft) \times A)), \quad (58)$$

aber auch für alle $y \in \text{less}(x, \triangleleft^*)$:

$$f(y) = F(y) = R(y, F \cap (\text{less}(y, \triangleleft) \times A)) = R(y, f \cap (\text{less}(y, \triangleleft) \times A)),$$

weil $\{y\} \cup \text{less}(y, \triangleleft) \subseteq \text{less}(x, \triangleleft^*) \subseteq C$ wegen der Induktionsvoraussetzung gilt. Dies zeigt $f \in \mathcal{I}$. Nach der Definition von F folgt $F \supseteq f$, und damit

$$x \in \text{domain}(F) \quad \text{und} \quad F(x) = f(x) = R(x, F \cap (\text{less}(x, \triangleleft) \times A)),$$

was noch zu zeigen war. Damit ist die Induktionsbehauptung $x \in C$ gezeigt.

Zur Eindeutigkeit von F : Es seien zwei Funktionen $F_1, F_2 : K \rightarrow A$ gegeben, die beide die Rekursionsgleichung (50) erfüllen. Zu zeigen ist $F_1 = F_2$. Wir setzen hierzu

$$D := \{x \in K : F_1(x) = F_2(x)\}$$

und zeigen $D = K$ durch Induktion bezüglich $\triangleleft$. Gegeben $x \in K$, nehmen wir als Induktionsvoraussetzung $\text{less}(x, \triangleleft) \subseteq D$ an. Dann folgt insbesondere

$$F_1 \cap (\text{less}(x, \triangleleft) \times A) = F_2 \cap (\text{less}(x, \triangleleft) \times A)$$

und daher

$$F_1(x) = R(x, F_1 \cap (\text{less}(x, \triangleleft) \times A)) = R(x, F_2 \cap (\text{less}(x, \triangleleft) \times A)) = F_2(x),$$

also $x \in D$, was zu zeigen war. □

Der folgende Spezialfall des Rekursionssatzes für natürliche Zahlen ist vermutlich die in der Mathematik außerhalb der Mengenlehre am häufigsten verwendete Variante:

Korollar 6.22 (Einfacher Rekursionssatz über ω) *Gegeben seien eine Klasse A , ein Objekt $a \in A$ eine Abbildung $r : \omega \times A \longrightarrow A$. Dann gibt es genau eine Abbildung $F : \omega \longrightarrow A$ mit $F(0) = a$, die für alle $n \in \omega$ die Rekursionsgleichung*

$$F(N(n)) = r(n, F(n)) \quad (59)$$

erfüllt.

Beweis (Skizze): Für die Nachfolgerrelation

$$S = \{(n, N(n)) : n \in \omega\} \subseteq (\omega \times \omega) \cap \in$$

gilt $\text{less}(0, S) = \emptyset$ und $\text{less}(N(n), S) = \{n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Rekursionssatz, angewandt auf die Rekursionsvorschrift

$$R := \{((0, \emptyset), a)\} \cup \{((N(n), f), r(n, f(n))) : n \in \omega, f : \{n\} \rightarrow A\},$$

liefert die Existenz und Eindeutigkeit der gesuchten Funktion F . □

Statt die Rekursionsvorschrift explizit in Mengennotation hinzuschreiben, geben wir meist nur die wohlfundierte Relation $\triangleleft$ und die Rekursionsgleichung an. Der Ausdruck “rekursive Definition” ist dann als ein Hinweis zu lesen, dass der Rekursionssatz angewandt wird.

Beispiel 6.23 (Ordinalzahlarithmetik) *Für fixiertes $\alpha \in \text{On}$ definieren wir die Addition $\alpha + \cdot : \text{On} \longrightarrow \text{On}$, die Multiplikation $\alpha \cdot \cdot : \text{On} \longrightarrow \text{On}$ und die Potenz $\alpha^\cdot : \text{On} \longrightarrow \text{On}$ rekursiv so:*

1. Addition:

$$\alpha + 0 := \alpha, \quad (60)$$

$$\alpha + N(\beta) := N(\alpha + \beta) \quad \text{für Nachfolgerordinalzahlen } N(\beta) \text{ mit } \beta \in \text{On}, \quad (61)$$

$$\alpha + \beta := \bigcup \{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\}^{33} \quad \text{für Limesordinalzahlen } \beta. \quad (62)$$

2. Multiplikation:

$$\alpha \cdot 0 := 0, \quad (63)$$

$$\alpha \cdot N(\beta) := \alpha \cdot \beta + \alpha^{34} \quad \text{für Nachfolgerordinalzahlen } N(\beta) \text{ mit } \beta \in \text{On}, \quad (64)$$

$$\alpha \cdot \beta := \bigcup \{\alpha \cdot \gamma : \gamma < \beta\} \quad \text{für Limesordinalzahlen } \beta. \quad (65)$$

³³Für $V \ni x \subseteq \text{On}$ ist $\bigcup x$ die kleinste Ordinalzahl β mit $\beta \geq \gamma$ für alle $\gamma \in x$. Nach dem Ersetzungsschema wissen wir $\{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\} \in V$.

³⁴zu lesen als $(\alpha \cdot \beta) + \alpha$ mit der Konvention “Punkt vor Strich”

3. Potenz:

$$\alpha^0 := 1, \quad (66)$$

$$\alpha^{N(\beta)} := \alpha^\beta \cdot \alpha \quad \text{für Nachfolgerordinalzahlen } N(\beta) \text{ mit } \beta \in \text{On}, \quad (67)$$

$$\alpha^\beta := \bigcup \{\alpha^\gamma : \gamma < \beta\} \quad \text{für Limesordinalzahlen } \beta. \quad (68)$$

Diesen Rekursionen liegt die wohlfundierte Relation $< \subseteq \text{On} \times \text{On}$ zugrunde.

Achtung: Im allgemeinen sind weder die Addition noch die Multiplikation von Ordinalzahlen kommutativ. Zum Beispiel gilt $1 + \omega = \omega < N(\omega) = \omega + 1$ und $2 \cdot \omega = \omega < \omega + \omega = \omega \cdot 2$. Eingeschränkt auf $\alpha, \beta \in \omega$ sind es dagegen die gewöhnlichen arithmetischen Operationen auf natürlichen Zahlen mit ihren vertrauten Gesetzen.

Varianten des Rekursionssatzes

1. Abbrechende Rekursionen und rekursiv definierte partielle Funktionen.

Aus anderen mathematischen Vorlesungen kennen Sie sicher Rekursionen, die irgendwann stoppen, z.B. wenn der Definitionsbereich der Rekursionsvorschrift verlassen wird. Auch solche Rekursionen zur Definition von *partiell definierten* Funktionen $F : K \dashrightarrow A$ können wir mit dem Rekursionssatz realisieren, indem wir ein neues Objekt “undefiniert” zu A hinzunehmen und partiell definierte Funktionen $F : K \dashrightarrow A$ zu total definierte Funktionen

$$F \cup ((K \setminus \text{domain}(F)) \times \{\text{undefiniert}\}) : K \rightarrow A \cup \{\text{undefiniert}\}$$

erweitern.³⁵

2. Rekursiv definierte Klassen und Relationen.

Mit dem Rekursionssatz werden zunächst *Funktionen* auf einer Klasse A rekursiv definiert. Wir können wir ihn aber ebenso zur rekursiven Definition von *Klassen* $K \subseteq A$, z.B. von *Relationen* verwenden, indem wir eine Klasse K durch ihre Indikatorfunktion $1_K = (K \times \{1\}) \cup ((A \setminus K) \times \{0\})$ codieren und 1_K rekursiv definieren.

Zum Beispiel können wir damit alle rekursiven Definitionen vom Beginn der Vorlesung (z.B. für Terme, Formeln, Herleitungen) bei Verwendung von Codierungen durch Bäume innerhalb von ZF als rekursive Definitionen unter Verwendung des Rekursionssatzes auffassen. Als zugrundeliegende Relation kann man dabei stets den transitiven Abschluss $\in^*$ der $\in$ -Relation (oder auch eine Teilrelation davon) verwenden. Für jedes n -Tupel $y = (x_0, \dots, x_n)$, z.B. aufgefasst als Abbildung $y : N(n) \rightarrow V$, und jeden Eintrag x_j davon gilt nämlich stets $x_j \in^* y$. Ebenso wird die Gültigkeitsrelation $\models$ und der Modellbegriff nun ein Konzept innerhalb von ZF.

³⁵Strenggenommen funktioniert das so natürlich nur für $A \neq V$, weil uns sonst kein Objekt undefiniert $\in V \setminus A$ mehr zur Verfügung steht. Dieses etwas spitzfindige Problem kann man zum Beispiel lösen, indem man Elemente x des Universum V mittels $x \mapsto \{x\}$ durch Singletons codiert, und undefiniert $:= \emptyset$ setzt.

Insbesondere haben wir nun mit den Interpretationen

$$\mathbf{0}^\omega := 0, \quad (69)$$

$$\mathbf{N}^\omega := \{(n, N(n)) : n \in \omega\}, \quad (70)$$

$$+^\omega := \{((n, m), n + m) : n, m \in \omega\}, \quad (71)$$

$$\cdot^\omega := \{((n, m), n \cdot m) : n, m \in \omega\} \quad (72)$$

ein Modell $(\omega, 0^\omega, N^\omega, +^\omega, \cdot^\omega)$ der Peanoarithmetik innerhalb von ZF.

Man beachte aber, dass das Universum eines Modells stets eine *Menge* sein muss, nicht etwa eine echte Klasse, weil wir mit der Rekursionsvorschrift nur auf Anfangsstücke, die *Mengen* sind, zurückgreifen dürfen!

Übung 6.24 Was ist falsch an dem folgenden Versuch, die Gültigkeit von Formeln in einem Modell von ZF innerhalb des Modells selbst zu definieren?

Falscher Versuch: “Wir definieren mit dem Rekursionssatz für jede Codierung ϕ einer Formel der Sprache der Mengenlehre und jede Belegung $b : \text{freeVar}(\phi) \rightarrow V$ ihre Gültigkeit in ZF rekursiv so:

1. $\perp$ gilt nicht.
2. Ist $\phi = \in v_1 v_2$ eine mit $\in$ gebildete Codierung einer Primformel, so gilt ϕ unter b genau dann, wenn $b(v_1) \in b(v_2)$ gilt.
3. Ist $\phi = \rightarrow \phi_1 \phi_2$ die Codierung einer Implikation, so gilt ϕ unter b genau dann nicht, wenn ϕ_1 unter b gilt, ϕ_2 jedoch nicht.
4. Ist $\phi = \forall x \psi$ die Codierung einer Allformel, so gilt ϕ unter b genau dann, wenn ψ unter $b[x/y] := (b \setminus (\{x\} \times V)) \cup \{(x, y)\}$ für alle $y \in V$ gilt.”

6.4 Anwendungen des Rekursionssatzes in der Mengenlehre

Auch in diesem Abschnitt arbeiten wir in ZF. Wenn wir zusätzlich das Auswahlaxiom verwenden, weisen wir gesondert mit dem Zusatz “in ZFC” darauf hin.

Wir beweisen nun das Zornsche Lemma mit dem Rekursionssatz unter Verwendung des Auswahlaxioms:

Satz 6.25 (Zornsches Lemma, in ZFC) *Es sei $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Zu jeder linear geordneten Teilmenge von M existiere eine obere Schranke. Dann besitzt M ein maximales Element.*

Beweis: Es sei ℓ die Menge aller linear geordneten Teilmengen x von M , die eine obere Schranke $s \in M \setminus x$ besitzen; mittels Aussonderung aus der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ ist das in der Tat eine Menge: $\ell \in V$. Mit dem Auswahlaxiom nehmen wir eine Auswahlfunktion $f : \ell \rightarrow M$, die jedem $x \in \ell$ eine obere Schranke $f(x) \in M \setminus x$ zuordnet. Nun definieren

durch Rekursion über die $<$ -Relation auf On eine partiell definierte Abbildung $g : \text{On} \dashrightarrow M$ so: Gegeben $\alpha \in \text{On}$, sei

$$g(\alpha) := \begin{cases} f(g[\alpha]), & \text{falls } g[\alpha] \in \ell, \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere ist $g(\alpha)$ undefiniert, falls $g(\beta)$ für ein $\beta < \alpha$ undefiniert ist, und falls $g(\alpha)$ definiert ist, so ist $g(\alpha) \neq g(\beta)$ für alle $\beta < \alpha$. Anders gesagt: Auf seinem Definitionsbereich $\text{domain}(g) = \{\alpha \in \text{On} : g(\alpha) \neq \text{undefiniert}\}$ ist g injektiv. Weil $\text{domain}(g)$ transitiv ist, folgt $\text{domain}(g) = \text{On}$ oder $\text{domain}(g) \in \text{On}$.

Der Fall $\text{domain}(g) = \text{On}$ ist nicht möglich, weil dann Menge $g[\text{On}] \subseteq M$ (mittels Aussonderung) eine Menge wäre, also auch (mittels Ersetzungsschema) $\text{On} = g^{-1}[g[\text{On}]] \in V$ eine Menge wäre, ein Widerspruch. Hierbei bezeichnet

$$g^{-1} = \{(x, \alpha) : (\alpha, x) \in g\} : g[\text{On}] \rightarrow \text{On} \quad (73)$$

die Inverse von g .

Es ist also $\alpha := \text{domain}(g) \in \text{On}$. Wegen $\alpha \notin \text{domain}(g)$ (wegen Fundierung) ist $g(\alpha)$ undefiniert, also $g[\alpha] \notin \ell$. Nun ist $g[\alpha]$ eine bzgl. $\leq$ linear geordnete Teilmenge von M , denn für alle $\gamma < \beta < \alpha$ gilt $g(\gamma) \leq f(g[\beta]) = g(\beta)$ aufgrund der Definition von f und von g . Nach Voraussetzung besitzt also $g[\alpha]$ eine obere Schranke; nennen wir eine solche s . Andererseits besitzt $g[\alpha]$ keine obere Schranke in $M \setminus g[\alpha]$, denn sonst wäre $g[\alpha] \in \ell$ und damit $g(\alpha)$ definiert, ein Widerspruch. Es ist also s eine obere Schranke von $g[\alpha]$, die durch keine weitere obere Schranke (bzgl. $\leq$) übertroffen wird, also ein maximales Element in M .

□

Bemerkung: Über ZF sind das Zornsche Lemma und das Auswahlaxiom äquivalent. Man kann nämlich umgekehrt in ZF aus dem Zornschen Lemma das Auswahlaxiom beweisen. Hierzu sei a eine Menge mit $\emptyset \notin a$, Man betrachtet die Menge $\mathcal{F}$ aller partiell definierten Auswahlfunktionen $f : a \dashrightarrow \bigcup a$, $f(x) \in x$ für alle $x \in \text{domain}(f)$, versehen mit der Inklusionsrelation $\subseteq$. Jede bezüglich $\subseteq$ linear geordnete Teilmenge $y \subseteq \mathcal{F}$ besitzt eine obere Schranke, z.B. $\bigcup y$. Nach dem Zornschen Lemma besitzt $\mathcal{F}$ dann ein maximales Element F . Dann kann man zeigen, dass $F : a \rightarrow \bigcup a$ eine auf ganz a definierte Auswahlfunktion ist.

Eine andere Folgerung des Auswahlaxioms ist der *Wohlordnungssatz*. Man kann ihn oft alternativ zum Zornschen Lemma verwenden. Hierzu definieren wir:

Definition 6.26 (Wohlordnung) Eine Wohlordnung $\triangleleft$ auf einer Klasse K ist eine zweistellige Relation $\triangleleft \subseteq K \times K$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\triangleleft$ ist wohlfundiert.
2. $\triangleleft$ ist transitiv: $\forall x, y, z \in K : x \triangleleft y \wedge y \triangleleft z \Rightarrow x \triangleleft z$.

3. Je zwei Elemente $x, y \in K$ sind vergleichbar: $\forall x, y \in K : x \triangleleft y \vee x = y \vee y \triangleleft x$.

Wohlordnungen sind also nichtreflexive lineare Ordnungen, die wohlfundiert sind. Insbesondere besitzt jede nichtleere Teilklasse einer wohlgeordneten Klasse ein kleinstes Element.

Beispiel 6.27 Jede Teilklasse $A \subseteq \text{On}$ ist bezüglich $<$ (genauer gesagt bezüglich $< \cap (A \times A)$) wohlgeordnet.

Wohlordnungen auf einer Menge $M \in V$ sind fast das Gleiche wie Bijektionen $f : \alpha \rightarrow M$ mit $\alpha \in \text{On}$. Genauer gesagt gilt:

Lemma 6.28 (Korrespondenz zwischen Wohlordnungen und Aufzählungen mit Ordinalzahlen) Für jede zweistellige Relation $\triangleleft$ auf einer Menge M sind äquivalent:

1. $\triangleleft$ ist eine Wohlordnung auf M .
2. Es gibt $\alpha \in \text{On}$ und eine Bijektion $f : \alpha \rightarrow M$, so dass gilt:

$$\forall \beta, \gamma \in \alpha : \beta < \gamma \Leftrightarrow f(\beta) \triangleleft f(\gamma). \quad (74)$$

Zusatz: Gelten 1. und 2., so sind die Ordinalzahl α und die Bijektion f in 2. eindeutig bestimmt.

Beweis (Skizze): “1. $\Rightarrow$ 2.”: Gegeben sei eine Wohlordnung $\triangleleft$ auf $M \in V$. Wir definieren $f : \text{On} \dashrightarrow M$ durch Rekursion über die $<$ -Relation so: $f(\alpha)$ sei das bezüglich $\triangleleft$ kleinste Element in $M \setminus f[\alpha]$, falls es existiert, und $f(\alpha)$ bleibt undefiniert sonst. Insbesondere ist f auf seinem Definitionsbereich injektiv. Die Rekursion bricht ab, weil wir sonst eine Injektion $f : \text{On} \rightarrow M$ hätten, also von einer echten Klasse nach einer Menge, was dem Ersetzungsschema widerspricht. Ist $\alpha = \text{domain}(f)$, so ist $f[\alpha] = M$, weil sonst $f(\alpha)$ definiert und damit $\alpha \in \text{domain}(f)$ wäre, ein Widerspruch. Nach Konstruktion ist f ordnungserhaltend im Sinne von Aussage (74).

“2. $\Rightarrow$ 1.”: Gegeben eine ordnungserhaltende Bijektion f wie in 2., vererbt sich die Wohlordnung mittels f von $(\alpha, <)$ auf $(M = f[\alpha], \triangleleft)$.

Zum Zusatz: Sind $f_1 : \alpha_1 \rightarrow M$ und $f_2 : \alpha_2 \rightarrow M$ zwei Bijektionen wie in 2., so ist $g := f_2^{-1} \circ f_1 : \alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ eine ordnungserhaltende Bijektion. Induktiv bzgl. der $<$ -Relation zeigen wir nun $g(\beta) = \beta$ für alle $\beta < \alpha_1$. Nehmen wir als Induktionsvoraussetzung für ein gegebenes $\beta < \alpha_1$ an, dass für alle $\gamma < \beta$ gilt: $g(\gamma) = \gamma$. Es gilt insbesondere $g[\beta] = \beta$. Da β das kleinste Element sowohl von $\alpha_1 \setminus \beta$ als auch von $\alpha_2 \setminus \beta$ ist, und da g ordnungserhaltend ist, schließen wir $g(\beta) = \beta$, wie zu zeigen war. Die Bijektion g ist also die Identität, und damit $\alpha_1 = \alpha_2$.

□

Satz 6.29 (Wohlordnungssatz, in ZFC) Auf jeder Menge M existiert eine Wohlordnung $\triangleleft$.

Beweis: Der Beweis ist etwas ähnlich zum Beweis des vorhergehenden Lemmas.

