Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 7 – Tutorien

T7.1 **Likelihoodquotienten im Diskreten.** Es sei Ω abzählbar. Weiter seien ν und $\tilde{\nu}$ zwei Maße auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ mit Zähldichten $p : \Omega \to \mathbb{R}^+$ bzw. $\tilde{p} : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$. Zeigen Sie:

$$d\tilde{\nu} = \frac{\tilde{p}}{p}\, d\nu.$$

T7.2 **Bedingte Erwartung bei binärer Beobachtung.** Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A) < 1$. Weiter sei $f \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie, dass

$$g := \frac{\int_A f\, d\mu}{\mu(A)} 1_A + \frac{\int_{A^c} f\, d\mu}{\mu(A^c)} 1_{A^c}$$

eine bedingte Erwartung von f gegeben $\sigma(\{A\})$ ist.

T7.3 Zur Bearbeitung dieser Aufgabe ist die Leseaufgabe H7.5 nützlich.

(a) **Die Menge der signierten Maße als normierter Raum.** Es sei $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ die Menge der signierten Maße über einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ ist, der durch die Menge $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$ der endlichen Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ aufgespannt wird, und dass durch

$$\|\cdot\| : \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}, \quad \|\mu\| := \mu_+(\Omega) + \mu_-(\Omega)$$

eine Norm auf $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ gegeben ist.

(b) **Das Integral als stetige Bilinearform.** Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ der Raum der signierten Maße darüber, versehen mit der Norm aus der vorhergehenden Teilaufgabe, und $M_b(\Omega, \mathcal{A})$ der Raum der beschränkten messbaren reellwertigen Funktionen darüber, versehen mit der Norm $\|f\|_{\sup} := \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$. Zeigen Sie, dass die Integralabbildung

$$I : M_b(\Omega, \mathcal{A}) \times \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}, \quad I(f, \mu) = \int f\, d\mu$$

bilinear und bezüglich der zugehörigen Produktmetrik stetig ist. Zeigen Sie hierzu für $f \in M_b(\Omega, \mathcal{A})$ und $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$:

$$\left| \int f\, d\mu \right| \leq \|f\|_{\sup} \|\mu\|.$$

T7.4 **Vererbung der σ-Endlichkeit auf Summen.** Es seien μ und ν zwei σ-endliche Maße auf einem gemeinsamen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie, dass dann auch $\mu + \nu$ ein σ-endliches Maß ist.

T7.5 **Momente der Standardnormalverteilung.**

(a) Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{(ik)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-x^2/2}\, dx = e^{-k^2/2},$$

indem Sie zeigen, dass sich hier Reihe und Integral vertauschen lassen. Die Formel $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$ dürfen Sie dabei als gegeben annehmen.

(b) Folgern Sie für alle $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2m} e^{-x^2/2}\, dx = \frac{(2m)!}{2^m m!},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2m+1} e^{-x^2/2}\, dx = 0.$$

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 7 – Hausaufgaben

H7.1 **ϵ-δ-Charakterisierung der Absolutstetigkeit.** Es seien μ, ν zwei endliche Maße auf dem gleichen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(a) $\nu \ll \mu$,

(b) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall A \in \mathcal{A}:\ [\mu(A) < \delta\ \Rightarrow\ \nu(A) < \epsilon]$.

Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel auch, dass die Äquivalenz falsch werden kann, wenn zwar μ endlich ist, ν hingegen nur σ-endlich.

H7.2 **Beispiel einer divergenten asymptotischen Reihe.** Es sei

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad f(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-\alpha x^4}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k x^{4k} e^{-x^2}\, dx.$$

Zeigen Sie:

(a) f ist auf $\mathbb{R}^+$ glatt.

(b) Für alle $\alpha > 0$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k x^{4k} e^{-x^2} \right| dx = \infty$$

(c) Für alle $\alpha > 0$ divergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k \int_{\mathbb{R}} x^{4k} e^{-x^2}\, dx$$

über $\mathbb{R}$.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k \int_{\mathbb{R}} x^{4k} e^{-x^2}\, dx - f(\alpha) = O(\alpha^{n+1}) \qquad \text{für } \alpha \downarrow 0.$$

H7.3 **Likelihoodquotienten allgemein.** Es seien μ, ν, κ drei Maße auf dem gleichen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ und $f, g \in M_+(\Omega, \mathcal{A})$ mit $g > 0$. Es gelte $d\nu = f\, d\mu$ und $d\kappa = g\, d\mu$. Zeigen Sie

$$d\nu = \frac{f}{g}\, d\kappa.$$

Man kann das (im σ-endlichen Fall) auch in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{d\nu}{d\kappa} = \frac{d\nu/d\mu}{d\kappa/d\mu} \ \mu\text{-f.ü.}$$

H7.4 **Zerlegung eines Maßes in einen Punktanteil und einen kontinuierlichen Teil.** Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßaum mit $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ für alle $\omega \in \Omega$. Es sei

$$A = \{\omega \in \Omega |\ \mu(\{\omega\}) > 0\}.$$

Zeigen Sie:

(a) A ist abzählbar, $A \in \mathcal{A}$.

(b) Setzen wir $d\mu_p = 1_A\, d\mu$ und $d\mu_c = 1_{A^c}\, d\mu$, so gilt $\mu = \mu_p + \mu_c$ und $\mu_c(\{\omega\}) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$ sowie $\mu_p = \sum_{\omega \in A} \mu(\{\omega\})\delta_\omega$, zu lesen als

$$\forall B \in \mathcal{A}:\ \mu_p(B) = \sum_{\omega \in A} \mu(\{\omega\})\delta_\omega(B).$$

Wir nennen μ_p den Punktanteil von μ und μ_c den kontinuierlichen Anteil von μ.

H7.5 **Leseaufgabe.** Lesen und verstehen Sie den Abschnitt zur Zerlegung von Maßen im Skript, insbesondere die Zerlegung eines Maßes in einen absolutstetigen und einen singulären Teil und die Hahn-Zerlegung.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 05.12.2017, Abend.