Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 4 – Tutorien

T4.1 **Verträglichkeit der Urbildabbildung mit Mengenoperationen.** Es sei $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung, $A, B \subseteq \Omega'$ und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von Ω'. Zeigen Sie:

(a) $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$,
(b) $f^{-1}[\Omega'] = \Omega$,
(c) $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$,
(d) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$,
(e) Aus $A \cap B = \emptyset$ folgt $f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] = \emptyset$,
(f) $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$,
(g) $f^{-1}[\Omega' \setminus B] = \Omega \setminus f^{-1}[B]$,
(h) $f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[A_i]$,
(i) $f^{-1}\left[\bigcap_{i\in I} A_i\right] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}[A_i]$, falls $I \neq \emptyset$.

Im Gegensatz zur Urbildabbildung verträgt sich die Bildung des Bildes nicht so gut mit Mengenoperationen. Zeigen Sie jeweils an einem Gegenbeispiel, dass $f[C\cap D] \neq f[C]\cap f[D]$ und $f[C\setminus D] \neq f[C]\setminus f[D]$ möglich sind.

T4.2$^\epsilon$ **Messbarkeit der Identität.** Es sei Ω eine Menge und $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ zwei σ-Algebren darüber. Beweisen Sie, dass folgende zwei Aussagen äquivalent sind:

(a) $\mathrm{id} : \Omega \to \Omega$, $\mathrm{id}(\omega) = \omega$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar.
(b) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

T4.3$^\epsilon$ **Messbarkeit von Abbildungen in Teilräume.** Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume, $B \in \mathcal{A}'$, $\mathcal{B} = \{C \in \mathcal{A}' |\ C \subseteq B\}$ und $f : \Omega \to B$. Zeigen Sie, dass $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (B, \mathcal{B})$ genau dann messbar ist, wenn $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ messbar ist.

T4.4 **Messbarkeit monotoner Funktionen.** Es seien $\Omega, \Omega' \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $f : \Omega \to \Omega'$ eine monoton steigende Funktion. Beweisen Sie, dass $f : (\Omega, \mathcal{B}(\Omega)) \to (\Omega', \mathcal{B}(\Omega'))$ messbar ist.

T4.5 **Von einer Abbildung erzeugte σ-Algebra.** Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $X : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Wir definieren

$$\sigma(X) := \{X^{-1}[A'] |\ A' \in \mathcal{A}'\}.$$

Das Mengensystem $\sigma(X)$ wird die von X erzeugte σ-Algebra genannt.

(a) Zeigen Sie, dass $\sigma(X)$ in der Tat eine σ-Algebra ist.
(b$^\epsilon$) Zeigen Sie, dass $\sigma(X) \subseteq \mathcal{A}$ äquivalent zur $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-Messbarkeit von X ist.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 4 – Hausaufgaben

H4.1 **Alternative Darstellungen des äußeren Maßes.** Gegeben sei ein von unten σ-stetiger Inhalt μ auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$ über einer Menge Ω und das zugehörige äußere Maß $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$. Zeigen Sie:

$$\mu^*(A) =$$
$$\inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \,\middle|\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Folge in } \mathcal{A} \text{ mit } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supseteq A \right\} =$$
$$\inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \,\middle|\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Folge paarw. disjunkter Mengen in } \mathcal{A} \text{ mit } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supseteq A \right\}.$$

H4.2 **Messbarkeit stückweise definierter Abbildungen.** Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume, I eine abzählbare Indexmenge, $(\Omega_i)_{i\in I}$ eine Familie paarweise disjunkter messbarer Mengen $\Omega_i \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{i\in I} \Omega_i = \Omega$ und $\mathcal{A}_i := \{A \in \mathcal{A} | A \subseteq \Omega_i\}$. Zeigen Sie:

(a) Für $i \in I$ ist $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ ein messbarer Raum.

(b) Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ ist genau dann $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar, wenn jede Einschränkung $f|_{\Omega_i} : (\Omega_i, \mathcal{A}_i) \to (\Omega', \mathcal{A}')$, $i \in I$, messbar ist.

H4.3 **Messbarkeit der Kehrwertbildung.** Zeigen Sie, dass die Abbildung $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(x) = 1/x$ für $x \neq 0$, $k(0)$ beliebig, Borel-messbar ist.

H4.4 **Problematik der Längenmessung in $\mathbb{Q}$.** Es sei $\mathcal{A}$ die Mengenalgebra über $\mathbb{Q}$, die aus allen endlichen Vereinigungen der Gestalt $\bigcup_{i=1}^n (\mathbb{Q}\cap]a_i, b_i])$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und erweitert rationalen Zahlen $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_n < b_n$ in $\mathbb{Q} \cup \{+\infty, -\infty\}$ besteht. Dann wird durch

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n (\mathbb{Q}\cap]a_i, b_i]) \right) := \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

ein Inhalt μ auf $\mathcal{A}$ definiert; das brauchen Sie nicht zu zeigen, da es genau wie im reellen Fall bewiesen werden kann. Beweisen Sie, dass dieser Inhalt *nicht* σ-nullstetig ist.

H4.5* **Regularität der Lebesgue-Stieltjes-Maße.** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend und rechtsstetig und $\hat{\mu}_f : \hat{\mathcal{A}}_{\mu_f} \to [0, \infty]$ das zugehörige (vollständige) Lebesgue-Stieltjes-Maß. Zeigen Sie: Zu jedem $A \in \hat{\mathcal{A}}_{\mu_f}$ mit $A \subseteq \mathbb{R}$ und $\hat{\mu}_f(A) < \infty$ und jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine offene Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ und eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ mit $K \subseteq A \subseteq B$ und $\hat{\mu}_f(B) - \epsilon < \hat{\mu}_f(A) < \hat{\mu}_f(K) + \epsilon$. (Eine analoge Aussage gilt auch für das n-dimensionale Lebesguemaß.) *Lassen Sie sich dabei durch Ideen aus dem Beweis des Carathéodoryschen Fortsetzungssatzes motivieren.*

H4.6 **Faktorisierung messbarer Abbildungen.** Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Abbildungen mit $\mathcal{A} = \sigma(Y)$. Zeigen Sie, dass es eine messbare Abbildung $Z : (\Omega', \mathcal{A}') \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $X = Z \circ Y$ gibt.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, dass X eine Indikatorfunktion ist. Approximieren Sie im allgemeinen Fall X durch Treppenfunktionen.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 14.11.2017, Abend.