Wir nehmen mit dem Auswahlaxiom eine Auswahlfunktion $g : \mathfrak{P}(M) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow M$, die jeder nichtleeren Teilmenge $x \subseteq M$ ein Element $g(x) \in x$ zuordnet. Dann definieren wir $f : \text{On} \dashrightarrow M$ durch Rekursion über die $<$ -Relation so: $f(\alpha) := g(M \setminus f[\alpha])$, falls $M \setminus f[\alpha] \neq \emptyset$, und $f(\alpha)$ bleibt undefiniert sonst. Insbesondere ist f auf seinem Definitionsbereich injektiv. Wieder bricht die Rekursion ab, weil wir sonst eine Injektion $f : \text{On} \rightarrow M$ hätten, ein Widerspruch. Ist $\alpha = \text{domain}(f)$, so ist $f[\alpha] = M$, weil sonst $f(\alpha)$ definiert und damit $\alpha \in \text{domain}(f)$ wäre. Also ist f surjektiv. Die Bijektion $f : \alpha \rightarrow M$ liefert nach Lemma 6.28 eine Wohlordnung auf M . □

Bemerkung: Auch der Wohlordnungssatz ist über ZF äquivalent zum Auswahlaxiom AC. Dabei folgt die Implikation “Wohlordnungssatz $\Rightarrow$ AC” so: Gegeben eine Menge $a \neq \emptyset$ und eine Wohlordnung $\triangleleft$ von $\bigcup a$, gewinnen wir eine Auswahlfunktion zu a , indem wir aus jedem $x \in a$ ihr $\triangleleft$ -kleinstes Element auswählen.

Korollar 6.30 (Wohlordnungssatz – Variante, in ZFC) *Zu jeder Menge $M \in V$ gibt es eine Ordinalzahl $\alpha \in \text{On}$ und eine Bijektion $f : \alpha \rightarrow M$.*

Das wurde nämlich im Beweis des Wohlordnungssatzes gleich mitbewiesen.

Der Wohlordnungssatz lässt sich oft als Alternative zum Zornschen Lemma in Beweisen einsetzen. Zur Illustration eine Beweisskizze der Existenz einer Vervollständigung einer Theorie (Satz 3.12) in ZFC mit Hilfe des Wohlordnungssatzes statt des Zornschen Lemmas:

Beweisskizze: Es sei $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ eine konsistente Theorie. Weiter sei Φ die Menge aller geschlossenen Formeln über $\mathcal{S}$. Wir nehmen mit dem Wohlordnungssatz eine Wohlordnung $\triangleleft$ auf Φ . Wir definieren nun ein Axiomensystem $\mathcal{A}' \subseteq \Phi$ rekursiv wie folgt: Gegeben $\phi \in \Phi$, sei nach Rekursionsvoraussetzung $\mathcal{A}' \cap \{\psi \in \Phi : \psi \triangleleft \phi\}$ schon bekannt. Wir nehmen dann ϕ genau dann zu $\mathcal{A}'$ hinzu, wenn $\{\phi\} \cup (\mathcal{A}' \cap \{\psi \in \Phi : \psi \triangleleft \phi\}) \cup \mathcal{A}$ konsistent ist. Induktiv zeigt man dann, dass $(\mathcal{A}' \cap \{\psi \in \Phi : \psi \triangleleft \phi \vee \psi = \phi\}) \cup \mathcal{A}$ für alle $\phi \in \Phi$ konsistent ist, und schließt dann, dass $\mathcal{A}'$ eine vollständige Theorie ist, die $\mathcal{A}$ umfasst. Wir führen die Details hier nicht aus. □

Diese Skizze hat viel mehr Ähnlichkeit mit dem rekursiven Beweis des Satzes 3.12, den wir früher im Fall einer abzählbaren Sprache gegeben haben, als der Beweis mit dem Zornschen Lemma, den wir früher im allgemeinen Fall gegeben haben.

Lemma 6.31 *Es sei x eine Menge von Ordinalzahlen, $\alpha \in \text{On}$ eine Ordinalzahl und $f : \alpha \rightarrow x$ die bezüglich $<$ monoton steigende Bijektion aus Lemma 6.28. Für alle $\beta < \alpha$ gilt dann $f(\beta) \geq \beta$.*

Beweis durch Induktion bzgl. $<$: Es sei $\beta < \alpha$ gegeben. Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass $f(\gamma) \geq \gamma$ für alle $\gamma < \beta$ gilt. Dann folgt für alle $\gamma < \beta$ wegen der Monotonie von f : $f(\beta) > f(\gamma) \geq \gamma$, also $f(\beta) \geq \beta$, wie zu zeigen war. □

Kardinalzahlen. Kardinalzahlen entsprechen “Mächtigkeiten” aus der naiven Mengenlehre. Definieren wir sie im Rahmen von ZF:

Definition 6.32 (Kardinalzahl) Eine Ordinalzahl $\alpha \in \text{On}$ wird Kardinalzahl genannt, wenn es für alle $\beta < \alpha$ keine Bijektion $f : \beta \rightarrow \alpha$ gibt. Mit Card bezeichnen wir die Klasse aller Kardinalzahlen.

Beispiel: $\omega + 1$ ist keine Kardinalzahl, denn wir haben die Bijektion $f : \omega \rightarrow \omega + 1$ mit $f(0) = \omega$, $f(n + 1) = n$ für $n \in \omega$.

Starten wir mit einer Vorbereitung zur Untersuchung von Kardinalzahlen:

Satz 6.33 (Version des Satzes von Cantor-Bernstein) Es seien $B \subseteq A$ zwei Mengen und $f : A \rightarrow B$ eine Injektion. Dann gibt es eine Bijektion $g : A \rightarrow B$.

Beweis: Wir definieren rekursiv A_n für $n \in \omega$ so: $A_0 := A$, $A_{N(n)} = f[A_n]$ für $n \in \omega$. Ebenso definieren wir rekursiv B_n für $n \in \omega$ so: $B_0 := B$, $B_{N(n)} = f[B_n]$ für $n \in \omega$. Wegen $f[A] \subseteq B \subseteq A$ folgt induktiv $A_{N(n)} = f[A_n] \subseteq B_n \subseteq A_n$ und $B_n \subseteq B$ für alle $n \in \omega$. Wir definieren nun

$$g : A \rightarrow B, \quad g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } n \in \omega \text{ mit } x \in A_n \setminus B_n \text{ existiert,} \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

g ist injektiv: Hierzu seien $x, y \in A$ mit $g(x) = g(y)$ gegeben. Wir unterscheiden mehrere Fälle:

1. Fall: $x \in A_n \setminus B_n$ und $y \in A_m \setminus B_m$ für geeignete $n, m \in \omega$. Dann ist $f(x) = g(x) = g(y) = f(y)$ und daher $x = y$, weil f injektiv ist.
2. Fall: $x \notin A_n \setminus B_n$ und $y \notin A_n \setminus B_n$ für alle $n \in \omega$. Dann ist $x = g(x) = g(y) = y$.
3. Fall: $x \in A_m \setminus B_m$ für ein geeignetes $m \in \omega$ und $y \notin A_n \setminus B_n$ für alle $n \in \omega$. Dann folgt mit der Injektivität von f :

$$g(x) = f(x) \in f[A_m] \setminus f[B_m] = A_{N(m)} \setminus B_{N(m)},$$

also $g(x) \neq y = g(y)$, ein Widerspruch. Dieser Fall tritt also nicht auf.

4. Fall: $y \in A_m \setminus B_m$ für ein geeignetes $m \in \omega$ und $x \notin A_n \setminus B_n$ für alle $n \in \omega$. Ebenso wie der 3. Fall ist dieser Fall widersprüchlich; um dies zu sehen, vertausche man x und y .

$g : A \rightarrow B$ ist surjektiv: Hierzu sei $x \in B$ gegeben. Fallunterscheidung:

1. Fall: Annahme: $x \in A_n \setminus B_n$ für ein $n \in \omega$. Wegen $B_0 = B \ni x$ ist dann $n \neq 0$, also $n = N(m)$ für ein $m \in \omega$. Insbesondere folgt mit der Injektivität von f :

$$x \in f[A_m] \setminus f[B_m] = f[A_m \setminus B_m] = g[A_m \setminus B_m] \subseteq g[A],$$

also $x \in g[A]$.

2. Fall: Annahme: $x \notin A_n \setminus B_n$ für alle $n \in \omega$. Hier ist $x = g(x)$.

□

Korollar 6.34 (Satz von Cantor-Bernstein) *Es seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow A$ Injektionen zwischen zwei Mengen A und B . Dann gibt es eine Bijektion $h : A \rightarrow B$.*

Beweis: Wir haben die Injektion $g \circ f : A \rightarrow g[B] \subseteq A$, also auch eine Bijektion $i : A \rightarrow g[B]$ nach dem Satz. Dann ist $h := g^{-1} \circ i : A \rightarrow B$ eine Bijektion. □

Satz 6.35 (Grundlegende Eigenschaften von Kardinalzahlen)

1. Jede natürliche Zahl $n \in \omega$ ist eine Kardinalzahl.
2. Ist x eine Menge von Kardinalzahlen, so ist auch $\bigcup x$ eine Kardinalzahl. Insbesondere ist ω eine Kardinalzahl.
3. Zu jeder Kardinalzahl κ gibt es eine nächstgrößere Kardinalzahl. Sie wird mit κ^+ bezeichnet.

Beweis:

1. Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang, $n = 0$: Die 0 ist eine Kardinalzahl, weil es kein $\beta < 0$ gibt.
Induktionsvoraussetzung: Es sei eine Kardinalzahl $n \in \omega$ gegeben.
Induktionsschluss: Angenommen, wir haben $m < N(n)$ und eine Bijektion $f : m \rightarrow N(n)$. Wegen $N(n) \neq \emptyset$ ist $m \neq \emptyset$, also $m = N(l)$ für ein $l \in \omega$. Wir setzen

$$g : m \rightarrow N(n), \quad k \mapsto \begin{cases} n, & \text{falls } k = l, \\ f(l), & \text{falls } f(k) = n, \\ f(k) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion g entsteht also aus f , indem wir die Werte n und $f(l)$ miteinander vertauschen. Weil f bijektiv ist, ist auch $g : m \rightarrow N(n)$ bijektiv. Also ist auch die Einschränkung auf l

$$h := g \cap (l \times V) = g \setminus \{(l, n)\} : l \rightarrow n$$

bijektiv. Wegen $N(l) = m < N(n)$ folgt $l < n$, im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung, dass n eine Kardinalzahl ist.

2. Es sei x eine Menge von Kardinalzahlen. Dann ist $\alpha := \bigcup x$ als Vereinigung einer Menge von Ordinalzahlen eine Ordinalzahl. Es sei $\beta < \alpha$. Angenommen, wir haben eine Bijektion $f : \alpha \rightarrow \beta$. Nach Definition von α gibt es ein $\kappa \in x$ mit $\beta < \kappa$. Die Einschränkung $g := f \cap (\kappa \times \beta)$ von f auf κ bildet κ bijektiv auf eine Teilmenge $g[\kappa] = f[\kappa] \subseteq \beta$ ab. Weil $g[\kappa]$ bezüglich $<$ wohlgeordnet ist, finden wir eine Ordinalzahl $\gamma \in \text{On}$ und eine ordnungserhaltende Bijektion $h : \gamma \rightarrow g[\kappa]$. Nach Lemma 6.31 ist $\delta \leq h(\delta) < \beta$ für alle $\delta < \gamma$ und daher $\gamma \leq \beta < \kappa$, also $\gamma < \kappa$. Nun ist $h^{-1} \circ g : \kappa \rightarrow \gamma$ eine Bijektion, im Widerspruch dazu, dass κ eine Kardinalzahl ist. Damit ist gezeigt, dass α eine Kardinalzahl ist.

Insbesondere ist $\omega = \bigcup \omega$ als Vereinigung einer Menge von Kardinalzahlen eine Kardinalzahl.

3. Gegeben eine Kardinalzahl κ , sei W die Klasse aller Wohlordnungen $\triangleleft$ von κ . Aus $W \subseteq \mathfrak{P}(\kappa \times \kappa) \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\kappa))) \in V$ schließen wir $W \in V$ mittels Aussonderung. Zu jedem $\triangleleft \in W$ nehmen wir die eindeutig bestimmte Ordinalzahl α wie Aussage 2 in Lemma 6.28, so dass es eine ordnungserhaltende Bijektion f von $(\alpha, <)$ nach $(\kappa, \triangleleft)$ gibt. Wir setzen $G(\triangleleft) := \alpha$. Das Bild $G[W] \subseteq \text{On}$ der Abbildung G besteht also aus allen Ordinalzahlen α , für die es eine Bijektion $f : \alpha \rightarrow \kappa$ gibt. Insbesondere ist $\kappa \in G[W]$, weil die Identität auf κ eine solche Bijektion ist.

Das Bild $G[W]$ ist eine Menge nach dem Ersetzungsschema. Wir definieren $\kappa^+ := \bigcup \{N(\alpha) : \alpha \in G[W]\} \in \text{On}$ als die kleinste Ordinalzahl, die größer als alle $\alpha \in G[W]$ ist. Wegen $\kappa \in G[W]$ folgt $\kappa < \kappa^+$.

Wir zeigen nun, dass κ^+ eine Kardinalzahl ist. Hierzu sei $\beta < \kappa^+$ gegeben. Angenommen, es gibt eine Bijektion $f : \beta \rightarrow \kappa^+$. Nach der Definition von κ^+ finden wir ein $\gamma \in G[W]$ mit $\beta \leq \gamma$, und hierzu eine Bijektion $g : \gamma \rightarrow \kappa$. Dann ist $g \circ f^{-1} : \kappa^+ \rightarrow \kappa$ eine Injektion. Wegen $\kappa < \kappa^+$ und dem Satz von Cantor-Bernstein (Korollar 6.34) gibt es dann auch eine Bijektion $h : \kappa^+ \rightarrow \kappa$, woraus $\kappa^+ \in G[W]$ folgt, im Widerspruch zur Definition von κ^+ . Also ist κ^+ eine Kardinalzahl.

Wir zeigen jetzt, dass es keine Kardinalzahl λ mit $\kappa < \lambda < \kappa^+$ gibt. Angenommen, wir haben so ein λ . Weil κ^+ die kleinste Ordinalzahl ist, die grösser als alle Elemente von $G[W]$ ist, finden wir eine Ordinalzahl $\alpha \in G[W]$ mit $\lambda \leq \alpha < \kappa^+$, sowie hierzu eine Bijektion $l : \alpha \rightarrow \kappa$. Die Einschränkung von l auf λ ist dann eine Injektion von λ nach κ . Mit $\kappa < \lambda$ und dem Satz von Cantor-Bernstein folgt, dass es auch eine Bijektion von λ nach κ gibt, im Widerspruch dazu, dass λ eine Kardinalzahl ist.

□

Mächtigkeit von Mengen.

Satz/Definition 6.36 (Mächtigkeit von Mengen, in ZFC) *Zu jeder Menge M gibt es eine eindeutig bestimmte Kardinalzahl κ , so dass es eine Bijektion $f : \kappa \rightarrow M$ gibt. Sie wird mit $|M| := \kappa$ bezeichnet und Mächtigkeit von M genannt. Die Menge M heißt endlich, wenn $|M| \in \omega$ gilt.*

Beweis: Nach der Variante 6.30 des Wohlordnungssatzes gibt es eine Ordinalzahl α und eine Bijektion $g : \alpha \rightarrow M$. Die Klasse³⁶ C aller Ordinalzahlen, die bijektiv auf M abgebildet werden können, ist also nichtleer; also besitzt sie ein kleinstes Element κ . Es gilt $\kappa \in \text{Card}$, da jedes kleinere $\beta < \kappa$ nicht mehr bijektiv auf M abgebildet werden kann, also auch nicht bijektiv auf κ abgebildet werden kann. Jedes $\lambda \in \text{Card} \setminus \{\kappa\}$ kann ebenfalls nicht auf M bijektiv abgebildet werden. Für $\lambda < \kappa$ wissen wir das schon, und für $\lambda > \kappa$ folgt das daraus, dass zwar M bijektiv auf κ abgebildet werden kann, λ jedoch nicht.

□

Übung 6.37 *Zeigen Sie in ZF: $|\omega^2| = \omega$. Folgern Sie, dass ω^2 keine Kardinalzahl ist.*

³⁶Eigentlich ist C sogar eine Menge, doch das ist für dieses Argument irrelevant

Hierarchie der unendlichen Kardinalzahlen

Definition 6.38 (Aleph-Hierarchie) Wir definieren rekursiv bezüglich der $<$ -Relation auf On :

$$\aleph_0 := \omega, \quad (75)$$

$$\aleph_{N(\alpha)} := \aleph_\alpha^+ \text{ für Nachfolgerordinalzahlen } N(\alpha) \in \text{On}, \quad (76)$$

$$\aleph_\alpha := \bigcup \{\aleph_\beta : \beta < \alpha\} \text{ für Limesordinalzahlen } \alpha \in \text{On}. \quad (77)$$

Dies ist also die mit den Ordinalzahlen indizierte Aufzählung aller unendlichen Kardinalzahlen. Zum Beispiel ist $\aleph_1$ die kleinste überabzählbare Ordinalzahl.

Die Kontinuumshypothese (formulierbar in ZFC). Die berühmte *Kontinuumshypothese* CH besagt:

$$|\mathfrak{P}(\omega)| = \aleph_1. \quad (\text{CH})$$

Gleichwertig dazu ist auch $|\mathbb{R}| = \aleph_1$. Äquivalent dazu ist auch, dass jede überabzählbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abgebildet werden kann. Berühmte Resultate von K. Gödel und P. Cohen besagen, dass sowohl $\text{ZFC} + \text{CH}$ als auch $\text{ZFC} + \neg \text{CH}$ konsistent sind, falls ZFC konsistent ist. Die Kontinuumshypothese ist also *unabhängig* von ZFC . Sie oder auch ihr Gegenteil kann also als ein “höheres Axiom” zu ZFC hinzugenommen werden, ohne neue Widersprüche zu erzeugen.

Rang von Mengen, Mengenhierarchie. Für eine Menge x von Ordinalzahlen kürzen wir ab:

$$\text{lub}(x) := \bigcup \{N(\alpha) : \alpha \in x\}.$$

Hierbei steht “lub” für “least upper bound”, denn $\text{lub}(x)$ ist die kleinste Ordinalzahl, die größer als alle $\alpha \in x$ ist.

Man kann sich alle Mengen in ZF durch iterierte Mengenbildung aus der leeren Menge gebildet vorstellen. Der “Rang” einer Menge ist ein Maß für die Komplexität dieser Iteration:

Rekursive Definition 6.39 (Rang von Mengen, Hierarchie der Mengen) Wir definieren durch Rekursion über die $\in$ -Relation den Rang $\text{rank } x$ einer Menge $x \in V$ durch:

$$\text{rank } x := \text{lub}\{\text{rank } y : y \in x\}.$$

Umgekehrt definieren wir durch Rekursion über die $<$ -Relation für jedes $\alpha \in \text{On}$ die Hierarchie

$$V_\alpha := \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } \alpha = 0, \\ \mathfrak{P}(V_\beta), & \text{falls } \alpha = N(\beta) \text{ eine Nachfolgerordinalzahl ist,} \\ \bigcup \{V_\beta : \beta < \alpha\}, & \text{falls } \alpha \text{ eine Limesordinalzahl ist.} \end{cases} \quad (78)$$

Lemma 6.40 Zusammenhang zwischen der Hierarchie V und dem Rang. Für alle $x \in V$ und $\alpha \in \text{On}$ sind äquivalent:

1. $x \in V_\alpha$,
2. $\text{rank } x < \alpha$.

Beweis: “1. $\Rightarrow$ 2.”: Induktion über α .

Induktionsvoraussetzung: Gegeben $\alpha \in \text{On}$, gelte für alle $\beta < \alpha$ und $y \in V_\beta$ die Ungleichung $\text{rank } y < \beta$.

