LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 8 – Tutorien

T8.1 **Vertauschung der Integrationsreihenfolge bei nichtnegativen messbaren Integranden.** Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ-endliche Maßräume. Weiter sei $\tau : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_2 \times \Omega_1$, $\tau(\omega_1, \omega_2) = (\omega_2, \omega_1)$ die Vertauschungsabbildung. Zeigen Sie:

(a) τ ist $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$–$\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_1$–meßbar.

(b) $\tau[\mu_1 \otimes \mu_2] = \mu_2 \otimes \mu_1$.

(c) Folgern Sie mit dem Satz von Fubini: Für alle $f \in \overline{M}_+(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ gilt:

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, \mu_2(d\omega_2)\, \mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\, \mu_1(d\omega_1)\, \mu_2(d\omega_2).$$

T8.2 **Problematik von Produktmaßen im nicht σ-endlichen Fall.** Es sei λ das Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und μ das Zählmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

(a) Zeigen Sie für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{A\times B}(x, y)\, \lambda(dx)\, \mu(dy) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{A\times B}(x, y)\, \mu(dy)\, \lambda(dx)$$

(b) Zeigen Sie, dass für die Diagonale $\Delta = \{(x, x) |\ x \in \mathbb{R}\}$ gilt: $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R})$ und

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{\Delta}(x, y)\, \lambda(dx)\, \mu(dy) \neq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{\Delta}(x, y)\, \mu(dy)\, \lambda(dx).$$

T8.3 **Produkt-σ-Algebra wird von den Projektionen erzeugt.**
Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist, bezüglich der die beiden kanonischen Projektionen

$$X_i : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_i, \quad X_i(\omega_1, \omega_2) = \omega_i \quad (i = 1, 2)$$

$\mathcal{A}$–$\mathcal{A}_i$ meßbar sind.

(b) Zeigen Sie, dass für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$.

T8.4 **Das Cavalierische Prinzip.** Überzeugen Sie sich vom folgenden *Cavalierischen Prinzip*:
Gegeben seien $m, n \in \mathbb{N}$. Sind $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ mit

$$\lambda_m(\{y \in \mathbb{R}^m |\ (x, y) \in A\}) = \lambda_m(\{y \in \mathbb{R}^m |\ (x, y) \in B\}),$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so folgt $\lambda_{n+m}(A) = \lambda_{n+m}(B)$.
Insbesondere gilt folgender Spezialfall:
Es seien $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ zwei messbare Bereiche im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$. Es gelte für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_2(\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 |\ (x, y, z) \in A\}) = \lambda_2(\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 |\ (x, y, z) \in B\}),$$

d.h. Schnitte von A und von B mit den parallelen Ebenen zur y–z–Ebene besitzen die gleiche Fläche. Dann besitzen A und B das gleiche Volumen:

$$\lambda_3(A) = \lambda_3(B).$$

Zeigen Sie mit diesem Prinzip, dass die Einheitskugel

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

und das Differenzgebilde "Zylinder minus Doppelkegel"

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 \leq y^2 + z^2 \leq 1\}$$

das gleiche Volumen besitzen.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 8 – Hausaufgaben

H8.1 **Normierung der multidimensionalen Standardnormalverteilung.** Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\|x\|_2^2} \, \lambda_n(dx) = 1$$

H8.2 **Volumen eines Simplex.**

(a) Gegeben sei für $n \in \mathbb{N}$ das n-dimensionale Simplex

$$\Delta_n := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} x_k \leq 1 \right\}.$$

Beweisen Sie, dass es das Volumen

$$\lambda_n(\Delta_n) = \frac{1}{n!}$$

besitzt.

(b) Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$ das Volumen

$$V_n(t) := \lambda_n(\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n |\; 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < t\}).$$

H8.3 **Vertauschbarkeit und Nichtvertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge.** Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume.

(a) Es sei

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2). \tag{1}$$

Zeigen Sie:

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \, \mu_2(d\omega_2) \, \mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \, \mu_1(d\omega_1) \, \mu_2(d\omega_2).$$

(b) Nun sei

$$f \in M(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$$

mit

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |f(\omega_1, \omega_2)| \, \mu_2(d\omega_2) \, \mu_1(d\omega_1) < \infty.$$

Überlegen Sie sich, dass in diesem Fall die Integrierbarkeitsvoraussetzung (1) gilt.

(c) Nun sei

$$(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) = (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2) = (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \lambda_1|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)})$$

und

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 1_{\{x<y<x+1\}} - 1_{\{x-1<y<x\}}.$$

Überzeugen Sie sich davon, dass

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} f \, d\mu_1 \otimes \mu_2$$

undefiniert ist. Zeigen Sie insbesondere

$$f \notin \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2).$$

Zeigen Sie auch

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} f(x, y) \, dy \, dx \neq \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} f(x, y) \, dx \, dy,$$

indem Sie beide Integrale berechnen.

H8.4 **Graphen stetiger Funktionen sind Lebesgue-Nullmengen.** Es sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, wobei $m, n \in \mathbb{N}$, und $G_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n |\; x \in \mathbb{R}^m\}$ ihr Graph. Zeigen Sie:

(a) G_f ist eine Borelmenge.

(b) $\lambda_{n+m}(G_f) = 0$.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 12.12.2017, Abend.