LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematatisches Institut
Wintersemester 2017/18

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 9 – Tutorien

T9.1 **Randverteilungen und Randdichten.** Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ-endliche Maßräume, $\pi_i : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_i$, $\pi_i(\omega_1, \omega_2) = \omega_i$ für $i = 1, 2$ die beiden kanonischen Projektionen und ν ein Maß auf $(\Omega_1 \times \Omega_1, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. Für $i = 1, 2$ heißt das Bildmaß $\pi_i[\nu]$ die i-te *Randverteilung*[1] (engl.: *marginal*) von ν. Zeigen Sie: Besitzt ν eine Dichte $f = d\nu/d(\mu_1 \otimes \mu_2)$ $\mu_1 \otimes \mu_2$-fast überall, so besitzt die Randverteilung $\pi_1[\nu]$ die Dichte

$$f_1 = \frac{d\pi_1[\nu]}{d\mu_1}, \quad f_1(\omega_1) = \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, \mu_2(d\omega_2) \quad \mu_1\text{-f.ü..}$$

Ebenso besitzt $\pi_2[\nu]$ die Dichte

$$f_2 = \frac{d\pi_2[\nu]}{d\mu_2}, \quad f_2(\omega_2) = \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\, \mu_1(d\omega_1) \quad \mu_2\text{-f.ü..}$$

f_1 und f_2 werden die beiden *Randdichten* (engl: *marginal density*) von ν bzgl. μ_1 und μ_2 genannt.

T9.2 **Randverteilungen von Produkten.** Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei Wahrscheinlichkeitsräume. Zeigen Sie: $\mu_1 \otimes \mu_2$ besitzt die beiden Randverteilungen μ_1 und μ_2.

T9.3 **Das Wallis-Produkt.** Erinnern Sie sich daran, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n} x\, dx = \frac{2\pi}{4^n} \binom{2n}{n}. \tag{1}$$

(Dies folgt durch Einsetzen von $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$, Ausmultiplizieren mit der binomischen Formel und der Fourier-Orthonormalitätsrelation.)

(a) Zeigen Sie mit der Laplace-Methode

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x\, dx \overset{\mathbb{N} \ni n \to \infty}{\longrightarrow} 2. \tag{2}$$

(b) Folgern Sie aus (1) und (2):

$$\frac{\sqrt{n\pi}}{4^n} \binom{2n}{n} \overset{\mathbb{N} \ni n \to \infty}{\longrightarrow} 1. \tag{3}$$

Schreiben Sie diese Formel in der folgenden Form um:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)^2}{(2m-1)(2m+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

Diese Formel für die Kreiszahl π heißt *Wallissches Produkt.* Zur numerischen Berechnung von π ist es praktisch ohne Nutzen, da es recht langsam konvergiert.

(c) Finden Sie einen alternativen Beweis der Asymptotik (3) und damit des Wallisschen Produkts mit Hilfe von

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

und der Stirlingformel.

T9.4 (a) **Untermannigfaltigkeiten sind Lebesgue-Nullmengen.** Es sei M eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, wobei $m < n$. Zeigen Sie $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda_n(M) = 0$.

(b) **Ränder von Parallelepipeden sind Lebesgue-Nullmengen.** Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix, also $\det A \neq 0$, wobei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten das Parallelepiped $B = \{Ax |\, x \in [0, 1]^n\}$ und dessen topologischen Rand $\partial B = \{Ax | x \in [0, 1]^n \setminus]0, 1[^n\}$. Beweisen Sie: $\lambda_n(\partial B) = 0$.

[1] Vorwiegend wird diese Sprechweise in der Stochastik verwendet, wenn ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 9 – Hausaufgaben

H9.1 **Randdichten einer Gleichverteilung.** Die Gleichverteilung auf dem Dreieck

$$\Delta := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \le a \le b \le 1\}$$

ist das Maß

$$\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}, \quad \nu(A) = \frac{\lambda_2(A \cap \Delta)}{\lambda_2(\Delta)}.$$

Berechnen Sie die beiden Randdichten von ν bezüglich des Lebesguemaßes.

H9.2 **Produktdichten.** Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ-endliche Maßräume und ρ_1 bzw. ρ_2 σ-endliche Maße auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ bzw. $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ mit $\mu_1 \ll \rho_1$ und $\mu_2 \ll \rho_2$. Zeigen Sie:

$$\frac{d(\mu_1 \otimes \mu_2)}{d(\rho_1 \otimes \rho_2)}(\omega_1, \omega_2) = \frac{d\mu_1}{d\rho_1}(\omega_1)\frac{d\mu_2}{d\rho_2}(\omega_2)$$

für $\rho_1 \otimes \rho_2$-fast alle $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$.

H9.3 **Modifizierte Besselfunktionen.** Für $n \in \mathbb{N}_0$ werden die *modifizierten Besselfunktionen* $I_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und $K_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ durch

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x \cos t} \cos(nt)\, dt,$$
$$K_n(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x \cosh t} \cosh(nt)\, dt$$

definiert. Zeigen Sie:

(a) Sowohl I_n als auch K_n erfüllt die modifizierte Besselsche Differentialgleichung, die durch

$$x^2 y''(x) + x y'(x) - (x^2 + n^2) y(x) = 0$$

gegeben wird. Achten Sie bei der Begündung sorgfältig auf die Rechtfertigung der Vertauschung von Integral und Ableitung.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die folgende Asymptotik:

$$\sqrt{2\pi x} e^{-x} I_n(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$
$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}} e^{x} K_n(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

H9.4 **Beispiel zu einer multidimensionalen Variante der Laplace-Methode.** Beweisen Sie für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$n^{m/2} \int\limits_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^m} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \cos x_k \right)^n \lambda_m(dx) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (2\pi m)^{m/2}.$$

Hinweis: Übertragen Sie die Idee hinter der Laplace-Methode auf den vorliegenden multidimensionalen Fall.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 19.12.2017, Abend.