Induktionsschluss: Es sei $x \in V_\alpha$ gegeben. Wir unterscheiden 3 Fälle:

1. *Der Fall $\alpha = 0$* ist ausgeschlossen, weil $V_0 = \emptyset$.
2. *Fallannahme: α ist eine Nachfolgerordinalzahl, $\alpha = N(\beta)$.* Hier ist $x \in V_\alpha = \mathfrak{P}(V_\beta)$, also $x \subseteq V_\beta$ und damit $y \in V_\beta$ für alle $y \in x$. Nach Induktionsvoraussetzung und wegen $\beta < \alpha$ gilt $\text{rank } y < \beta$ für alle solchen y , und damit $\text{rank } x \leq \beta < \alpha$ nach Definition von $\text{rank } x$.
3. *Fallannahme: α ist eine Limesordinalzahl.* Hier ist $x \in V_\alpha = \bigcup_{\beta: \beta < \alpha} V_\beta$. Dann existiert ein $\beta < \alpha$ mit $x \in V_\beta$, und damit $\text{rank } x < \beta < \alpha$ nach Induktionsvoraussetzung. Wir schließen $\text{rank } x < \alpha$.

“2. $\Rightarrow$ 1.”: Nochmal Induktion über α .

Induktionsvoraussetzung: Gegeben $\alpha \in \text{On}$, gelte für alle $\beta < \alpha$ und $y \in V$ mit $\text{rank } y < \beta$ die Relation $y \in V_\beta$.

Induktionsschluss: Es sei $x \in V$ mit $\text{rank } x < \alpha$ gegeben. Wir unterscheiden 3 Fälle:

1. *Der Fall $\alpha = 0$* ist ausgeschlossen, weil $\text{rank } x < 0$ unmöglich ist.
2. *Fallannahme: α ist eine Nachfolgerordinalzahl, $\alpha = N(\beta)$.* Für alle $y \in x$ wissen wir $\text{rank } y < \text{rank } x < \alpha = N(\beta)$ nach Definition von $\text{rank } x$, also auch $\text{rank } y < \text{rank } x \leq \beta$ und damit $\text{rank } y < \beta$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $y \in V_\beta$. Damit ist $x \subseteq V_\beta$ gezeigt. Wir schließen $x \in \mathfrak{P}(V_\beta) = V_\alpha$.
3. *Fallannahme: α ist eine Limesordinalzahl.* Aus $\text{rank } x < \alpha$ schließen wir hier $\text{rank } x < \beta$ für ein $\beta < \alpha$, also $x \in V_\beta$ nach Induktionsvoraussetzung. Nach Definition von V_α folgt auch $x \in V_\alpha$.

□

Korollar 6.41 (Monotonie der V -Hierarchie)

1. Für $\beta < \alpha \in \text{On}$ gilt $V_\beta \subseteq V_\alpha$.
2. Es gilt $\bigcup_{\alpha \in \text{On}} V_\alpha = V$.

Beweis: Beide Teile des Korollars folgen unmittelbar aus der Charakterisierung 2. des Lemmas. □

Übung 6.42 Wir kürzen ab: $1 = N(0)$, $2 = N(1)$, $3 = N(2)$. Zeigen Sie $V_0 = 0$, $V_1 = 1$ und $V_2 = 2$. Geben Sie aber explizit ein Element von $V_3 \setminus 3$ an.

Übung 6.43 Zeigen Sie in ZF:

$$\forall \alpha \in \text{On} : V_\alpha \cap \text{On} = \alpha.$$

Ausblick: Gödels konstruktibles Universum. Erinnern Sie sich an die Interpretation von Klassentermen als Klassen, die wir in Abschnitt 4.3.2 eingeführt haben: Wir hatten die Teilmengen des Universums eines Modells genommen, die innerhalb des Modells mit Parametern im Modell *definiert* werden können. Wir simulieren diese Konstruktion nun *innerhalb von ZF*, wobei das Universum V durch eine beliebige Menge x ersetzt wird, und das Elementsymbol durch die auf x eingeschränkte Elementrelation $\in^x := \in \cap (x \times x)$ interpretiert wird:

Definition 6.44 (Definierbarkeit in einer Menge) Eine Teilmenge $y \subseteq x$ einer nicht-leeren Menge $x \in V$ heißt *definierbar in x* , wenn es eine Formel $\phi \in V$, eine Variable v und eine Belegung $b : \text{freeVar}(\phi) \setminus \{v\} \rightarrow x$ mit Werten in x gibt, so dass

$$y = \{z \in x : (x, \in^x) \models \phi[\{(v, z)\} \cup b]\}$$

gilt. Außerdem nennen wir die leere Menge $\emptyset$ *definierbar in $\emptyset$* . Es bezeichne

$$\text{Def}(x) := \{y \subseteq x : y \text{ ist definierbar in } x\}.$$

die Menge aller in x definierbaren Teilmengen von x .

Einer Idee von Kurt Gödel folgend, iterieren wir diese Konstruktion nun transfinit in Analogie zur Konstruktion der Hierarchie $(V_\alpha)_{\alpha \in \text{On}}$:

Definition 6.45 (Gödels konstruktibles Universum L) Wir definieren rekursiv bzgl. der $<$ -Relation für $\alpha \in \text{On}$ eine Mengenhierarchie $(L_\alpha)_{\alpha \in \text{On}}$:

$$L_\alpha := \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } \alpha = 0, \\ \text{Def}(L_\beta), & \text{falls } \alpha = N(\beta) \text{ eine Nachfolgerordinalzahl ist,} \\ \bigcup_{\beta: \beta < \alpha} L_\beta, & \text{falls } \alpha \text{ eine Limesordinalzahl ist.} \end{cases} \quad (79)$$

Weiter setzen wir

$$L := \bigcup_{\alpha \in \text{On}} L_\alpha.$$

Ohne die Details oder gar die Beweise in dieser Vorlesung auszuführen, sei von den genialen Ideen von Kurt Gödel zum konstruktiblen Universum berichtet:

Man kann für jedes ZF-Axiom ϕ die Relativierung ϕ^L in ZF zeigen.³⁷ Weiter kann man die Relativierung $(V = L)^L$ der Formel $V = L$ in ZF zeigen: Konstruktibilität im konstruktiblen Universum L ist das Gleiche wie Konstruktibilität im ganzen Universum V . Es folgt, dass $ZF + “V = L”$ konsistent ist, wenn ZF konsistent ist. Die Aussage “ $V = L$ ”, also “*Jede Menge ist konstruktibel*”, ist sozusagen ein höheres Axiom der Mengenlehre, das aber konsistent mit ZF ist, wenn ZF selbst konsistent ist.

Weiterhin kann man, gegeben $\alpha \in \text{On}$ und eine Wohlordnung $\triangleleft_\alpha$ von L_α , eine Wohlordnung auf $L_{N(\alpha)}$ explizit angeben, indem man die Codes von Formeln und die Belegungen ihrer freien Variablen mit Werten in L_α unter Verwendung von $\triangleleft_\alpha$ wohlordnet. Damit gewinnt man eine Wohlordnung $\triangleleft_{N(\alpha)}$ von $L_{N(\alpha)}$ und damit rekursiv letztlich eine Wohlordnung $\triangleleft$ von L . Weil der Wohlordnungssatz das Auswahlaxiom AC impliziert, folgt hieraus auch die Konsistenz des Auswahlaxioms mit ZF, wenn ZF selbst konsistent ist.

Auch stimmt das im konstruktiblen Universum gebildete Standardmodell der Peanoarithmetik $(\omega, 0^\omega, N^\omega, +^\omega, \cdot^\omega)^L$ mit dem Standardmodell der Peanoarithmetik $(\omega, 0^\omega, N^\omega, +^\omega, \cdot^\omega)$ überein. Hieraus folgt, dass jede Formel in der Sprache der Arithmetik, die in ZFC herleitbar ist, auch in ZF herleitbar ist. Syntaktisch gelesen bedeutet das: Hat man eine Herleitung einer arithmetischen Aussage über natürliche Zahlen in ZFC, unter Verwendung des Auswahlaxioms, gefunden, so findet man konstruktiv-algorithmisch auch eine Herleitung der gleichen Aussage in ZF, also ohne Verwendung des Auswahlaxioms. Grob gesagt: Mit dem Auswahlaxiom kann man keine arithmetischen Aussagen über natürliche Zahlen beweisen, die man nicht ohne Auswahlaxiom ebenso beweisen kann.

Schließlich ist auch die Kontinuumshypothese CH in $ZF + “V = L”$ herleitbar, genauer gesagt sogar ihre Verallgemeinerung, die *verallgemeinerte Kontinuumshypothese*, kurz GCH³⁸:

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \text{On} : |\mathfrak{P}(\aleph_\alpha)| &= \aleph_{N(\alpha)}, \\ \text{also } ZF + “V = L” &\vdash \text{GCH}. \end{aligned} \tag{GCH}$$

Ausblick: Forcing. Paul Cohen hat 1963 eine geniale Methode entdeckt, eine “neue”, “*generische*” Menge G zu einem Mengenuniversum V hinzuzunehmen und so ein erweitertes Universum $V[G]$ zu gewinnen. Eigenschaften dieser generischen Menge G können aber schon innerhalb des alten Universums V genau beschrieben, “erzwungen” werden; es entstehen keine neuen Inkonsistenzen. Mit dieser Methode konnte Cohen zum Beispiel die Konsistenz von $ZF + \neg \text{AC}$ (genauer gesagt von $ZF + “Es gibt keine Auswahlfunktion auf $\mathfrak{P}(\aleph(\omega)) \setminus \{\emptyset\}”$) und von $ZFC + \neg \text{CH}$ unter der Voraussetzung der Konsistenz von ZF zeigen. Heute ist die Forcing-Methode ein starkes Werkzeug der höheren Mengenlehre, z.B. der infinitären Kombinatorik, um die relative Konsistenz von Erweiterungen von ZF zu zeigen. Eine systematische Einführung der Forcing-Methode übersteigt den Rahmen dieser Logikvorlesung weit.$

³⁷Der Quantor über *alle* Axiome ist hier natürlich metasprachlich, weil wir keine Definition der Gültigkeit in ZF innerhalb von ZF haben.

³⁸Das steht für “generalized continuum hypothesis”.

7 Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit

Wir arbeiten nun wieder in der normalen mathematischen Umgangssprache.

7.1 Rekursive Funktionen auf natürlichen Zahlen.

Nach unserem Ausflug ins Transfinite kehren wir zu einem bodenständigeren Thema zurück: Rekursiven Funktionen auf natürliche Zahlen.

Der Begriff der “rekursiven Funktionen” soll den algorithmischen Berechenbarkeitsbegriff auf natürlichen Zahlen formal fassen. Dazu zeichnen wir Operationen aus, die “offensichtlich” im informalen Sinne algorithmisch berechenbare Funktionen liefern. Definieren wir also rekursive Funktionen zunächst rekursiv:

Rekursive Definition 7.1 (Rekursive Funktionen) *Eine n -stellige Funktion $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, heißt rekursiv, wenn sie nach einer der folgenden Regeln gebildet ist:*

1. **Addition:** *Die Additionsabbildung $+$: $\mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist rekursiv.*
2. **Multiplikation:** *Die Multiplikationsabbildung $\cdot$: $\mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist rekursiv.*
3. **Indikator der $\geq$ -Relation:** *Die Indikatorfunktion der $\geq$ -Relation $1_{\geq} : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$, also $1_{\geq}(a, b) = 1$ falls $a \geq b$ und $1_{\geq}(a, b) = 0$ falls $a < b$, ist rekursiv.*
4. **Projektionen:** *Jede kanonische Projektion $\pi_{n,i} : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\pi_{n,i}(x_1, \dots, x_n) = x_i$ mit $i, n \in \mathbb{N}$, $i \leq n$, ist rekursiv.*
5. **Komposition:** *Es sei $m \in \mathbb{N}$. Ist $g : \mathbb{N}_0^m \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine rekursive Funktion und sind alle Komponenten $h_i = \pi_{m,i} \circ h$, $i = 1, \dots, m$, einer Funktion $h : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0^m$ rekursiv, so ist auch die Komposition $g \circ h : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ rekursiv.*
6. **kleinste Nullstelle:** *Ist $g : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ rekursiv ($n \in \mathbb{N}$) und gilt*

$$\forall x \in \mathbb{N}_0^n \exists y \in \mathbb{N}_0 : g(x, y) = 0, \quad (80)$$

so ist auch $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$, $f(x) = \min\{y \in \mathbb{N}_0 : g(x, y) = 0\}$ rekursiv.

Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ heißt rekursiv, wenn ihre Indikatorfunktion $1_R : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ rekursiv ist, wobei $1_R(x) = 1$ für $x \in R$ und $1_R(x) = 0$ für $x \in \mathbb{N}_0^n \setminus R$.

Die Bedingung (80) bei der Regel “kleinste Nullstelle” stellt sicher, dass auch die mit dieser Regel gebildeten rekursiven Funktionen total definiert sind.

Beispiele rekursiver Funktionen und Relationen.

1. **Konstante Funktionen.** Jede konstante Funktion $c_m : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit einem Wert $m \in \mathbb{N}_0$ ist rekursiv. Durch vollständige Induktion über m sieht man das so:
Induktionsanfang, $m = 0$: Es ist $c_0(x) = \min\{y \in \mathbb{N}_0 : \pi_{n+1,n+1}(x, y) = 0\}$, da $\pi_{n+1,n+1}(x, y) = y$.
Induktionsvoraussetzung: Gegeben sei $m \in \mathbb{N}_0$, und $c_m : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ sei rekursiv.
Induktionsschluss: Mit $c_{m+1}(x) = m + 1 = \min\{y \in \mathbb{N}_0 : 1_{\geq}(c_m(x), y) = 0\}$ sehen wir, dass c_{m+1} ebenfalls rekursiv ist.

2. **Boolesche Kombinationen.** Ist $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ eine rekursive Relation, so ist auch ihr Komplement $R^c = \mathbb{N}_0^n \setminus R$ eine rekursive Relation, da $1_{R^c}(x) = 1_{\geq}(0, 1_R(x)) = 1_{\geq}(c_0(x), 1_R(x))$ für $x \in \mathbb{N}_0^n$.
Sind $R, S \subseteq \mathbb{N}_0^n$ rekursive Relationen, so ist auch $R \cap S$ eine rekursive Relation, da $1_{R \cap S} = 1_R \cdot 1_S$ rekursiv ist.
Also sind auch alle booleschen Kombination rekursiver Relationen $R_1, \dots, R_m \subseteq \mathbb{N}_0^n$ wieder rekursiv, z.B. $R_1 \cup R_2 = (R_1^c \cap R_2^c)^c$, $R_1 \setminus R_2 = R_1 \cap R_2^c$, $R_1 \triangle R_2 = (R_1 \setminus R_2) \cup (R_2 \setminus R_1)$ etc.

3. **Vergleichsoperationen.** Insbesondere ist $< = \geq^c \subseteq \mathbb{N}_0^2$ und damit auch $> \subseteq \mathbb{N}_0^2$ (wegen $1_{>}(x, y) = 1_{<}(\pi_{2,2}(x, y), \pi_{2,1}(x, y))$) rekursiv. Ebenso sind $\leq = >^c$, $(=) = (\leq \cap \geq) \subseteq \mathbb{N}_0^2$, und $(\neq) = (=)^c$ rekursiv.

4. **modifizierte Differenz.** Die abgeschnittene Differenzabbildung $\dot{-} : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $a \dot{-} b = \max\{a - b, 0\}$ ist rekursiv, denn

$$a \dot{-} b = \min\{y \in \mathbb{N}_0 : b + y \geq a\} = \min\{y \in \mathbb{N}_0 : 1_{<}(b + y, a) = 0\}.$$

5. **Fallunterscheidung.** Sind $n, m \in \mathbb{N}$ und $F_1, \dots, F_m : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ rekursive Funktionen und $R_1, \dots, R_m \subseteq \mathbb{N}_0^n$ eine Partition von $\mathbb{N}_0^n$ in rekursive Relationen, so ist die durch Fallunterscheidung gebildete Funktion

$$F : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad F(x) = F_j(x) \text{ für } x \in R_j \text{ mit } j \in \{1, \dots, m\}$$

rekursiv, denn

$$F = F_1 1_{R_1} + \dots + F_m 1_{R_m}.$$

6. **Polynome und Tupelcodierungen.** Jede Polynomabbildung $\mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist rekursiv, denn sie ist aus Projektionen, Addition und Multiplikation mittels Projektionen zusammengesetzt. Insbesondere sind die Paarcodierung $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\langle m, n \rangle_2 = (m + n)^2 + n + 1$, aber allgemeiner auch alle Tupelcodierungen fester Länge $\langle \cdot \rangle_n : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ aus Definition 2.10 rekursiv.

7. **kleinste Lösung in beschränktem Suchraum, beschränkte Quantoren.** Ist $R \subseteq \mathbb{N}_0^{n+1}$ eine rekursive Relation, so ist auch $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $f(x, a) = \min\{y \in \mathbb{N}_0 : (x, y) \in R \vee y = a\}$ für $x \in \mathbb{N}_0^n$, $a \in \mathbb{N}_0$ rekursiv. Man beachte hierzu, dass

$\{(x, a, y) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : (x, y) \in R \vee y = a\}$ eine rekursive Relation ist. Ebenso ist

$$Q := \{(x, a) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : (x, y) \in R \wedge y < a\}$$

eine rekursive Relation, weil $(x, a) \in Q \Leftrightarrow f(x, a) \neq a$. Damit ist auch

$$\begin{aligned} P &:= \{(x, a) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0, y < a : (x, y) \in R\} \\ &= \{(x, a) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : (x, y) \in R^c \wedge y < a\}^c \end{aligned} \quad (81)$$

eine rekursive Relation.

8. **Teilerrelation.** Die Teilerrelation $| \subseteq \mathbb{N}_0^2$, definiert durch $a|b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : ak = b$, ist rekursiv, denn $a|b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : a \cdot k = b \wedge k < b + 1$.

Übung 7.2 Zeigen Sie: Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist genau dann rekursiv, wenn sie als ihr Graph $f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{N}_0^n\} \subseteq \mathbb{N}_0^{n+1}$ aufgefasst eine rekursive Relation ist.

Wir haben allerdings im Moment noch *keine* Darstellung als rekursive Funktion der *zweistelligen* Selektorfunktion $(i, \langle m_1, \dots, m_n \rangle) \mapsto m_i$ von Tupelcodierungen $\langle m_1, \dots, m_n \rangle$ aus Definition 2.12 mit *variabler* Länge $n \in \mathbb{N}_0$ und variablem $1 \leq i \leq n$. Diese bräuchten wir jedoch, um mit rekursiven Funktionen auch Rekursionen im Stil des Rekursionssatzes der Mengenlehre mit Anfangsstücken, die eine Rekursionsgleichung erfüllen, zu realisieren.

Kurt Gödel hat eine Lösung dieses Problems gefunden, die auf einer Codierung von Tupeln mit Hilfe von endlichen arithmetischen Folgen paarweise teilerfremder Zahlen beruht. Zeigen wir erst die Existenz solcher Folgen:

Aus der elementaren Zahlentheorie verwenden wir die folgende Charakterisierung der Teilerfremdheit zweier ganzer Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$a, b \text{ teilerfremd} \Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{Z} : ax + by = 1 \quad (82)$$

Insbesondere gilt für $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

$$a, b \text{ teilerfremd} \wedge a, c \text{ teilerfremd} \Rightarrow a, bc \text{ teilerfremd} , \quad (83)$$

denn aus $ax + by = 1$ und $au + cv = 1$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{Z}$ folgt

$$a(axu + byu + cxv) + bc \cdot yv = (ax + by)(au + cv) = 1. \quad (84)$$

Weiter gilt für $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$a, b \text{ teilerfremd} \Rightarrow a, b + ac \text{ teilerfremd} , \quad (85)$$

denn aus $ax + by = 1$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ folgt $a(x - cy) + (b + ac)y = 1$.

