LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 6 – Tutorien

T6.1 **Ein Beispiel zur Vertauschung von Integral und Ableitung.** Zeigen Sie für $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^4+tx^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^4+tx^2}\, dx.$$

T6.2$^\epsilon$ **Permutationsinvarianz des Lebesguemaßes.** Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine Permutation, also eine Bijektion. Weiter sei $f_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_\sigma((x_i)_{i=1,\ldots,n}) = (x_{\sigma(i)})_{i=1,\ldots,n}$. Zeigen Sie, dass f_σ Borel-meßbar ist und dass $f_\sigma[\lambda_n] = \lambda_n$ gilt.

T6.3$^\epsilon$ **Integralvariante der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag.** Es sei $f \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$ oder auch $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ messbar mit $\int |f|\, d\mu < \infty$. Zeigen Sie, dass dann $\int f\, d\mu$ existiert und dass gilt:

$$\left| \int f\, d\mu \right| \leq \int |f|\, d\mu.$$

T6.4$^\epsilon$ **Lebesgue-Stieltjes-Integrale mit einer Sprungfunktion im Integrator.** Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, d1_{[a,\infty[}(x)$$

für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

T6.5 **Gaußsches Integral im Komplexen.**
Es gilt für $a, b \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} a > 0$:

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+bx}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \exp \frac{b^2}{4a},} \tag{1}$$

wobei $\sqrt{a}$ den Hauptwert der Quadratwurzel bezeichnet, also diejenige komplexe Zahl $w = \sqrt{a}$ mit $\operatorname{Re} w > 0$ und $w^2 = a$. In dieser Aufgabe dürfen Sie die erst später bewiesene Formel

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}}$$

voraussetzen.

(a) Zeigen Sie die Formel (1) zuerst im Spezialfall $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Verwenden Sie dazu eine quadratische Ergänzung, Translation und Skalierung.

(b) Zeigen Sie die Formel (1) dann im Spezialfall $b = 0$. Beweisen Sie hierzu, dass für die Funktion

$$f : \{a \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} a > 0\} \to \mathbb{C}, \quad f(a) = \sqrt{a} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\, dx$$

gilt: $df = 0$. Begründen und verwenden Sie hierbei

$$d\sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\, da,$$

(zu lesen als $d\sqrt{\cdot}_a(z) = z/(2\sqrt{a})$ für $a, z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} a > 0$), zum Beispiel mit Hilfe des Satzes von den impliziten Funktionen, angewandt auf die Gleichung $w^2 = a$ für $w = \sqrt{a}$. Vertauschen Sie Integral und Ableitung mit Hilfe des Satzes von Lebesgue und integrieren Sie geeignet partiell.

(c) Zeigen Sie schließlich die Formel (1) allgemein, indem Sie

$$\frac{d}{dt} \left[\exp\left(-\frac{(bt)^2}{4a} \right) \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+btx}\, dx \right] = 0$$

für $t \in \mathbb{R}$ zeigen.

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 6 – Hausaufgaben

H6.1 **Es gibt keine Variante des Lemmas von Fatou für limsup.**

(a) Es sei $f_n = 1_{]0,1]} \geq 0$ für gerade $n \in \mathbb{N}$ und $f_n = 1_{]1,2]} \geq 0$ für ungerade $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\int_{]0,2]} \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\,dx > \limsup_{n\to\infty} \int_{]0,2]} f_n(x)\,dx.$$

(b) Nun sei $g_n = 1_{]n,n+1]} \geq 0$. Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}} \limsup_{n\to\infty} g_n(x)\,dx < \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx.$$

H6.2 **Transformation der Fouriertransformierten unter linearen Abbildungen.** Es sei μ ein endliches Maß über $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $n \in \mathbb{N}$. Die *Fouriertransformierte* $\hat{\mu}$ von μ wird durch

$$\hat{\mu} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad \hat{\mu}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k,x\rangle}\,\mu(dx)$$

definiert, wobei

$$\langle k, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} k_j x_j$$

das euklidische Skalarprodukt bezeichnet. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $L_A(x) = Ax$ die zugehörige lineare Abbildung. Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{R}^n$:

$$\widehat{L_A[\mu]}(k) = \hat{\mu}(A^t k)$$

H6.3 **Stetigkeit der Fouriertransformierten endlicher Maße.** Es sei μ ein endliches Maß über $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte

$$\hat{\mu} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad \hat{\mu}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k,x\rangle}\,\mu(dx)$$

eine stetige Funktion ist.
Hinweis: Zeigen Sie Folgenstetigkeit von $\hat{\mu}$ mit Hilfe des Satzes von der dominierten Konvergenz.

H6.4 **Die Wärmeleitungsgleichung mit $\mathcal{L}^1$-Anfangsdaten.** Es sei $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ und

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x,t) = (2\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|_2^2}{2t}} g(y)\,\lambda_n(dy).$$

Beweisen Sie, dass f zweimal stetig differenzierbar nach x und stetig differenzierbar nach t ist, und dass gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta f,$$

wobei sich der Laplaceoperator nur auf die x-Koordinaten bezieht.

Bitte wenden!

H6.5 **Die Jensensche Ungleichung.** Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in M(I, \mathcal{B}(I))$ eine konvexe Funktion, d.h.

$$\forall x, y \in I \; \forall t \in [0,1]: \; f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y). \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie für alle $x \in I$, dass die links- und rechtsseitige Ableitung

$$f_l'(x) := \lim_{y \uparrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$
$$f_r'(x) := \lim_{z \downarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

existieren und endlich sind, und dass für alle $y, z \in I$ mit $y < x < z$ gilt:

$$-\infty < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f_l'(x) \leq f_r'(x) \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} < \infty.$$

Folgern Sie für alle $t \in I$:

$$f(t) \geq f(x) + (t - x) f_l'(x). \tag{3}$$

(b) Nun sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(I, \mathcal{B}(I))$ mit $\int_I t \, \mu(dt) \in I$. Zeigen Sie die folgende "*Jensensche Ungleichung*":

$$f\left(\int_I t \, \mu(dt)\right) \leq \int_I f(t) \, \mu(dt) \tag{4}$$

Hinweis: Setzen Sie in der Ungleichung (3) den Erwartungswert $x = \int_I t \, \mu(dt)$ ein und integrieren Sie. Überlegen Sie sich, dass das Integral $\int_I f(t) \, \mu(dt)$ in der Tat exisitiert.

(c*) **Multidimensionale Variante:** Nun sei $n \in \mathbb{N}$ und $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ konvex (d.h. $\forall x, y \in I \; \forall t \in [0,1]: (1-t)x + ty \in I$), und $f \in M(I, \mathcal{B}(I))$ eine konvexe Funktion, d.h. es gelte wieder (2). Weiter sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(I, \mathcal{B}(I))$ mit $\int_I t \, \mu(dt) \in I^\circ$ (Inneres von I). Zeigen Sie die Jensensche Ungleichung (4) auch in diesem multidimensionalen Fall.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 28.11.2017, Abend.