Lemma 7.3 (endliche arithmetische Folgen teilerfremder Zahlen) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ existiert ein $z \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ die Zahlen $1 + zi$ paarweise teilerfremd sind.

Beweis: Gegeben $n \in \mathbb{N}_0$, nehmen wir irgendeine natürliche Zahl z , die durch alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ teilbar ist, zum Beispiel die Fakultät $z = n!$. Nun seien $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $i < j \leq n$ gegeben. Dann ist $0 < j - i < n$, also $j - i$ ein Teiler von $z = n!$, sagen wir $(j - i)k = z$. Es folgt die Implikationskette

$$1, z \text{ teilerfremd} \quad (86)$$

$$\Rightarrow 1 + zi, z \text{ teilerfremd} \quad (87)$$

$$\Rightarrow 1 + zi, z^2 \text{ teilerfremd} \quad (88)$$

$$\Rightarrow 1 + zi, z(j - i) \text{ teilerfremd} \quad (\text{wegen } (j - i)k = z) \quad (89)$$

$$\Rightarrow 1 + zi, 1 + zj \text{ teilerfremd} \quad (\text{wegen } 1 + zj = (1 + zi) + z(j - i)). \quad (90)$$

□

Der folgende Satz liefert uns nun die Gödelsche Variante der Codierung von Tupeln natürlicher Zahlen variabler Länge:

Satz 7.4 (Gödelsche Selektorfunktion) *Es gibt eine zweistellige rekursive Funktion $S : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{N}_0^n$ existiert ein $b \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i < n$ gilt: $S(b, i) = a_i$.
2. Für alle $b, i \in \mathbb{N}_0$ ist $S(b, i) \leq b \dot{-} 1$.

Beweis: Wir definieren für $b, i \in \mathbb{N}_0$:

$$S(b, i) = \min\{s \in \mathbb{N}_0 : s = b \dot{-} 1 \vee \exists y < b, y \in \mathbb{N}_0 : \exists z < b, z \in \mathbb{N}_0 : b = \langle y, z \rangle_2 \wedge (1 + \langle i, s \rangle_2 z) | y\} \quad (91)$$

Nach Definition ist S rekursiv; man beachte hierzu, dass alle Quantoren in der Definition auf den Bereich unterhalb b beschränkt werden. Zudem gilt $S(b, i) \leq b \dot{-} 1$.

Gegeben $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{N}_0$, nehmen wir $A \in \mathbb{N}_0$ größer als alle $a_0, \dots, a_{n-1}$ und dann $z \in \mathbb{N}$ mit dem Lemma 7.3 so, dass die Zahlen $1 + xz$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$ mit $x \leq \langle n, A \rangle_2$ paarweise teilerfremd sind. Schließlich setzen wir

$$y := \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \langle i, a_i \rangle_2 z), \quad (92)$$

$$b := \langle y, z \rangle_2. \quad (93)$$

Insbesondere folgt $y < b$, $z < b$ und $a_i < b \dot{-} 1$ für alle $i = 0, \dots, n - 1$. Weiter ist y nach Definition durch alle $1 + \langle i, a_i \rangle_2 z$ teilbar. Dagegen ist y nicht durch irgendein $1 + xz$ mit $x = \langle i, a'_i \rangle_2$ teilbar, wobei $i \in \{0, \dots, n - 1\}$ und $a'_i < a_i$, denn alle solchen $1 + xz$ sind wegen $x = \langle i, a'_i \rangle_2 \leq \langle n, A \rangle_2$ teilerfremd von allen Faktoren $1 + \langle i, a_i \rangle_2 z$ und erfüllen $1 + xz > 1$. Nach Definition von $S(b, i)$ folgt $S(b, i) = a_i$ für alle $i = 0, \dots, n - 1$.

□

Dies erlaubt uns nun, eine Tupelkodierung in Analogie zu Definition 2.12 zu definieren, die allerdings nicht auf einer Iteration der Paarcodierung $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ beruht, sondern auf der Selektorfunktion S .

Definition 7.5 (Tupelcodierung) Wir definieren zwei rekursive Funktionen $\text{length} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ und $(\cdot)_i : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ durch

$$\text{length}(b) := S(b, 0), \quad (94)$$

$$(b)_i := S(b, i + 1). \quad (95)$$

Für fixiertes $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die rekursive Funktion $[\cdot, \dots, \cdot] : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ zur Tupelcodierung durch³⁹

$$[a_1, \dots, a_n] := \min\{b \in \mathbb{N}_0 : \text{length}(b) = n \text{ und } (b)_i = a_i \text{ für alle } i = 1, \dots, n\}. \quad (96)$$

Der Satz 7.4 garantiert uns, dass diese Tupelcodierung tatsächlich total definiert ist. Es sei

$$\text{Tupelcodes} := \{[a_1, \dots, a_n] : n \in \mathbb{N}_0, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n\}. \quad (97)$$

Mit

$$\text{Tupelcodes} = \quad (98)$$

$$\{b \in \mathbb{N}_0 : \forall x \in \mathbb{N}_0, x < b : \text{length}(b) \neq \text{length}(x) \vee \exists i \in \mathbb{N}_0, i < \text{length}(b) : (b)_i \neq (x)_i\}$$

sehen wir, dass $\text{Tupelcodes} \subseteq \mathbb{N}_0$ eine rekursive Menge ist.

Tupelcodes können zum Beispiel zur Codierung von n -stelligen Funktionen in 1-stellige Funktionen verwendet werden:

Definition 7.6 (Kontraktion von n -stelligen Funktionen zu 1-stelligen Funktionen) Für eine n -stellige Funktion $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, definieren wir ihre Kontraktion $[f] : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ durch

$$[f](x) := f((x)_0, \dots, (x)_{n-1}).$$

Für eine n -stellige Relation $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$, $n \in \mathbb{N}$, nennen wir

$$[R] := \{x \in \mathbb{N}_0 : [1_R](x) = 1\}$$

ihre Kontraktion.

Insbesondere gilt $1_{[R]} = [1_R]$. Gegeben die Stelligkeit n , können wir $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ aus ihrer Kontraktion $[f]$ mittels

$$f(x_1, \dots, x_n) = [f]([x_1, \dots, x_n])$$

rekonstruieren.

³⁹Für $n = 0$ ist das als $[] := \min\{b \in \mathbb{N}_0 : \text{length}(b) = 0\}$ zu lesen.

Lemma 7.7 (Rekursivität der Kontraktion) *Eine n -stellige Funktion $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, ist genau dann rekursiv, wenn ihre Kontraktion $[f]$ rekursiv ist.*

Beweis: “ $\Rightarrow$ ”: Es sei f rekursiv. Dann ist auch $[f]$ als Komposition von f mit den rekursiven Funktionen $(\cdot)_i$, $i = 0, \dots, n-1$, rekursiv.

“ $\Leftarrow$ ”: Es sei $[f]$ rekursiv. Weil die Tupelcodierung $[\cdot, \dots, \cdot] : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ rekursiv ist, ist dann auch die Komposition

$$f = [f] \circ [\cdot, \dots, \cdot] : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$$

rekursiv. □

Im Rekursionssatz der Mengenlehre haben wir in Rekursionsvorschriften der Gestalt

$$F(x) = R(x, F \cap (\text{less}(x, \triangleleft) \times A)). \quad (99)$$

(siehe Gleichung (50)) ein Anfangsstück $F \cap (\text{less}(x, \triangleleft) \times A)$ der Lösung der Rekursionsgleichung verwendet. Um nun Analoges für rekursive Funktionen mit $\triangleleft = <$ durchzuführen, verwenden wir Tupelcodierungen zur Codierung von Anfangsstücken:

Definition 7.8 (Anfangsstücke) *Für $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ definieren wir die zugehörige Anfangsstückfunktion*

$$\bar{f} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad \bar{f}(m) := [f(0), \dots, f(m-1)]. \quad (100)$$

Anders gesagt:

$$\bar{f}(m) = \min\{b \in \mathbb{N}_0 : \text{length}(b) = m \wedge \forall i \in \mathbb{N}_0, i < m : f(i) = (b)_i\}. \quad (101)$$

Allgemeiner definieren wir für $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}_0$, die zugehörige Anfangsstückfunktion $\bar{f}$ im ersten Argument durch

$$\bar{f} : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad \bar{f}(m, x) := [f(0, x), \dots, f(m-1, x)] \text{ für } m \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{N}_0^n. \quad (102)$$

Anders gesagt: $\bar{f}(m, x) = \overline{f(\cdot, x)}(m)$, d.h. alle Argumente ab dem zweiten werden nur als Parameter mitgenommen.

Weil $\bar{f}$ total definiert ist, zeigt die Darstellung (101), dass $\bar{f}$ rekursiv ist, wenn f rekursiv ist. Umgekehrt ist f rekursiv, falls $\bar{f}$ rekursiv ist, denn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$f(n) = (\bar{f}(n+1))_n. \quad (103)$$

Analoges gilt für die Anfangsstückfunktion mit Parametern.

Definition 7.9 (Einschränkungsfunktion) *Wir definieren die Einschränkungsfunktion $\cdot|_i : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ durch*

$$a|_i := \min\{b \in \mathbb{N}_0 : \text{length}(b) = i \wedge \forall j \in \mathbb{N}_0, j < i : (b)_j = (a)_j\}. \quad (104)$$

Insbesondere ist diese Funktion rekursiv, und es gilt

$$[x_1, \dots, x_n]_i = [x_1, \dots, x_i] \quad (105)$$

für alle $n, i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}_0$.

Satz 7.10 (Rekursiv definierte Funktionen sind rekursiv.) *Es sei $r : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$ rekursiv. Dann ist auch die rekursiv definierte Funktion*

$$f : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad f(x, y) = r(x, \bar{f}(x, y), y) \text{ für } x \in \mathbb{N}_0, y \in \mathbb{N}_0^n \quad (106)$$

rekursiv.

Die Argumente y sind hier einfach nur Parameter.

Beweis des Satzes: Die Anfangsstückfunktion $\bar{f} : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ der Lösung $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ der Rekursionsgleichung wird durch

$$\bar{f}(x, y) = \min\{b \in \mathbb{N}_0 : \text{length}(b) = x \wedge \forall i \in \mathbb{N}_0, i < x : (b)_i = r(i, b|_i, y)\} \quad (107)$$

für $x \in \mathbb{N}_0$ und Parameter $y \in \mathbb{N}_0^n$ gegeben; sie ist also rekursiv. Also ist auch f rekursiv. $\square$

Beispiel 7.11 *Ist $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ rekursiv, so ist auch die Summenfunktion $g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $g(n) = \sum_{k=0}^n f(k)$ rekursiv. Es ist nämlich*

$$g(n) = f(n) + 1_{\{n>0\}}(\bar{g}(n))_{n-1}. \quad (108)$$

Churchsche These. Die Intention bei der Definition rekursiver Funktionen war es, den informalen Begriff der (algorithmisch) berechenbaren Funktionen totalen Funktionen formal zu fassen. *Wurde dieses Ziel erreicht?* Dies ist zunächst keine Frage innerhalb unserer Theorie, weil der Begriff der algorithmisch berechenbaren Funktionen nicht klar mathematisch definiert ist.

Trotzdem ist es “intuitiv einleuchtend”, dass jede rekursive Funktion algorithmisch berechenbar ist. Beispiel “kleinste Nullstelle von f ”: Man berechne der Reihe nach

$$f(0), f(1), f(2), \dots$$

so lange, bis man eine Nullstelle findet; dann ist die Berechnung zu Ende. Formaler kann man das fassen, indem man für rekursive Funktionen Algorithmen einer Programmiersprache angibt.

Die umgekehrte Frage ist schwieriger: Ist jede algorithmisch berechenbare Funktion auch rekursiv? Auch hierfür gibt es mehrere Indizien, die allerdings alle ihre Schwachstellen haben:

- Es ist über viele Jahre kein Kandidat für eine algorithmisch berechenbare totale Funktion $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ gefunden worden, die nicht rekursiv ist.
Kritik: Vielleicht findet morgen jemand ein Beispiel einer Funktion, die “offensichtlich” berechenbar, aber nicht rekursiv ist.
- Formalisierungen der Berechenbarkeit (z.B. mit Maschinenmodellen wie Turingmaschinen, Registermaschinen, Formalisierungen der Semantik von Programmiersprachen über Computern mit potentiell unendlich großem Speicherplatz, . . .) führen auf Definitionen der Berechenbarkeit, die äquivalent zum Begriff rekursiver Funktionen sind. Das gilt auch für Berechenbarkeit über anderen Datentypen wie z.B. Zeichenketten, markierten Bäumen, etc., wenn man Gödelzahlen zur Codierung verwendet.
Kritik: Vielleicht übersehen alle diese Modellierungen der Berechenbarkeit denselben Punkt.⁴⁰

Die “**Churchsche These**” besagt nun:

These 7.12 (Churchsche These) *Eine totale Funktion $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, ist genau dann (algorithmisch) berechenbar, wenn sie rekursiv ist.*

Diese These ist strenggenommen natürlich keine mathematische Aussage, sondern eine These zur Interpretation von Aussagen über rekursive Funktionen. Insofern besteht keine Chance, sie jemals zu beweisen. Formulieren wir eine Variante der Churchschen These für Relationen.

These 7.13 (Churchsche These – Version für Relationen) *Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist genau dann (algorithmisch) entscheidbar, wenn sie rekursiv ist.*

Wir nehmen ab jetzt die Churchsche These zur Interpretation von Sätzen an. Zum Beweis von Sätzen darf sie natürlich nicht verwendet werden. Ab jetzt sind also “rekursiv” und “berechenbar” für Funktionen für uns Synonyme. Ebenso sind “rekursiv” und “entscheidbar” für Relationen für uns Synonyme.

Rekursiv aufzählbare Relationen. Eine abgeschwächte Version der Entscheidbarkeit einer Relation $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ erhalten wir, wenn wir zwar ein algorithmisches Verfahren haben, für jedes $x \in R$ die Tatsache $x \in R$ nachzuweisen, aber es sein kann, dass das Verfahren im Fall $x \in \mathbb{N}_0^n \setminus R$ niemals abbricht, also keinen Nachweis von $x \notin R$ liefert. Definieren wir das formal:

⁴⁰Kandidaten für ganz andere Formalisierungen der Berechenbarkeit sind Formalisierungen von *Quantencomputern*, die auf einer geschickten Verwendung der “quantenmechanischen Verschränkung” beruhen, und Formalisierungen von *probabilistischen Algorithmen*, bei denen zusätzlich ein zufälliger Input verwendet wird und die Berechnung nur mit hoher Wahrscheinlichkeit zum gewünschten Ergebnis kommt. Obwohl diese Varianten des Berechenbarkeitsbegriffs eine ganz andere *Komplexität* (Rechenzeit, Speicherplatzbedarf) der Berechnungen implizieren, bleibt der Berechenbarkeitsbegriff selbst unverändert.

Definition 7.14 (rekursiv aufzählbar) Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$, $n \in \mathbb{N}$, heißt rekursiv aufzählbar, wenn es eine rekursive Relation $Q \subseteq \mathbb{N}_0^{n+1}$ gibt, so dass gilt:

$$R = \{x \in \mathbb{N}_0^n : \exists y \in \mathbb{N}_0 : (y, x) \in Q\} \quad (109)$$

Anschaulich: Um $x \in R$ nachzuweisen, entscheidet man der Reihe nach, ob gilt: $(0, x) \in Q$? $(1, x) \in Q$? $(2, x) \in Q$? ... Sobald man ein $(y, x) \in Q$ gefunden hat, stoppt die Berechnung mit dem Ergebnis $x \in R$. Findet man niemals so ein y , stoppt die Berechnung nie.

Satz 7.15 Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist genau dann rekursiv, wenn R und $R^c = \mathbb{N}_0^n \setminus R$ rekursiv aufzählbar sind.

Beweis: “ $\Rightarrow$ ” Ist R rekursiv, so ist auch $Q := \{(y, x) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0^n : x \in R\}$ rekursiv, und es gilt $R = \{x \in \mathbb{N}_0^n : \exists y \in \mathbb{N}_0 : (y, x) \in Q\}$. Weiter ist auch R^c rekursiv, folglich auch $Q' := \{(y, x) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0^n : x \in R^c\}$ und es gilt $R^c = \{x \in \mathbb{N}_0^n : \exists y \in \mathbb{N}_0 : (y, x) \in Q'\}$. Also sind R und R^c rekursiv aufzählbar.

“ $\Leftarrow$ ” Sind R und R^c rekursiv aufzählbar, sagen wir $R = \{x \in \mathbb{N}_0^n : \exists y \in \mathbb{N}_0 : (y, x) \in Q\}$ und $R^c = \{x \in \mathbb{N}_0^n : \exists y \in \mathbb{N}_0 : (y, x) \in Q'\}$ mit rekursiven Relationen $Q, Q' \subseteq \mathbb{N}_0^{n+1}$, so ist auch $Q \cup Q'$ rekursiv, und es gilt

$$\forall x \in \mathbb{N}_0^n \exists y \in \mathbb{N}_0 : (y, x) \in Q \cup Q'. \quad (110)$$

Also ist

$$f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad f(x) = \min\{y \in \mathbb{N}_0 : (y, x) \in Q \cup Q'\} \quad (111)$$

eine rekursive Funktion, und damit

$$R = \{x \in \mathbb{N}_0^n : (f(x), x) \in Q\} \quad (112)$$

eine rekursive Relation.

□

Lemma 7.16 1. Jede rekursive Relation R ist rekursiv aufzählbar.

2. Sind $R, S \subseteq \mathbb{N}_0^n$, $n \in \mathbb{N}$, rekursiv aufzählbar, so auch $R \cup S$ und $R \cap S$.

Beweis:

1. Es sei $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ rekursiv. Dann ist auch

$$\mathbb{N}_0 \times R = \{(y, x) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0^n : x \in R\}$$

rekursiv, also ist

$$R = \{x \in \mathbb{N}_0^n : \exists y \in \mathbb{N}_0 : (y, x) \in \mathbb{N}_0 \times R\}$$

rekursiv aufzählbar.

2. Gegeben R, S wie in der Voraussetzung, nehmen wir $R', S' \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ rekursiv mit

$$R = \{x \in \mathbb{N}_0^n : \exists y \in \mathbb{N}_0 : (y, x) \in R'\}, \quad (113)$$

$$S = \{x \in \mathbb{N}_0^n : \exists y \in \mathbb{N}_0 : (y, x) \in S'\}. \quad (114)$$

folgt die Behauptung aus den Darstellungen

$$R \cup S = \{x \in \mathbb{N}_0^n : \exists y \in \mathbb{N}_0 : (y, x) \in R' \cup S'\}, \quad (115)$$

$$R \cap S = \{x \in \mathbb{N}_0^n : \exists y \in \mathbb{N}_0 : ((y)_0, x) \in R' \wedge ((y)_1, x) \in S'\}. \quad (116)$$

□

Eng verwandt mit der rekursiven Aufzählbarkeit ist der Begriff der *partiell rekursiven* Funktionen:

Definition 7.17 (partiell rekursive Funktionen) Eine partiell definierte Funktion $f : \mathbb{N}_0^n \dashrightarrow \mathbb{N}_0$ heißt partiell rekursiv, wenn sie als ihr Graph $f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{N}_0^n\} \subseteq \mathbb{N}_0^{n+1}$ aufgefasst rekursiv aufzählbar ist.

Übung 7.18 Zeigen Sie, dass jede total definierte partiell rekursive Funktion $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ rekursiv ist.

7.2 Darstellbarkeit rekursiver Funktionen

Wir beschäftigen uns nun der Darstellung rekursiver Relationen und Funktionen mit Formeln der Peanoarithmetik PA:⁴¹

Definition 7.19 Eine Formel ϕ in der Sprache der Arithmetik mit freien Variablen unter $x = (x_1, \dots, x_n)$ heißt eine Darstellung einer Relation $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$, wenn für alle $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

$$m \in R \Rightarrow PA \vdash \phi[x/\mathbf{N}^m \mathbf{0}], \quad (117)$$

$$m \notin R \Rightarrow PA \vdash \neg \phi[x/\mathbf{N}^m \mathbf{0}]. \quad (118)$$

Hierbei steht $x/\mathbf{N}^m \mathbf{0}$ als Abkürzung für $x_1/\mathbf{N}^{m_1} \mathbf{0}, \dots, x_n/\mathbf{N}^{m_n} \mathbf{0}$.

Eine Formel ϕ in der Sprache der Arithmetik mit freien Variablen unter $x = (x_1, \dots, x_n)$ und y heißt eine Darstellung einer Funktion $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit Inputvariablen x und Outputvariable y , wenn für alle $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

$$PA \vdash \forall y : \phi[x/\mathbf{N}^m \mathbf{0}] \leftrightarrow y = \mathbf{N}^{f(m)} \mathbf{0}. \quad (119)$$

Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ oder Funktion $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ heißt darstellbar, wenn sie eine Darstellung besitzt.

⁴¹Die Ergebnisse dieses Abschnitts liefern die Motivation nach, als Grundsymbole der Sprache der Arithmetik nicht nur die Funktionssymbole $\mathbf{0}$ und $\mathbf{N}$, sondern auch die komplexeren Funktionssymbole $+$ und $\cdot$ aufzunehmen: Ohne diese hätten wir keine Chance gehabt, alle rekursiven Funktionen in der so reduzierten Sprache der Arithmetik darzustellen oder auch Rekursion in dieser reduzierten Sprache der Arithmetik darzustellen.

Übung 7.20 Zeigen Sie in PA:

$$\forall n \forall m : n \leq m \Leftrightarrow n < m \vee n = m.$$

Übung 7.21 Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\text{PA} \vdash \forall k : k \leq N^n 0 \Leftrightarrow k = N^0 0 \vee \dots \vee k = N^n 0$$

Übung 7.22 Zeigen Sie in PA:

$$\forall x \forall y \ x < y \vee x = y \vee y < x$$

und

$$\forall x \forall y \ x < y \Leftrightarrow \neg y \leq x.$$

Übung 7.23 Zeigen Sie, dass eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ genau dann darstellbar ist, wenn ihre Indikatorfunktion $1_R : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ darstellbar ist.

Satz 7.24 (Darstellbarkeit rekursiver Funktionen und Relationen) Jede rekursive Funktion $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ und jede rekursive Relation $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ ist darstellbar.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung für rekursive Funktionen induktiv gemäß der Definition rekursiver Funktionen:

- *Addition:* Die Additionsabbildung $+: \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist darstellbar: Dazu müssen wir für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ zeigen:

$$\text{PA} \vdash \forall y : N^m 0 + N^n 0 = y \Leftrightarrow y = N^{m+n} 0. \quad (120)$$

oder (unter Verwendung der Gleichheitsaxiome) äquivalent dazu:

$$\text{PA} \vdash N^m 0 + N^n 0 = N^{m+n} 0. \quad (121)$$

Wir zeigen dies induktiv über n mit gegebenem $m \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsanfang, $n = 0$: Wir argumentieren in PA. Es gilt: $N^m 0 + N^0 0 = N^m 0 = N^{m+0} 0$.

Induktionsvoraussetzung: Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte (121).

Induktionsschluss:

Wir argumentieren in PA. Es gilt

$$\begin{aligned} N^m 0 + N^{n+1} 0 &= N(N^m 0 + N^n 0) \text{ (mit dem 2. PA-Axiom für die Addition)} \\ &= N(N^{m+n} 0) \text{ (mit der I.V.)} \\ &= N^{m+(n+1)} 0, \end{aligned}$$

wie zu zeigen war.

- *Multiplikation:* Die Multiplikationsabbildung $\cdot : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist darstellbar. Das folgt ganz analog wie eben so: Wir müssen für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ zeigen:

$$\text{PA} \vdash \forall y : N^m 0 \cdot N^n 0 = y \leftrightarrow y = N^{mn} 0. \quad (122)$$

oder äquivalent:

$$\text{PA} \vdash N^m 0 \cdot N^n 0 = N^{mn} 0. \quad (123)$$

Wir zeigen dies induktiv über n mit gegebenem $m \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsanfang, $n = 0$: Wir argumentieren in PA. Es gilt: $N^m 0 \cdot N^0 0 = 0 = N^0 0$ mit dem ersten PA-Axiom für die Multiplikation.

Induktionsvoraussetzung: Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte (123).

Induktionsschluss:

Wir argumentieren in PA. Es gilt

$$\begin{aligned} N^m 0 \cdot N^{n+1} 0 &= N^m 0 \cdot N^n 0 + N^m 0 \quad (\text{mit dem 2. PA-Axiom für die Multiplikation}) \\ &= N^{mn} 0 + N^m 0 \quad (\text{mit der I.V.}) \\ &= N^{mn+m} 0 = N^{m(n+1)} 0 \quad (\text{mit (121)}), \end{aligned}$$

wie zu zeigen war.

- Die Relation $\geq \subseteq \mathbb{N}_0^2$ und damit die Indikatorfunktion $1_{\geq}$ sind darstellbar, und zwar durch die Formel $\exists k : x_2 + k = x_1$. Hierzu ist für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen:

$$\text{im Fall } m \geq n : \quad \text{PA} \vdash \exists k : N^n 0 + k = N^m 0, \quad (124)$$

$$\text{im Fall } m < n : \quad \text{PA} \vdash \neg \exists k : N^n 0 + k = N^m 0. \quad (125)$$

Gegeben $m \geq n$, argumentieren wir in PA so: Wir nehmen $k = N^{m-n} 0$ und erhalten mit (121): $N^n 0 + k = N^{n+(m-n)} 0 = N^m 0$, wie zu zeigen war.

Um (125) zu zeigen, argumentieren wir in der Metasprache induktiv über n :

Induktionsanfang $n = 0$. Hier gibt es kein $m < n$ in $\mathbb{N}_0$.

Induktionsvoraussetzung: Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte (125) für alle $m < n$.

Induktionsschluss:

Gegeben $m < n + 1$, argumentieren wir in PA so: Angenommen, wir haben k mit $N^{n+1} 0 + k = N^m 0$. Mit dem (in PA herleitbaren (!)) Kommutativgesetz der Addition und dem 2. PA-Axiom für die Addition folgt $N^m 0 = N^{n+1} 0 + k = k + N^{n+1} 0 = N(k + N^n 0) = N(N^n 0 + k)$. Im Fall $m = 0$ haben wir $0 = N(N^n 0 + k)$ im Widerspruch zum zweiten PA-Axiom. Im Fall $m \neq 0$ folgt aus $N(N^{m-1} 0) = N(N^n 0 + k)$ mit dem ersten PA-Axiom $N^{m-1} 0 = N^n 0 + k$, im Widerspruch zur folgenden Instanz der Induktionsvoraussetzung: $\neg \exists k : N^{m-1} 0 = N^n 0 + k$. Damit ist $\neg \exists k : N^{n+1} 0 + k = N^m 0$ gezeigt.

- *Projektionen:* Die Projektionen $\pi_{n,i} : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$, $1 \leq i \leq n$, sind darstellbar, und zwar mit der Formel $\phi = (y = x_i)$ mit freien Variablen unter $x = (x_1, \dots, x_n)$ (Input) und y (Output), denn es gilt für alle $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$:

$$\text{PA} \vdash (\forall y : y = x_i \leftrightarrow y = N^{m_i} 0)[x/N^m 0]$$

- *Komposition:* Es seien rekursive Funktionen $g : \mathbb{N}_0^m \rightarrow \mathbb{N}_0$ und $h_1, \dots, h_m : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ gegeben, $h := (h_1, \dots, h_m)$. Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass diese Funktionen darstellbar sind, sagen wir mit den Formeln ϕ mit freien Variablen unter $y = (y_1, \dots, y_m)$ (Input) und z (Output) und ψ_j , $j = 1, \dots, m$, mit freien Variablen unter $x = (x_1, \dots, x_n)$ (Input) und y_j (Output), wobei wir die freien Variablen wenn nötig umbenannt haben, um nur die gewünschten Übereinstimmungen zu haben. Wir zeigen, dass auch $g \circ h$ darstellbar ist, und zwar mit der Formel

$$\chi := (\exists y_1 \dots \exists y_m : \phi \wedge \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_m),$$

d.h. zu zeigen ist für alle $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$:

$$\text{PA} \vdash \forall z : \chi[x/N^k 0] \leftrightarrow z = N^{g(h(k))} 0.$$

Hierzu argumentieren wir in PA: Gegeben z , haben wir die folgende Äquivalenzkette:

$$\begin{aligned} & \chi[x/N^k 0] \\ \Leftrightarrow & \exists y_1, \dots, y_m : \phi \wedge \psi_1[x/N^k 0] \wedge \dots \wedge \psi_m[x/N^k 0] \\ \Leftrightarrow & \exists y_1, \dots, y_m : \phi \wedge y_1 = N^{h_1(k)} 0 \wedge \dots \wedge y_m = N^{h_m(k)} 0 \\ & \text{(weil die } \psi_j \text{ die } h_j \text{ darstellen)} \\ \Leftrightarrow & \phi[y/N^{h(k)} 0] \\ \Leftrightarrow & z = N^{g(h(k))} 0 \text{ (weil } \phi \text{ die Funktion } g \text{ darstellt).} \end{aligned}$$

- *kleinste Nullstelle:* Es sei $g : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ rekursiv, so dass für alle $x \in \mathbb{N}_0^n$ die Funktion $g(x, \cdot)$ eine Nullstelle besitzt. Weiter sei $f(x)$ die kleinste solche Nullstelle. Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass g durch eine Formel ϕ mit freien Variablen unter $x = (x_1, \dots, x_n), y$ (Inputvariablen) und z (Outputvariable) dargestellt wird. Wir zeigen: Die Funktion f wird durch die Formel

$$\psi := \phi[z/0] \wedge \forall y' : (\phi[y/y', z/0] \rightarrow y \leq y') \quad (126)$$

bezüglich x (Inputvariablen) und y (Outputvariable) dargestellt. Gegeben $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$, ist also zu zeigen:

$$\text{PA} \vdash \forall y : \psi[x/N^m 0] \leftrightarrow y = N^{f(m)} 0. \quad (127)$$

Wir argumentieren nun in PA. Weil ϕ die Funktion g darstellt, wissen wir nach der Definition von f :

$$\phi[x/N^m 0, y/N^{f(m)} 0, z/0], \quad (128)$$

$$\neg \phi[x/N^m 0, y/N^k 0, z/0] \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k < f(m). \quad (129)$$

(k in der Metasprache quantifiziert) Nun gilt nach Übung 7.21:

$$\forall y : y \leq N^{f(m)}0 \Leftrightarrow y = N^00 \vee \dots \vee y = N^{f(m)}0. \quad (130)$$

Wir schließen

$$\forall y : y \leq N^{f(m)}0 \wedge \phi[x/N^m0, z/0] \Rightarrow y = N^{f(m)}0. \quad (131)$$

Mit $\forall y, y' : y \not\leq y' \Leftrightarrow y' < y$ (siehe Übungsaufgabe 7.22) schließen wir:

$$\forall y : \phi[x/N^m0, z/0] \Rightarrow y = N^{f(m)}0 \vee N^{f(m)}0 < y, \quad (132)$$

also

$$\forall y : \phi[x/N^m0, z/0] \Rightarrow N^{f(m)}0 \leq y. \quad (133)$$

Nun sei umgekehrt y mit $\forall y' : \phi[x/N^m0, y/y', z/0] \Rightarrow y \leq y'$ gegeben. Setzen wir hier $N^{f(m)}0$ für y' ein, folgt $y \leq N^{f(m)}0$ wegen (128). Gilt zusätzlich $\phi[x/N^m0, z/0]$ für dieses y , folgt $y = N^{f(m)}0$ wegen (131).

Zusammenfassend erhalten wir für jedes y die folgenden Äquivalenzkette:

$$\begin{aligned} & \psi[x/N^m0] \\ \Leftrightarrow & (\phi[x/N^m0, z/0] \wedge \forall y' : (\phi[x/N^m0, y/y', z/0] \Rightarrow y \leq y')) \\ \Leftrightarrow & y = N^{f(m)}0, \end{aligned}$$

wie zu zeigen war.

Damit ist in allen Fällen gezeigt, dass rekursive Funktionen in PA darstellbar sind. Die analoge Aussage für Relationen folgt mit Übungsaufgabe 7.23.

□

7.3 Codierung der Prädikatenlogik 1. Stufe

Erinnern Sie sich an die Codierung prädikatenlogischer Objekte mit Gödelzahlen aus Abschnitt 2.3. Wir nehmen das Alphabet einer abzählbaren Sprache $\mathcal{S}$ 1. Stufe, codiert durch Gödelzahlen $[\rightarrow], [\forall], [\perp], [[]]$ (Zählsymbol für Variablen), $[x]$ (erste Variable), eine Menge $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{N}_0$ von Gödelzahlen für Prädikatensymbole, wobei $[\rightarrow], [\forall], [[]], [x] \notin \mathcal{P}$, aber $[\perp] \in \mathcal{P}$, und disjunkt davon eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{N}_0$ von Gödelzahlen für Funktionssymbole, sowie eine Stelligkeitsabbildung $s : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $s([\perp]) = 0$, die natürlich nur für Argumente in $\mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ relevant ist. Wir nehmen an, dass $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$ und s rekursiv sind.

Wir codieren Variablen, Terme und Formeln der Gestalt $at_1 \dots t_n$ durch Bäume $[at_1 \dots t_n] := [[a], [t_1], \dots, [t_n]]$ und erhalten so Mengen variables, terms, formulas $\subseteq \mathbb{N}_0$ von Gödelzahlen von Variablen, Termen und Formeln.

Wir definieren noch einige rekursive Relationen und Funktionen, die Operationen der Mengenlehre imitieren:

- die codierte Elementrelation $\underline{\subseteq} \subseteq \mathbb{N}_0^2$ für Tupelcodes:

$$x \underline{\subseteq} y :\Leftrightarrow y \in \text{Tupelcodes} \wedge \exists i \in \mathbb{N}_0, i < \text{length}(y) : (y)_i = x \quad (134)$$

Beachten Sie, dass $x \underline{\subseteq} y$ impliziert: $x \leq y - 1$.

- die codierte Inklusionsrelation $\underline{\subseteq} \subseteq \mathbb{N}_0^2$ für Tupelcodes, als Mengen aufgefasst:

$$x \underline{\subseteq} y :\Leftrightarrow x, y \in \text{Tupelcodes} \wedge \forall i \in \mathbb{N}_0, i < \text{length}(x) : (x)_i \underline{\subseteq} y, \quad (135)$$

- die codierte Mengendifferenz $\underline{\setminus} : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ für Tupelcodes, als Mengen aufgefasst:

$$\begin{aligned} x \underline{\setminus} y := \min\{u \in \mathbb{N}_0 : \\ [\forall i \in \mathbb{N}_0, i < \text{length}(u) : (u)_i \underline{\subseteq} x \wedge \neg(u)_i \underline{\subseteq} y] \wedge \\ [\forall j \in \mathbb{N}_0, j < \text{length}(x) : \neg(x)_j \underline{\subseteq} y \Rightarrow (x)_j \underline{\subseteq} u] \} \end{aligned} \quad (136)$$

Man beachte, dass das Minimum existiert, so dass dies in der Tat eine rekursive Funktion definiert.

- den codierten Vereinigungsoperator $\underline{\cup} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ für Tupelcodes mit Einträgen, die Tupelcodes sind:

$$\begin{aligned} \underline{\cup} x := \min\{u \in \mathbb{N}_0 : \\ [\forall i \in \mathbb{N}_0, i < \text{length}(u) : \\ \exists j \in \mathbb{N}_0, j < \text{length}(x) : \exists k \in \mathbb{N}_0, k < \text{length}((x)_j) : ((x)_j)_k = (u)_i] \\ \wedge [\forall j \in \mathbb{N}_0, j < \text{length}(x) : \forall k \in \mathbb{N}_0, k < \text{length}((x)_j) : ((x)_j)_k \underline{\subseteq} u] \} \end{aligned} \quad (137)$$

Weil dieses Minimum existiert, ist $\underline{\cup}$ in der Tat rekursiv mit Werten in den Tupelcodes.

Man beachte die Ähnlichkeit dieser Definitionen mit den analogen Definitionen der Mengenlehre! Damit haben wir sozusagen ein Fragment der Mengenlehre innerhalb der Arithmetik codiert.

Satz 7.25 (Entscheidbarkeit für syntaktische Objekte)

1. Die Mengen

$$\text{variables} = \{[v] : v \text{ ist eine Variable}\}, \quad (138)$$

$$\text{terms} = \{[t] : t \text{ ist ein Term}\} \text{ und} \quad (139)$$

$$\text{formulas} = \{[\phi] : \phi \text{ ist eine Formel}\} \quad (140)$$

sind rekursiv.

2. Es gibt eine rekursive Funktion $\text{freeVar} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \text{Tupelcodes}$, so dass für alle Terme oder Formeln ϕ und alle $x \in \mathbb{N}_0$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) $\exists i \in \mathbb{N}_0, i < \text{length}(\text{freeVar}(\lceil \phi \rceil)) : x = (\text{freeVar}(\lceil \phi \rceil))_i$,
- (b) Es gibt eine Variable $v \in \text{freeVar}(\phi)$ mit $x = \lceil v \rceil$

Dabei bezeichnet freeVar in (a) die genannte rekursive Funktion, aber in (b) die freie-Variablen-Funktion von früher (Definitionen 2.3 und 2.4).

Analog gibt es eine rekursive Funktion $\text{allVar} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \text{Tupelcodes}$, die die ein Tupel aller Variablen (nicht nur freie) in ihrem Argument codiert.

3. Es gibt eine rekursive Funktion $\text{substitution} : \mathbb{N}_0^3 \rightarrow \mathbb{N}_0$, so dass für alle Formeln ϕ , alle Variablen v und alle Terme t gilt:

$$\text{substitution}(\lceil \phi \rceil, \lceil v \rceil, \lceil t \rceil) = \lceil \phi[v/t] \rceil. \quad (141)$$

4. Die codierte Relation der gebundenen Umbenennung

$$\approx := \{(\lceil \phi \rceil, \lceil \psi \rceil) \in \text{formulas} \times \text{formulas} : \phi \approx \psi\} \subseteq \mathbb{N}_0^2 \quad (142)$$

ist rekursiv.

Beweis: Der Beweis besteht darin, die metasprachlich rekursiven Definitionen der prädikatenlogischen Ausdrücke als rekursive Definitionen im Sinne rekursiver Funktionen umzudeuten. Man beachte, dass die folgenden Definitionen nur die früheren Definitionen in codierter Form wiedergeben:

1.

$$\begin{aligned} v \in \text{variables} &\Leftrightarrow v = \lceil \mathbf{x} \rceil \vee [v \in \text{Tupelcodes} \wedge \text{length}(v) = 2 \wedge \\ &\quad (v)_0 = \lceil \rceil \wedge (v)_1 \in \text{variables}] \end{aligned} \quad (143)$$

Wenn man “ $(v)_1 \in \text{variables}$ ” als “ $(\overline{1_{\text{variables}}}(v))_{(v)_1} = 1$ ” liest, hat das die Form einer Rekursionsgleichung wie in Formel (106). Analoges gilt in den nachfolgenden Formeln, ohne dass es explizit erwähnt wird.

$$\begin{aligned} t \in \text{terms} &\Leftrightarrow t \in \text{Tupelcodes} \wedge \text{length}(t) = 1 + s((t)_0) \wedge (t)_0 \in \mathcal{F} \wedge \\ &\quad \forall i \in \mathbb{N}_0, 1 \leq i < \text{length}(t) : (t)_i \in \text{terms}, \end{aligned} \quad (144)$$

$$\begin{aligned} \varphi \in \text{formulas} &\Leftrightarrow \varphi \in \text{Tupelcodes} \wedge \\ &\quad \left[\text{length}(\varphi) = 1 + s((\varphi)_0) \wedge (\varphi)_0 \in \mathcal{P} \wedge \forall i \in \mathbb{N}_0, 1 \leq i < \text{length}(\varphi) : (\varphi)_i \in \text{terms} \right] \\ &\quad \vee [\text{length}(\varphi) = 3 \wedge (\varphi)_0 = \lceil \rightarrow \rceil \wedge (\varphi)_1 \in \text{formulas} \wedge (\varphi)_2 \in \text{formulas}] \\ &\quad \vee [\text{length}(\varphi) = 3 \wedge (\varphi)_0 = \lceil \forall \rceil \wedge (\varphi)_1 \in \text{variables} \wedge (\varphi)_2 \in \text{formulas}] \end{aligned} \quad (145)$$

2. Für $x \in \mathbb{N}_0$ wird $\text{freeVar}(x)$ rekursiv als rekursive Funktion mittels Fallunterscheidung so definiert:

- Falls $x \in \text{Tupelcodes} \wedge (x)_0 \in \mathcal{P} \cup \mathcal{F}$ sei $\text{freeVar}(x)$ das kleinste $u \in \text{Tupelcodes}$ mit den beiden folgenden Eigenschaften:
 - (a) $\forall i \in \mathbb{N}_0, i < \text{length}(u) : \exists j \in \mathbb{N}_0, 1 \leq j < \text{length}(x) :$
 $\exists k \in \mathbb{N}_0, k < \text{length}(\text{freeVar}((x)_j)) : (\text{freeVar}((x)_j))_k = (u)_i,$
 - (b) $\forall j \in \mathbb{N}_0, 1 \leq j < \text{length}(x) : \text{freeVar}((x)_j) \subseteq u.$
- Falls $x \in \text{Tupelcodes} \wedge (x)_0 = [\rightarrow]$ sei $\text{freeVar}(x) := \bigcup [\text{freeVar}((x)_1), \text{freeVar}((x)_2)]$.
- Falls $x \in \text{Tupelcodes} \wedge (x)_0 = [\forall]$ sei $\text{freeVar}(x) := \text{freeVar}((x)_2) \setminus [(x)_1]$.
- Andernfalls sei $\text{freeVar}(x) = []$.

Die Funktion allVar wird analog definiert, nur im Allquantorfall steht statt dessen:

Falls $x \in \text{Tupelcodes} \wedge (x)_0 = [\forall]$ sei $\text{allVar}(x) := \bigcup [\text{allVar}((x)_2), [(x)_1]]$.

3. Wir definieren

$$\text{substitution} : \mathbb{N}_0^3 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad \text{substitution}([\phi], [v], [t]) := [\phi[v/t]] \quad (146)$$

für Formeln oder Terme ϕ , Variablen v und Terme t , und

$$\text{substitution}(a, b, c) := [] \text{ für } (a, b, c) \notin (\text{formulas} \cup \text{terms}) \times \text{variables} \times \text{terms}. \quad (147)$$

Weil in der metasprachlichen Definition des Substitutionsoperators im Allquantorfall eine Umbenennung gebundener Variablen mit neuen Variablen auftritt, die vielleicht die Formel unkontrolliert verlängert, und zudem ein iterierter rekursiver Aufruf des Substitutionsoperators erfolgt, schreiben wir die Funktion substitution nicht direkt rekursiv auf, sondern arbeiten wir mit einer Technik, die “Berechnungsprotokolle” oder kurz “Zeugen” der Berechnung verwendet:⁴²

Weil substitution total definiert ist, genügt es zu zeigen, dass sie partiell rekursiv ist, also als ihr Graph aufgefasst rekursiv aufzählbar ist. Als “Zeugen” für Aussagen “ $s = \text{substitution}(\varphi, v, t)$ ” verwenden wir Tupelcodes y , die endliche Anfangsstücke des Graphen der Funktion substitution codieren. Wir definieren dazu eine rekursive Relation $\text{substitutionPiece} \subseteq \mathbb{N}_0$ so: Für $y \in \mathbb{N}_0$ gelte $y \in \text{substitutionPiece}$ genau dann, wenn Folgendes eintritt:

$y \in \text{Tupelcodes}$ und für alle $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i < \text{length}(y)$ gilt
 $(y)_i \in \text{Tupelcodes}$ und $\text{length}((y)_i) = 4$, und für $s := (y)_0$, $\varphi := (y)_1$, $v := (y)_2$ und $t := (y)_3$ gilt $s, \varphi \in \text{formulas} \cup \text{terms}$, $v \in \text{variables}$, $t \in \text{terms}$ sowie weiter:

- *Fall “Primformel oder Term”*: Falls $(\varphi)_0 \in \mathcal{P} \cup \mathcal{F}$ gelte

⁴²Die Technik ähnelt etwas der Realisierung von Rekursionen in der Informatik mit Hilfe von “Stacks”.

- $\text{length}(\varphi) = \text{length}(s)$,
- $\forall j \in \mathbb{N}_0, 1 \leq j < \text{length}(s) : [(s)_j, (\varphi)_j, v, t] \subseteq y|_i$, d. h. anschaulich: für alle Argumente $(\varphi)_j$ von φ gibt es einen Zeugen in y mit Index kleiner als i , der $(s)_j = \text{substitution}((\varphi)_j, v, t)$ bezeugt.
- *Fall “Implikation”*: Falls $\varphi \in \text{formulas} \wedge (\varphi)_0 = [\rightarrow]$ gelte $s \in \text{formulas}$ und $s = [[\rightarrow], (s)_1, (s)_2]$ und $[(s)_1, (\varphi)_1, v, t] \subseteq y|_i$ und $[(s)_2, (\varphi)_2, v, t] \subseteq y|_i$ d. h. anschaulich: für die Prämisse $(\varphi)_1$ und die Konklusion $(\varphi)_2$ von φ gibt es je einen Zeugen in y mit Index kleiner als i , der die entsprechende Substitution $(s)_j = \text{substitution}((\varphi)_j, v, t)$ mit $j = 1, 2$ bezeugt.
- *Fall “Allformel”*: Falls $\varphi \in \text{formulas} \wedge (\varphi)_0 = [\forall]$ existieren $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $k < i$ und $l < i$, so dass gilt:

$$s = [[\forall], z, ((y)_k)_0] \quad \wedge \quad (148)$$

$$(y)_k = [((y)_k)_0, ((y)_l)_0, v, t] \quad \wedge \quad (149)$$

$$(y)_l = [((y)_l)_0, (\varphi)_2, (\varphi)_1, z] \quad (150)$$

mit der Abkürzung

$$z := \text{newvar} \left(\bigcup [\text{freeVar}(t), \text{freeVar}(\varphi), [v]] \right) \quad \text{wobei} \quad (151)$$

$$\text{newvar}(u) := \min\{v \in \mathbb{N}_0 : v \in \text{variables} \wedge \neg v \subseteq u\}. \quad (152)$$

Anschaulich gesprochen bedeutet das: Ist $\varphi = [\forall \mathbf{w} \psi]$, $v = [\mathbf{v}]$ und $t = [\mathbf{t}]$, so nehmen wir die kleinste “neue” codierte Variable $z = [\mathbf{z}]$, und zwei Zeugen $(y)_k$ und $(y)_l$ in $y|_i$ für die beiden Substitutionen auf der rechten Seite in

$$[\phi[\mathbf{v}/\mathbf{t}]] = [\forall \mathbf{z} \psi[\mathbf{w}/\mathbf{z}][\mathbf{v}/\mathbf{t}]]. \quad (153)$$

Dabei haben die obenstehenden Tupelinträge die Bedeutung $[w] = (\varphi)_1$, $[\psi] = (\varphi)_2$, $[\psi[\mathbf{w}/\mathbf{z}]] = ((y)_l)_0$, $[\psi[\mathbf{w}/\mathbf{z}][\mathbf{v}/\mathbf{t}]] = ((y)_k)_0$.

- Andernfalls gelte $s = []$.

Man beachte, dass bei diesem “rekursiven Aufruf des Substitutionsoperators” mit Formelcodes im ersten Argument, die keine Primformelcodes sind, die Anzahl der Knoten im Baum mit Markierungen $[\rightarrow]$ oder $[\forall]$ abnimmt. Deshalb bricht die Berechnung der Substitution ab, d.h. es genügt ein Tupelcode y aus endlich vielen Wertetupeln der Funktion substitution für jede Berechnung.

Damit können wir den Graphen der Funktion substitution so schreiben:

$$\begin{aligned} s &= \text{substitution}(\varphi, v, t) \Leftrightarrow \\ \exists y \in \text{substitutionPiece} \exists i \in \mathbb{N}_0, i < \text{length}(y) : [s, \varphi, v, t] &= (y)_i. \end{aligned} \quad (154)$$

Also ist die Funktion substitution partiell rekursiv und damit (da total definiert) rekursiv.

4. Die codierte Relation $x \approx y$ der gebundenen Umbenennung wird rekursiv so definiert:

- Falls $x, y \in \text{formulas} \wedge \text{length}(x) = \text{length}(y) \wedge (x)_0 = (y)_0$ gelte $x \approx y$ genau dann, wenn einer der folgenden drei Fälle eintritt:
 - $(x)_0 \in \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \wedge \forall i \in \mathbb{N}_0, 1 \leq i < \text{length}(x) : (x)_i \approx (y)_i$ oder
 - $(x)_0 = [\rightarrow] \wedge (x)_1 \approx (y)_1 \wedge (x)_2 \approx (y)_2$ oder
 - $(x)_0 = [\forall] \wedge (x)_2 \approx \text{substitution}((y)_2, (y)_1, (x)_1)$.
- Andernfalls gelte $x \approx y$ nicht.

□

Auch Herleitungen haben wir früher in Definition 2.25 als spezielle Bäume mit Markierungen in $\mathbf{A}, \mathbf{I}, \mathbf{U}, \rightarrow^-, \rightarrow^+, \forall^-, \forall^+$ definiert. Wir nehmen nun Codenummern $[\mathbf{A}], [\mathbf{I}], [\mathbf{U}], [\rightarrow^-], [\rightarrow^+], [\forall^-], [\forall^+]$ für diese Markierungen und codieren auch die Herleitungsbäume durch ihre Gödelzahlen. Damit erhalten wir:

Satz 7.26 (Entscheidbarkeit von Herleitungen)

1. Die Menge $\text{herleitungen} \subseteq \mathbb{N}_0$ aller Gödelzahlen $[H]$ von Herleitungen H ist rekursiv.
2. Zudem gibt es eine rekursive Funktion $\text{assumptions} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \text{Tupelcodes}$, so dass für alle Herleitungen H und alle $\varphi \in \mathbb{N}_0$ gilt: gilt die folgenden Aussagen äquivalent sind:
 - (a) Es gibt eine Formel ϕ mit $[\phi] = \varphi$ und $\phi \in \text{assumptions}(H)$ (im früher definierten Sinn),
 - (b) $\varphi \in \text{assumptions}([H])$ (im neuen Sinn).

Beweis: Wir schreiben einfach die Definition der Herleitungen nochmal in codierter Notation auf. Dabei definieren wir zur besseren Lesbarkeit rekursiv die Menge herleitungen und die Funktion assumptions simultan, obwohl die Definition von assumptions in der Definition von herleitungen verwendet wird, aber nicht umgekehrt:

Es sei $h \in \mathbb{N}_0$. Ist $h \notin \text{Tupelcodes}$, so ist $h \notin \text{herleitungen}$. Andernfalls unterscheiden wir folgende Fälle:

1. Ist $\text{length}(h) = 2$, $(h)_0 = [\mathbf{A}]$ und $(h)_1 \in \text{formulas}$, so ist $h \in \text{herleitungen}$ und $\text{assumptions}(h) = [(h)_1]$.
2. Ist $\text{length}(h) = 2$, $(h)_0 = [\mathbf{I}]$ und $(h)_1 \in \text{formulas}$ mit

$$(h)_1 = [[\rightarrow^-], [[\rightarrow^-], [[\rightarrow^-], ((h)_1)_2, [\perp]], [\perp]], ((h)_1)_2],$$

so ist $h \in \text{herleitungen}$ und $\text{assumptions}(h) = []$.

3. Ist $\text{length}(h) = 3$, $(h)_0 = [\mathbf{U}]$ so ist $h \in \text{herleitungen}$ genau dann, wenn $(h)_1 \in \text{formulas}$, $(h)_2 \in \text{herleitungen}$ und $(h)_1 \approx ((h)_2)_1$. Weiter ist hier $\text{assumptions}(h) = \text{assumptions}((h)_2)$.
4. Ist $\text{length}(h) = 4$, $(h)_0 = [\rightarrow^-]$, so ist $h \in \text{herleitungen}$ genau dann, wenn $(h)_1 \in \text{formulas}$, $(h)_2, (h)_3 \in \text{herleitungen}$ und $((h)_2)_1 = [[\rightarrow], ((h)_3)_1, (h)_1]$. Weiter ist hier $\text{assumptions}(h) = \underline{\bigcup}[\text{assumptions}((h)_2), \text{assumptions}((h)_3)]$.
5. Ist $\text{length}(h) = 3$, $(h)_0 = [\rightarrow^+]$, so ist $h \in \text{herleitungen}$ genau dann, wenn $(h)_1 \in \text{formulas}$, $(h)_2 \in \text{herleitungen}$ und $(h)_1 = [[\rightarrow], ((h)_1)_1, ((h)_2)_1]$. Weiter ist hier $\text{assumptions}(h) = \text{assumptions}((h)_2) \setminus [(h)_1)_1]$.
6. Ist $\text{length}(h) = 4$, $(h)_0 = [\forall^-]$, so ist $h \in \text{herleitungen}$ genau dann, wenn $(h)_1 \in \text{formulas}$, $(h)_2 \in \text{terms}$, $(h)_3 \in \text{herleitungen}$ und

$$(((h)_3)_1)_0 = [\forall] \wedge (h)_1 = \text{substitution}((((h)_3)_1)_2, (((h)_3)_1)_1, (h)_2).$$

Weiter ist hier $\text{assumptions}(h) = \text{assumptions}((h)_3)$.

7. Ist $\text{length}(h) = 3$, $(h)_0 = [\forall^+]$, so ist $h \in \text{herleitungen}$ genau dann, wenn $(h)_1 \in \text{formulas}$, $(h)_2 \in \text{herleitungen}$, $(h)_1 = [[\forall], ((h)_1)_1, ((h)_1)_2]$ und

$$\forall i \in \mathbb{N}_0, i < \text{length}(\text{assumptions}((h)_2)) : \neg((h)_1)_1 \in \text{freeVar}((\text{assumptions}((h)_2))_i).$$

Weiter ist hier $\text{assumptions}(h) = \text{assumptions}((h)_2)$.

8. Andernfalls ist $h \notin \text{herleitungen}$ und $\text{assumptions}(h) = []$.

□

Rekursiv aufzählbare Mengen von Formeln. Wir verwenden die folgende *Sprechweise*: Wir nennen eine Menge Φ von Formeln rekursiv aufzählbar, wenn $\{[\phi] : \phi \in \Phi\} \subseteq \mathbb{N}_0$ rekursiv aufzählbar ist.

Korollar 7.27 (Rekursive Aufzählbarkeit der Theoreme) *Es sei $\mathcal{A}$ ein rekursiv aufzählbares Axiomensystem über $\mathcal{S}$, d.h. $\mathcal{A} := \{[\phi] : \phi \in \mathcal{A}\} \subseteq \{\varphi \in \text{formulas} : \text{freeVar}(\varphi) = []\}$ sei rekursiv aufzählbar. Dann ist auch*

$$\text{theorems}_{\mathcal{A}} := \{[\phi] : \phi \in \text{theorems}(\mathcal{A})\} \quad (155)$$

rekursiv aufzählbar.

Beweis: Wir schreiben

$$\mathcal{A} = \{\varphi \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : (y, \varphi) \in R\} \quad (156)$$

mit einer rekursiven Relation $R \subseteq \mathbb{N}_0^2$. Dann ist auch die Menge aller Tupelcodes mit Einträgen in $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \text{Tupel}_{\mathcal{A}} &:= \{t \in \mathbb{N}_0 : t \in \text{Tupelcodes} \wedge \forall i \in \mathbb{N}_0, i < \text{length}(t) : (t)_i \in \mathcal{A}\} \\ &= \{t \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : y \in \text{Tupelcodes} \wedge t \in \text{Tupelcodes} \wedge \\ &\quad \text{length}(y) = \text{length}(t) \wedge \forall i \in \mathbb{N}_0, i < \text{length}(t) : ((y)_i, (t)_i) \in R\} \end{aligned} \quad (157)$$

rekursiv aufzählbar. Dann ist auch

$$\begin{aligned} \text{theorems}_{\mathcal{A}} &= \{[\phi] : \exists \psi_1, \dots, \psi_n \in \mathcal{A} : \exists H \text{ Herleitung} : \psi_1, \dots, \psi_n \vdash_H^S \phi\} \\ &= \{\varphi \in \mathbb{N}_0 : \exists h \in \mathbb{N}_0 : h \in \text{herleitungen} \wedge \text{assumptions}(h) \in \text{Tupel}_{\mathcal{A}} \wedge (h)_1 = \varphi\} \end{aligned} \quad (158)$$

rekursiv aufzählbar; man beachte hierbei, dass die Existenzquantoren über den Herleitungscode h und eine Hilfsvariable y , die als “Zeuge” für $\text{assumptions}(h) \in \text{Tupel}_{\mathcal{A}}$ benötigt wird, zu einem einzigen Existenzquantor über das Tupel $Y = [h, y]$ zusammengefasst werden können.

□

7.4 Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Lemma 7.28 (Darstellbarkeit rekursiver Relationen in Erweiterungen der Peanoarithmetik) *Es sei $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ eine darstellbare Relation und ϕ eine Formel in der Sprache $\mathcal{S}$ der Arithmetik mit freien Variablen unter $x = (x_1, \dots, x_n)$, die R darstellt. Es sei $\mathcal{A}$ ein konsistentes Axiomensystem $\mathcal{A}$ über $\mathcal{S}$, das die Peanoarithmetik umfasst: $\text{PA} \subseteq \mathcal{A}$. Dann sind für jedes $m \in \mathbb{N}_0^n$ die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. $m \in R$,
2. $\text{PA} \vdash \phi[x/m]$,
3. $\mathcal{A} \vdash \phi[x/m]$,
4. $\mathcal{A} \not\vdash \neg\phi[x/m]$,
5. $\text{PA} \not\vdash \neg\phi[x/m]$.

Beweis: “1. $\Rightarrow$ 2.” gilt nach Definition, da ϕ die Relation R darstellt.

“2. $\Rightarrow$ 3.” ist eine Konsequenz von $\text{PA} \subseteq \mathcal{A}$.

“3. $\Rightarrow$ 4.” gilt aufgrund der vorausgesetzten Konsistenz von $\mathcal{A}$.

“4. $\Rightarrow$ 5.” ist nochmal eine Konsequenz von $\text{PA} \subseteq \mathcal{A}$.

“5. $\Rightarrow$ 1.” ist die Kontraposition von

$$m \notin R \Rightarrow \text{PA} \vdash \neg\phi[x/m],$$

was nach Definition eine Konsequenz davon ist, dass R durch ϕ dargestellt wird.

□

Übung 7.29 (Die Ziffernabbildung ist rekursiv) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\text{digit} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \text{digit}(m) = \lceil \mathbf{N}^m \mathbf{0} \rceil, \quad (159)$$

die jeder natürlichen Zahl den Code ihrer Ziffer zuordnet, rekursiv ist.

Satz 7.30 (Satz von Church) Es sei $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ eine konsistente Theorie über der Sprache $\mathcal{S}$ der Arithmetik mit einem Axiomensystem $\mathcal{A}$, das die Axiome der Peanoarithmetik umfasst. Dann ist $\{\lceil \phi \rceil : \phi \in \text{theorems}(\mathcal{A})\}$ nicht rekursiv.

Beweis. Der Beweis beruht auf dem Cantorschen Diagonalargument:

Angenommen, $\text{theorems}_{\mathcal{A}} := \{\lceil \phi \rceil : \phi \in \text{theorems}(\mathcal{A})\}$ ist doch rekursiv.

Dann ist auch

$$D := \{\varphi \in \text{formulas} : \quad (160)$$

$$\text{freeVar}(\varphi) \subseteq \lceil \mathbf{x} \rceil \wedge \text{substitution}(\varphi, \lceil \mathbf{x} \rceil, \lceil \mathbf{N}^{\varphi} \mathbf{0} \rceil) \in \text{theorems}_{\mathcal{A}}\} \quad (161)$$

rekursiv, also auch D^c . Es sei ψ mit der einzigen freien Variable $\mathbf{x}$ eine darstellende Formel für D^c . Dann gilt die Äquivalenzkette:

$$\begin{aligned} & \lceil \psi \rceil \in D^c \\ \Leftrightarrow & \text{PA} \vdash \psi[\mathbf{x} / \mathbf{N}^{\lceil \psi \rceil} \mathbf{0}] \text{ (weil } \psi \text{ } D^c \text{ darstellt)} \\ \Leftrightarrow & \mathcal{A} \vdash \psi[\mathbf{x} / \mathbf{N}^{\lceil \psi \rceil} \mathbf{0}] \text{ (nach Lemma 7.28)} \\ \Leftrightarrow & \text{substitution}(\lceil \psi \rceil, \lceil \mathbf{x} \rceil, \lceil \mathbf{N}^{\lceil \psi \rceil} \mathbf{0} \rceil) \in \text{theorems}_{\mathcal{A}} \\ \Leftrightarrow & \lceil \psi \rceil \in D, \end{aligned}$$

ein Widerspruch.

□

Bemerkungen.

- Der Satz kann so interpretiert werden: Für ein Axiomensystem $\mathcal{A}$ der Sprache der Arithmetik, das die Peanoarithmetik umfasst, gilt: Wenn wir ein algorithmisches Entscheidungsverfahren haben, das für beliebige geschlossene arithmetische Formeln feststellt, ob sie aus $\mathcal{A}$ herleitbar sind, so ist $\mathcal{A}$ inkonsistent (und damit jede Formel aus $\mathcal{A}$ herleitbar).
- Es wird nicht verlangt, dass das Standardmodell von PA ein Modell von $\mathcal{A}$ ist. Das Theorem gilt daher auch für Axiomensysteme, die nur Nichtstandardmodelle besitzen.

- Ist im Satz von Church das Axiomensystem $\mathcal{A}$ zusätzlich rekursiv aufzählbar, so ist die Menge $\text{theorems}_{\mathcal{A}}^c$ aller geschlossenen Formeln, die *keine* Theoreme in $\mathcal{T}$ sind, nicht rekursiv aufzählbar. Andernfalls wären nämlich sowohl $\text{theorems}_{\mathcal{A}}^c$ also auch $\text{theorems}_{\mathcal{A}}$ rekursiv aufzählbar, im Widerspruch dazu dass $\text{theorems}_{\mathcal{A}}$ nicht rekursiv ist.

Korollar 7.31 (erster Unvollständigkeitssatz, Gödel/Rosser) *Es sei $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ eine konsistente Theorie über der Sprache $\mathcal{S}$ der Arithmetik mit einem rekursiv aufzählbaren Axiomensystem $\mathcal{A}$, das die Axiome der Peanoarithmetik umfasst. Dann ist $\mathcal{T}$ unvollständig, d.h. es gibt eine geschlossene Formel ϕ über $\mathcal{S}$ mit $\mathcal{A} \not\vdash \phi$ und $\mathcal{A} \not\vdash \neg\phi$*

Beweis: Wir definieren die rekursive Menge

$$\text{closed-formulas} = \{[\phi] : \phi \text{ ist geschlossene Formel über } \mathcal{S}\} \quad (162)$$

$$= \{\varphi : \varphi \in \text{formulas} \wedge \text{length}(\text{freeVar}(\varphi)) = 0\} \subseteq \mathbb{N}_0. \quad (163)$$

Wir gehen indirekt vor und nehmen an, $\mathcal{T}$ sei vollständig. Zusammen mit der Konsistenz von $\mathcal{T}$ folgt

$$\{[\phi] : \phi \in \text{theorems}(\mathcal{A})\}^c = \{[\phi] : \neg\phi \in \text{theorems}(\mathcal{A})\} \cup \text{closed-formulas}^c. \quad (164)$$

Nun sind $\{[\phi] : \phi \in \text{theorems}(\mathcal{A})\}$ und $\{[\phi] : \neg\phi \in \text{theorems}(\mathcal{A})\}$ rekursiv aufzählbar und closed-formulas^c rekursiv, also auch $\{[\phi] : \neg\phi \in \text{theorems}(\mathcal{A})\} \cup \text{closed-formulas}^c$ rekursiv aufzählbar nach Lemma 7.16. Mit Satz 7.15 folgt: $\{[\phi] : \phi \in \text{theorems}(\mathcal{A})\}$ ist rekursiv, im Widerspruch zum Satz von Church.

□

Korollar 7.32 (Unentscheidbarkeit der Gültigkeit arithmetischer Formeln) *Es sei $\mathcal{S}$ die Sprache der Arithmetik und $\mathcal{N}$ das Standardmodell der Peanoarithmetik. Dann ist die folgende Menge nicht rekursiv aufzählbar:*

$$\text{true-formulas} := \{[\phi] : \phi \text{ ist geschlossene Formel über } \mathcal{S} \text{ mit } \mathcal{N} \models \phi\}. \quad (165)$$

Insbesondere ist true-formulas auch nicht rekursiv.

Beweis: Wir setzen

$$\mathcal{A} := \{\phi : \phi \text{ ist geschlossene Formel über } \mathcal{S} \text{ mit } \mathcal{N} \models \phi\}. \quad (166)$$

Dann ist $\mathcal{A} = \text{theorems}(\mathcal{A})$ ein vollständiges Axiomensystem über $\mathcal{S}$, und nach dem Korrektheitssatz ist es konsistent. Weil $\mathcal{N}$ ein Modell der Peanoarithmetik ist, folgt $\text{PA} \subseteq \mathcal{A}$. Mit dem ersten Unvollständigkeitssatz schließen wir durch Kontraposition: $\text{true-formulas} = \{[\phi] : \phi \in \mathcal{A}\}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.

□

Es gibt also kein algorithmisches Entscheidungsverfahren, das für jede geschlossene Formel der Sprache der Arithmetik entscheidet, ob sie im Standardmodell der Arithmetik wahr ist oder nicht.

Anwendungen:

- **Mengenlehre.** Indem wir die Sprache der Mengenlehre definitorisch um die Konstanten ω (Menge der natürlichen Zahlen) und alle Funktions- und Prädikatensymbole $=$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{0}$, $+$, und $\cdot$ erweitern, können wir jeder Formel ϕ in der Sprache $\mathcal{S}$ der Arithmetik eine Formel ϕ^ω , ihre Relativierung auf ω , in der Sprache der Mengenlehre zuordnen. Es sei ZF^* eine rekursiv aufzählbare Erweiterung von ZF, z.B. ZF selbst, oder ZFC, oder $\text{ZF} + "V = L"$. Dann ist

$$\mathcal{A} := \{\phi : \phi \text{ ist geschlossene Formel in } \mathcal{S} \text{ mit } \text{ZF}^* \vdash \phi^\omega\}$$

ein rekursiv aufzählbares Axiomensystem über $\mathcal{S}$. Falls ZF^* konsistent ist, dann ist auch $\mathcal{A}$ konsistent über $\mathcal{S}$. Außerdem gilt $\text{PA} \subseteq \mathcal{A}$. Falls ZF^* konsistent ist, ist also das Axiomensystem $\mathcal{A}$ und damit auch ZF^* unvollständig. Insbesondere sind für geschlossene Formeln ϕ in $\mathcal{S}$ die Aussagen $\mathcal{N} \models \phi$ und $\text{ZF}^* \vdash \phi^\omega$ nicht immer äquivalent. Der Wahrheitsbegriff für arithmetische geschlossene Formeln im Standardmodell $\mathcal{N}$ lässt sich also auch in der Mengenlehre nicht richtig algorithmisch fassen.

- **Prädikatenlogik 2. Stufe.** In einer prädikatenlogischen Sprache 2. Stufe hat man zusätzlich zu den Funktionssymbolen und Prädikatensymbolen einer Sprache 1. Stufe, die man sich nun als *Funktionskonstanten* und *Prädikatenkonstanten* vorstellen sollte, auch noch *Funktionsvariablen* und *Prädikatenvariablen*, die auch jeweils eine Stelligkeit zugeordnet bekommen. Variablen im früheren Sinn nennen wir zur Unterscheidung davon auch *Objektvariablen*.

Terme 2. Stufe werden dann rekursiv so definiert:

- Jede Objektvariable ist ein Term 2. Stufe.
- Sind $t_1, \dots, t_n$ Terme 2. Stufe und ist f eine n -stellige Funktionskonstante oder Funktionsvariable ($n \in \mathbb{N}_0$), so ist auch $ft_1 \dots t_n$ ein Term.

Bei Formeln 2. Stufe erlaubt man auch Quantifizierung von Funktions- und Prädikatenvariablen. Rekursiv definieren wir also:

- Sind $t_1, \dots, t_n$ Terme 2. Stufe und ist p eine n -stellige Prädikatenkonstante oder Prädikatenvariable ($n \in \mathbb{N}_0$), so ist $pt_1 \dots t_n$ eine (Prim-)Formel 2. Stufe. Insbesondere ist $\perp$ eine Formel 2. Stufe
- Sind ϕ und ψ Formeln 2. Stufe, so ist auch $\rightarrow \phi\psi$ eine Formel 2. Stufe.
- Ist ϕ eine Formel 2. Stufe und ist v eine Objekt-, Funktions- oder Prädikatenvariable, so ist auch $\forall v\phi$ eine Formel 2. Stufe.

Zum Beispiel kann man in der Prädikatenlogik 2. Stufe auf das Gleichheitssymbol als Grundsymbol verzichten und es (ähnlich wie in der Mengenlehre) so definieren:

$$x = y : \leftrightarrow \forall P : Px \leftrightarrow Py \quad (167)$$

(P eine einstellige Prädikatenvariable, x und y Objektvariablen)

Auch kann man statt des Induktionsschemas der Peanoarithmetik nun ein (viel stärkeres) Induktionsaxiom 2. Stufe formulieren:

$$\forall P \, P\mathbf{0} \rightarrow (\forall m : Pm \rightarrow P\mathbf{N}m) \rightarrow \forall m \, Pm, \quad (168)$$

(P eine 1-stellige Prädikatenvariable, m eine Objektvariable, $\mathbf{0}$ eine Objektkonstante, also eine 0-stellige Funktionskonstante, $\mathbf{N}$ eine 1-stellige Funktionskonstante)

Strukturen $\mathcal{M}$ 2. Stufe liegt ebenso wie Strukturen 1. Stufe ein nichtleeres Universum M zugrunde, sowie eine Interpretation $f^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow M$ bzw. $p^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$ für jede n -stellige Funktionskonstante f bzw. Prädikatenkonstante p . Neben den Belegungen von Objektvariablen mit Werten in M belegt man nun auch Funktionsvariablen mit Werten in $M^{M^n} = \{f : f : M^n \rightarrow M\}$ und Prädikatenvariablen mit Werten in $\mathfrak{P}(M^n)$; diese Bereiche verwendet man auch bei der Definition der Semantik von Allformeln über Funktions- und Prädikatenvariablen.

Die Peanoarithmetik 2. Stufe, bei der das Induktionsschema 1. Stufe durch das Induktionsaxiom 2. Stufe ersetzt ist, charakterisiert dann das Standardmodell $\mathcal{N}$ der Peanoarithmetik bis auf Isomorphie eindeutig, anders als in der 1. Stufe, in der wir immer auch Nichtstandardmodelle hatten.

Dieser Vorteil wird aber durch einen schwerwiegenden Nachteil erkauft: Es gibt keinen entscheidbaren, korrekten, vollständigen Herleitungskalkül 2. Stufe! Denn andernfalls wäre entscheidbar, welche geschlossenen Formeln in der Sprache der Arithmetik 2. Stufe herleitbar sind, und damit auch insbesondere auch entscheidbar, welche geschlossenen Formeln in der Sprache der Arithmetik 1. Stufe im Standardmodell $\mathcal{N}$ gültig sind, ein Widerspruch. Jeder entscheidbare, korrekte Herleitungskalkül 2. Stufe ist also unvollständig.

Ähnliches gilt für die analog definierte Prädikatenlogik n -ter Stufe, $n \geq 3$, und Typentheorien wie den typisierten Lambdakalkül.

7.5 Das Halteproblem

Rekursive Definition 7.33 (Codes für rekursive und partiell rekursive Funktionen) *Wir definieren rekursiv eine Menge $\text{programs} \subseteq \mathbb{N}_0$ von Codenummern sowie die durch diese Codenummern p codierten partiellen Funktionen f_p so: Wir fixieren zunächst verschiedene Gödelzahlen $[+]$, $[\cdot]$, $[\geq]$, $[\pi]$, $[\circ]$, $[\mu] \in \mathbb{N}_0$ für die Symbole $+$, $\cdot$, $\geq$, π , $\circ$, μ . Gegeben $p \in \mathbb{N}_0$, gelte $p \in \text{programs}$ genau dann, wenn $p \in \text{Tupelcodes}$ und einer der folgenden Fälle eintritt.⁴³*

⁴³Man stelle sich in der folgenden Liste $(p)_0$ als eine Markierung des Typs vor und $(p)_1$ als die Stelligkeit der codierten partiellen Funktion.

1. *Addition:* $p = [\lceil + \rceil, 2]$. In diesem Fall setzen wir $f_p := + : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$.
2. *Multiplikation:* $p = [\lceil \cdot \rceil, 2]$. Hier setzen wir $f_p := \cdot : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$.
3. *$\geq$ -Indikator:* $p = [\lceil \geq \rceil, 2]$. Hier setzen wir $f_p := 1_{\geq} : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$.
4. *Projektionen:* Für $n := (p)_1 \in \mathbb{N}_0$ und $i := (p)_2 \in \mathbb{N}_0$ ist $1 \leq i \leq n$ und $p = [\lceil \pi \rceil, n, i]$. Hier setzen wir $f_p := \pi_{n,i} : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$.
5. *Komposition:* $(p)_0 = \lceil \circ \rceil$ und für $n := (p)_1 \in \mathbb{N}_0$ und $m := (p)_2 \in \mathbb{N}_0$ gelten $\text{length}(p) = 4 + m$, $(p)_3 \in \text{programs}$, $((p)_3)_1 = m$ und für alle $i \in \mathbb{N}_0$ mit $4 \leq i < 4 + m$ gelten $(p)_i \in \text{programs}$ und $((p)_i)_1 = n$. In diesem Fall setzen wir⁴⁴ $f_p := f_{(p)_3} \circ (f_{(p)_{3+1}}, \dots, f_{(p)_{3+m}}) : \mathbb{N}_0^n \dashrightarrow \mathbb{N}_0$.
6. *μ -Operator:* $p = [\lceil \mu \rceil, n, (p)_2]$ mit $n := (p)_1$, $(p)_2 \in \text{programs}$ und $2 \leq (p)_1 + 1 = ((p)_2)_1$. In diesem Fall definieren wir $f_p = \mu f_{(p)_2} : \mathbb{N}_0^n \dashrightarrow \mathbb{N}_0$ durch

$$f_p(x) := \begin{cases} m & \text{falls} \\ & (x, m) \in \text{domain}(f_{(p)_2}) \wedge f_{(p)_2}(x, m) = 0 \wedge \\ & \forall k \in \mathbb{N}_0, k < m : (x, k) \in \text{domain}(f_{(p)_2}) \wedge f_{(p)_2}(x, k) \neq 0, \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases} \quad (169)$$

Im Fall $p \notin \text{programs}$ ist $f_p : \mathbb{N}_0 \dashrightarrow \mathbb{N}_0$ die leere (überall undefinierte) Funktion.

Weil im Fall des μ -Operators keine Bedingung steht, die die Existenz einer kleinsten Nullstelle garantiert, codiert *nicht* jeder Code $p \in \text{programs}$ eine rekursive Funktion, sondern nur eine partiell rekursive Funktion.

Doch umgekehrt gibt es zu jeder rekursiven Funktion $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ (mindestens) einen Code $p \in \text{programs}$, der sie codiert: $f = f_p$.

Satz 7.34 (Universelle partiell rekursive Funktion)

1. Die Funktion $U : \mathbb{N}_0^2 \dashrightarrow \mathbb{N}_0$ mit $U(p, x) := f_p((x)_0, \dots, (x)_{n-1}) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\text{undefiniert}\}$ falls $p \in \text{programs}$ mit Stelligkeit $n := (p)_1$ und $x \in \text{Tupelcodes}$ mit $\text{length}(x) = n$, und $U(p, x)$ undefiniert sonst, ist partiell rekursiv.
2. Für jede partiell rekursive Funktion $f : \mathbb{N}_0^n \dashrightarrow \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, gibt es ein $p \in \text{programs}$, so dass gilt:

$$\forall x \in \mathbb{N}_0^n : x \in \text{domain}(f) \Leftrightarrow (p, [x]) \in \text{domain}(U), \quad (170)$$

$$\forall x \in \text{domain}(f) : f(x) = U(p, [x]). \quad (171)$$

⁴⁴Weil die Argumentfunktionen nur partiell definiert sein brauchen, wird auch die Komposition i.a. nur partiell definiert.

Man kann sich U als einen “universellen Interpreter” für partiell rekursive Funktionen vorstellen, wobei das erste Argument den Programmcode und das zweite Argument das Tupel der Argumente der zu berechnenden Funktion bedeutet.

Beweis: Zu 1.: Wir verwenden wieder die Technik der Berechnungsprotokolle. Wir definieren die rekursive Relation $UPiece \subseteq \mathbb{N}_0$ rekursiv so: Für $u \in \mathbb{N}_0$ gelte $u \in UPiece$ genau dann, wenn $u \in \text{Tupelcodes}$ und für alle $i \in \mathbb{N}_0$, $i < \text{length}(u)$ gilt: $(u)_i \in \text{Tupelcodes}$, $\text{length}((u)_i) = 3$ und für $p := ((u)_i)_0$ (“der Funktionscode”), $n := (p)_1$ (“seine Stelligkeit”), $x := ((u)_i)_1$ (“ein Argumenttupel”) und $y := ((u)_i)_2$ (“den Funktionswert”) gilt $p \in \text{programs}$, $x \in \text{Tupelcodes}$, $\text{length}(x) = n$ sowie einer der folgenden Fälle:

1. *Addition:* $p = [\![+]\!], 2]$ und $(x)_0 + (x)_1 = y$.
2. *Multiplikation:* $p = [\![\cdot]\!], 2]$ und $(x)_0 \cdot (x)_1 = y$.
3. *$\geq$ -Indikator:* $p = [\![\geq]\!], 2]$ und $1_{\geq}((x)_0, (x)_1) = y$.
4. *Projektionen:* $(p)_0 = [\![\pi]\!]$ und für $j := (p)_2 \in \mathbb{N}_0$ ist $(x)_j = y$.
5. *Komposition:* $(p)_0 = [\![\circ]\!]$ und für $m := (p)_2$ gilt: Es gibt $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j < i$ mit $(p)_3 = ((u)_j)_0$, $((u)_j)_1 = m$, $((u)_j)_2 = y$ (“ m -stelliger passender Code und Output y des referenzierten Tupels”), und für $z := ((u)_j)_1$ gilt $z \in \text{Tupelcodes}$ und $\text{length}(z) = m$ und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < m$ gibt es ein $l \in \mathbb{N}_0$ mit $l < i$ mit $(p)_{4+k} = ((u)_l)_0$, $((u)_l)_1 = n$ (“Stelligkeit n und passender Code $(p)_{4+k}$ der k -ten Argumentfunktion”), $((u)_l)_1 = x$ (“Argument x der k -ten Argumentfunktion”) und $((u)_l)_2 = (z)_k$ (“Output $(z)_k$ der k -ten Argumentfunktionen”).
6. *μ -Operator:* $(p)_0 = [\![\mu]\!]$ und es gibt $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j < i$ mit $((u)_j)_0 = (p)_2$ (“passender Programmcode des referenzierten Tupels”), $((u)_j)_1|_n = x$ und $((u)_j)_1|_n = y$ und $((u)_j)_2 = 0$ (“referenziertes Wertetupel hat Argument (x, y) und Wert 0”) und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < y$ existiert $l \in \mathbb{N}_0$ mit $l < i$ mit $((u)_l)_0 = (p)_2$ (“passender Programmcode des referenzierten Tupels”), $((u)_l)_1|_n = x$ und $((u)_l)_1|_n = k$ und $((u)_l)_2 \neq 0$ (“referenziertes Wertetupel hat Argument (x, k) und einen Wert $\neq 0$ ”).

Dann gilt für alle $p, x, y \in \mathbb{N}_0$ die folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned} & p \in \text{programs} \wedge (p, x) \in \text{domain}(U) \wedge U(p, x) = y \\ \Leftrightarrow & \exists u \in UPiece \exists i \in \mathbb{N}_0, i < \text{length}(u) : (u)_i = [p, x, y]. \end{aligned} \quad (172)$$

Insbesondere ist U partiell rekursiv.

Zu 2.: Die Funktion f ist als ihr Graph aufgefasst rekursiv aufzählbar, so dass wir eine rekursive Funktion $f_q : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \{0, 1\}$, $q \in \text{programs}$ finden, so dass gilt:

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0 : \exists m \in \mathbb{N}_0 : f_q(x, y, m) = 0\}. \quad (173)$$

Es gilt dann $f = \mu\mu f_q$, weil für jedes $x \in \mathbb{N}_0^n$ die Zahl $f(x)$ das einzige (und damit kleinste) $y \in \mathbb{N}_0$ mit $\exists m \in \mathbb{N}_0 : f_q(x, y, m) = 0$ ist. Es ist also $f = f_p$ mit $p := [\![\mu]\!], n, [\![\mu]\!], n + 1, q]\!]$ $\in \text{programs}$.

□

Korollar 7.35 (Unentscheidbarkeit des Halteproblems)

1. Die Menge $\text{domain}(U) = \{(p, [x]) \in \text{programs} \times \mathbb{N}_0 : x \in \text{domain}(f_p)\}$ ist nicht rekursiv.
2. Die Menge $\text{Rek} := \{p \in \text{programs} : \text{domain}(f_p) = \mathbb{N}_0^{(p)1}\}$ ist nicht rekursiv.

Interpretation: Es gibt also kein algorithmisches Entscheidungsverfahren, das prüft, ob ein beliebiges Programm p bei Eingabe eines beliebigen Arguments x anhält oder nicht. Ebenso wenig gibt es kein algorithmisches Entscheidungsverfahren, das prüft, ob ein beliebiger Programmcode p bei allen Argumenten x stoppt, also eine rekursive Funktion f_p codiert.

Beweis: Wir verwenden wieder ein Diagonalargument:

1. Angenommen, $\text{domain}(U)$ ist doch rekursiv. Dann ist auch

$$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad f(p) = \begin{cases} U(p, [p]) + 1 & \text{falls } (p, [p]) \in \text{domain}(U) \\ 0 & \text{falls } (p, [p]) \notin \text{domain}(U) \end{cases} \quad (174)$$

ebenfalls rekursiv, da partiell rekursiv und total definiert. Es ist also $f = f_q : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ für ein $q \in \text{programs}$. Es folgt $q \in \text{domain}(f_q)$, also $(q, [q]) \in \text{domain}(U)$ und daher

$$f(q) = U(q, [q]) + 1 = f_q(q) + 1 = f(q) + 1, \quad (175)$$

ein Widerspruch.

2. Der Beweis ist fast identisch mit dem von oben: Angenommen, die Menge Rek ist doch rekursiv. Dann ist auch

$$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad f(p) = \begin{cases} U(p, [p]) + 1 & \text{falls } p \in \text{Rek} \\ 0 & \text{falls } p \notin \text{Rek} \end{cases} \quad (176)$$

ebenfalls rekursiv, da partiell rekursiv und total definiert. Es ist also $f = f_q : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ für ein $q \in \text{programs}$. Es folgt $q \in \text{domain}(f_q)$, also $(q, [q]) \in \text{domain}(U)$ und daher der Widerspruch

$$f(q) = U(q, [q]) + 1 = f_q(q) + 1 = f(q) + 1. \quad (177)$$

□

7.6 Ausblick: Der 2. Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Zum Abschluss wird eine Beweisskizze des 2. Gödelschen Unvollständigkeitssatzes umrissen, ohne alle Details auszuführen:

Es sei $\mathcal{A}$ ein rekursiv aufzählbares Axiomensystem, das die Peanoarithmetik umfasst.

Wir setzen

$$D := \{p \in \mathbb{N}_0 : p \in \text{programs}, (p)_1 = 1, (p, [p]) \in \text{domain}(U)\}. \quad (178)$$

Anschaulich gesprochen besteht D aus allen Programmcodes p mit einstelliger Eingabe, für die das Programm p bei der Eingabe p stoppt. Weil U rekursiv aufzählbar ist, ist auch D rekursiv aufzählbar. Insbesondere gibt es eine darstellende arithmetische Formel Δ mit genau den freien Variablen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{u}$, so dass gilt:

$$D = \{p \in \mathbb{N}_0 : \mathcal{N} \models \exists \mathbf{u} : \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{N}^p\mathbf{0}]\} \quad (179)$$

sowie

$$\forall p, q \in \mathbb{N}_0 : [\mathcal{N} \models \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{N}^p\mathbf{0}, \mathbf{u}/\mathbf{N}^q\mathbf{0}] \Leftrightarrow [\text{PA} \vdash \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{N}^p\mathbf{0}, \mathbf{u}/\mathbf{N}^q\mathbf{0}]]. \quad (180)$$

Man stelle sich hierbei $\mathbf{u}$ als Berechnungsprotokoll zu $(p, [p]) \in \text{domain}(U)$ vor. Insbesondere folgt

$$\forall p \in \mathbb{N}_0 : [\mathcal{N} \models \exists \mathbf{u} : \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{N}^p\mathbf{0}]] \Rightarrow [\text{PA} \vdash \exists \mathbf{u} : \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{N}^p\mathbf{0}]]. \quad (181)$$

Betrachten wir nun die Menge

$$G := \{p \in \mathbb{N}_0 : \mathcal{A} \vdash \neg \exists \mathbf{u} : \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{N}^p\mathbf{0}]\}. \quad (182)$$

bei der die Gültigkeit in $\mathcal{N}$ durch die Herleitbarkeit in $\mathcal{A}$ ersetzt wurde. Auch sie ist rekursiv aufzählbar (anschaulich gesprochen, indem man alle möglichen Herleitungen H und Zeugen z für $\text{assumptions}(H) \subseteq \mathcal{A}$ aufzählt und damit

$$\mathcal{A} \vdash_H \neg \exists \mathbf{u} : \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{N}^p\mathbf{0}]$$

überprüft). Wir haben also einen einstelligen Programmcod $\gamma \in \text{programs}$, $(\gamma)_1 = 1$, für den gilt:⁴⁵

$$\{p \in \mathbb{N}_0 : (\gamma, [p]) \in \text{domain}(U)\} = \{p \in \mathbb{N}_0 : \mathcal{A} \vdash \neg \exists \mathbf{u} \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{N}^p\mathbf{0}]\} = G. \quad (183)$$

Kürzen wir nun ab: $\Gamma := \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{N}^\gamma\mathbf{0}]$ mit der einzigen freien Variablen $\mathbf{u}$.⁴⁶

⁴⁵Anschaulich gesprochen sucht das Programm γ bei Eingabe von p eine Herleitung in $\mathcal{A}$ von $\neg \exists \mathbf{u} \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{N}^p\mathbf{0}]$, und stoppt genau dann, wenn es eine solche findet. Es stoppt also bei Eingabe von p genau dann, wenn es eine Herleitung in $\mathcal{A}$ dafür findet, dass p ein einstelliges Programm ist, das bei Eingabe von p nicht stoppt.

⁴⁶ Γ bedeutet anschaulich gesprochen: “ $\mathbf{u}$ ist ein Berechnungsprotokoll, das bezeugt, dass es eine Herleitung in $\mathcal{A}$ dafür gibt, dass das Programm γ bei Eingabe von γ nicht stoppt.” Anders gesagt: “ $\mathbf{u}$ ist ein Berechnungsprotokoll, das $\mathcal{A} \vdash \neg \exists \mathbf{u} : \Gamma$ bezeugt.” Die Formel $\neg \exists \mathbf{u} : \Gamma$ bedeutet also $\mathcal{A} \not\vdash \neg \exists \mathbf{u} : \Gamma$ also eigene Nichtherleitbarkeit in $\mathcal{A}$.

Wir zeigen nun die Implikation

$$\mathcal{A} \vdash \neg \exists \mathbf{u} \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \vdash \perp. \quad (184)$$

Beweis dazu: Nehmen wir an:

$$\mathcal{A} \vdash \neg \exists \mathbf{u} \Gamma. \quad (185)$$

Dann folgt $\gamma \in G$ mit der Definition (182) von G , also $(\gamma, [\gamma]) \in \text{domain}(U)$ wegen Gleichung (183). Mit der Definition (178) folgt $\gamma \in D$. Mit der Darstellung (179) von D schließen wir

$$\mathcal{N} \models \exists \mathbf{u} \Gamma. \quad (186)$$

Nun haben wir die folgende Instanz der Implikation (181):

$$\mathcal{N} \models \exists \mathbf{u} \Gamma \quad \Rightarrow \quad \text{PA} \vdash \exists \mathbf{u} \Gamma. \quad (187)$$

Damit erhalten wir

$$\text{PA} \vdash \exists \mathbf{u} \Gamma. \quad (188)$$

Mit $\text{PA} \subseteq \mathcal{A}$ folgt

$$\mathcal{A} \vdash \exists \mathbf{u} \Gamma. \quad (189)$$

Zusammen mit Formel (185) folgt die Inkonsistenz von $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \vdash \perp. \quad (190)$$

Damit ist die Formel (184) gezeigt.

Eine wichtige Idee für den 2. Gödelschen Unvollständigkeitssatz ist es nun, dass sich die Implikation (184) auch in PA formalisieren lässt, also nach einem Sprachebenenwechsel auch in PA (genauer gesagt in einer definitorischen Erweiterung von PA) herleiten lässt:

$$\text{PA} \vdash (\text{“}\mathcal{A} \vdash \neg \exists \mathbf{u} \Gamma\text{”} \rightarrow \text{“}\mathcal{A} \vdash \perp\text{”}). \quad (184 \text{ formal})$$

Arbeiten wir also nun in PA . Nach diesem Sprachebenenwechsel schreiben wir natürlich $\exists \mathbf{u} \Gamma$ statt $\mathcal{N} \models \exists \mathbf{u} \Gamma$, weil das “Universum” nur mehr aus (Modell-)natürlichen Zahlen besteht. In der neuen Sprachebene muss man nun die Formel (187) zu zeigen, nun geschrieben als

$$(\exists \mathbf{u} \Gamma) \Rightarrow \text{PA} \vdash \text{“}\exists \mathbf{u} \Gamma\text{”}. \quad (187 \text{ formal})$$

Hierzu zeigt man die folgende Instanz der Darstellbarkeit *in der neuen Sprachebene*:

$$\forall \mathbf{u} : (\Gamma \Rightarrow \text{PA} \vdash \text{“}\Gamma[\mathbf{u}/\mathbf{N}^u \mathbf{0}]\text{”}). \quad (191)$$

Der Beweis von (184 formal) in der neuen Sprachebene ist nun der Gleiche wie der obige Beweis in der Metaebene, wobei die Implikation (187) durch (187 formal) ersetzt wird.

Arbeiten wir nun wieder in der Metaebene. Weil die Prämisse “ $\mathcal{A} \vdash \neg \exists \mathbf{u} \Gamma$ ” in (184 formal) das Gleiche wie $\exists \mathbf{u} \Gamma$ ist, können wir (184 formal) auch in der Form

$$\text{PA} \vdash ((\exists \mathbf{u} \Gamma) \rightarrow “\mathcal{A} \vdash \perp”)$$
 (192)

schreiben. Mit $\text{PA} \subseteq \mathcal{A}$ schließen wir:

$$\mathcal{A} \vdash ((\exists \mathbf{u} \Gamma) \rightarrow “\mathcal{A} \vdash \perp”).$$
 (193)

Mit Kontraposition schreiben wir das als

$$\mathcal{A} \vdash (“\mathcal{A} \not\vdash \perp” \rightarrow \neg \exists \mathbf{u} \Gamma)$$
 (194)

Falls $\mathcal{A}$ nun die eigene Widerspruchsfreiheit herleitet, falls also $\mathcal{A} \vdash “\mathcal{A} \not\vdash \perp”$ gilt, so schließen wir

$$\mathcal{A} \vdash \neg \exists \mathbf{u} \Gamma$$
 (195)

und hieraus mit der Implikation (184):

$$\mathcal{A} \vdash \perp.$$
 (196)

Das bedeutet:

Satz 7.36 (2. Gödelscher Unvollständigkeitssatz) *Es sei $\mathcal{A}$ ein konsistentes rekursiv aufzählbares Axiomensystem in der Sprache der Arithmetik, das die Peanoarithmetik umfasst. Dann ist die Konsistenz von $\mathcal{A}$ nicht in $\mathcal{A}$ herleitbar. Anders gesagt:*

$$\mathcal{A} \vdash “\mathcal{A} \not\vdash \perp” \Rightarrow \mathcal{A} \vdash \perp$$
 (197)

Analoge Varianten des Satzes gelten auch für rekursiv aufzählbare Axiomensysteme über Erweiterungen der Sprache der Arithmetik, innerhalb derer sich die Peanoarithmetik “simulieren” lässt, z.B. ZF. Wir verzichten auf die genaue Formulierung dieser Erweiterungen.

Der 2. Unvollständigkeitssatz erklärt auch, warum wir kein Standardmodell von ZF innerhalb der Metasprache ZF angeben konnten; andernfalls könnten wir nämlich die Konsistenz von ZF in ZF zeigen.

Er erklärt auch, warum es uns nicht gelang, die Gültigkeitsrelation in ZF innerhalb von ZF selbst zu definieren. Hätten wir nämlich einen Korrektheitssatz für solch eine Relation in ZF, so folgte daraus ebenfalls ein Beweis in ZF der Widerspruchsfreiheit von ZF.

Historischer Intergrund: Das Hilbertsche Programm. Nachdem Ende des 19. Jahrhunderts und Anfang des 20. Jahrhunderts Widersprüche in Cantors Mengenlehre aufgetaucht waren, stellte David Hilbert in den 1920er Jahren das Programm auf, die Widerspruchsfreiheit von mathematischen Axiomensystemen mit finiten Methoden zu zeigen. Der 2. Gödelsche Unvollständigkeitssatz zeigt allerdings Grenzen des Hilbertschen Programms auf: Bei jeder genügend komplexen Theorie braucht es zum Beweis ihrer Widerspruchsfreiheit Methoden, die außerhalb der Theorie liegen.

Es ist eine interessante Frage, welche Axiome zu PA hinzugenommen ausreichen, um die Widerspruchsfreiheit von PA zu zeigen. Gentzen zeigte, dass transfinite Induktion bis ϵ_0 dafür genügt. Dabei ist ϵ_0 die kleinste Ordinalzahl, die grösser als alle ω_n , $n \in \omega$, ist, rekursiv definiert durch $\omega_0 = \omega$ und $\omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$. Offensichtlich kann die Konsistenz von PA auch in ZF bewiesen werden, da ω mit den arithmetischen Operationen ein Modell von PA in ZF liefert. Insbesondere kann man daher mit ZF mehr arithmetische Formeln als mit PA beweisen.

Weitere Anwendungen in der Mengenlehre

- *ZF ist nicht endlich axiomatisierbar:* Für jede (meta-)endliche Liste $\mathcal{A}$ von ZF-Axiomen kann man die Konsistenz von $\mathcal{A}$ in ZF beweisen; das folgt aus dem “Reflexionsprinzip”, das für jede Formel ϕ in der Sprache der Mengenlehre mit freien Variablen $x = (x_1, \dots, x_n)$ besagt, dass

$$\exists \alpha \in \text{On} \forall x_1, \dots, x_n \in V_\alpha : \phi \Leftrightarrow \phi^{V_\alpha}$$

gilt, wobei ϕ^{V_α} die Relativierung von ϕ auf V_α bezeichnet. Für jede (meta-)endliche Liste $\phi_1, \dots, \phi_n$ von in ZF herleitbaren Formeln ist also $(V_\alpha, \in \cap (V_\alpha \times V_\alpha))$ mit geeignetem $\alpha \in \text{On}$ ein Modell von $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n$. Insbesondere folgt in ZF die Konsistenz von $\mathcal{A} = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$. Ist nun ZF konsistent, so kann nicht jedes ZF-Axiom aus $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ hergeleitet werden, denn sonst hätte man einen Beweis der Konsistenz von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$. Insbesondere ist ZF nicht äquivalent zu (meta-)endlich vielen ZF-Axiomen, es sei denn, es ist inkonsistent. Man beachte, dass dies keinen Widerspruch zum Kompaktheitssatz liefert, weil die Allquantifizierung über endliche Teilmengen von ZF-Axiomen in der Metasprache erfolgt, während sie für einen ZF-Konsistenzbeweis von ZF in ZF selbst erfolgen müsste. Analoge Aussagen gelten auch für ZFC.

- *Stark unerreichbare Kardinalzahlen, in ZFC:* Eine Kardinalzahl $\kappa > \omega$ heißt *stark unerreichbar*, wenn für alle $\alpha < \kappa$ gilt: $|\mathfrak{P}(\alpha)| < \kappa$ und für jedes $\alpha < \kappa$ und jedes $f : \alpha \rightarrow \kappa$ ein $\beta < \kappa$ mit $f[\alpha] \subseteq \beta$ existiert. Für stark unerreichbare Kardinalzahlen kann man in ZFC zeigen, dass $(V_\kappa, \in \cap (V_\kappa \times V_\kappa))$ ein Modell von ZFC ist. Daraus folgt, dass man in ZFC nicht die Existenz stark unerreichbarer Kardinalzahlen herleiten kann, es sei denn, ZFC ist inkonsistent. ZFC+“Es existiert eine stark unerreichbare Kardinalzahl” ist also echt stärker als ZFC, denn man kann die Konsistenz von ZFC darin herleiten, es sei denn, ZFC ist inkonsistent. In diesem Fall kann man also

in $\text{ZFC} + \text{“Es existiert eine stark unerreichbare Kardinalzahl”}$ mehr arithmetische Formeln als in ZFC beweisen.