LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 2 – Tutorien

T2.1 **Borelsche σ-Algebra von Teilräumen.** Es sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $\Omega' \in \sigma(\mathcal{T}, \Omega)$ und $\mathcal{T}'$ die Teilraumtopologie auf Ω' bezüglich $\mathcal{T}$. Zeigen Sie

$$\mathcal{B}(\Omega', \mathcal{T}') = \{A \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{T}) |\ A \subseteq \Omega'\}.$$

T2.2 **Beispiele für Borelmengen.** Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ Borelmengen sind:

(a) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

(b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2+1}]$,

(c) die Menge A aller Zahlen $x \in [0, 1[$, in deren Dezimaldarstellung eine Ziffer "3" vorkommt,

(d) die Menge B aller Zahlen $x \in [0, 1[$, in deren Dezimaldarstellung unendlich oft die Ziffer "3", aber nur endlich oft die Ziffer "4" vorkommt.

T2.3 **Produkt-σ-Algebren und kanonische Projektionen.** Es seien $(\Omega_1, A_1), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ messbare Räume, $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ ihr kartesisches Produkt und $\pi_i : \Omega \to \Omega_i$, $\pi_i(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \omega_i$ für $i = 1, \ldots, n$ die kanonischen Projektionen. Beweisen Sie

$$\mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma(\{\pi_i^{-1}[A_i]|\ i \in \{1, \ldots, n\},\ A_i \in \mathcal{A}_i\}).$$

T2.4 **Gegenbeispiel zum Hochheben der Unabhängigkeit auf erzeugte σ-Algebren.** Es sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, versehen mit seiner Potenzmenge und der Gleichverteilung μ. Weiter sei $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ und $\mathcal{F} = \{\{1, 4\}\}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{E}$ ist *nicht* $\cap$-stabil.

(b) $\forall A \in \mathcal{E}\ \forall B \in \mathcal{F} :\ \mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$.

(c) $\sigma(\mathcal{E})$ und $\sigma(\mathcal{F})$ sind *nicht* bezüglich μ voneinander unabhängig.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 2 – Hausaufgaben

H2.1[e] **Vergleich erzeugter σ-Algebren.** Es seien Ω eine Menge, $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ Mengensysteme über Ω. Beweisen Sie:

(a) Aus $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$ folgt $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}')$.

(b) Ist $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E}')$ und $\mathcal{E}' \subseteq \sigma(\mathcal{E})$, so folgt $\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}')$.

H2.2 **Erzeugendensysteme für $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.** Es sei $\Omega = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass folgende Mengensysteme alle die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugen:

(a) $\mathcal{E}_1 = \{]a, b[|\ a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, a < b\}$ sei die Menge der offenen Intervalle.

(b) $\mathcal{E}_2 = \{[a, b]|\ a, b \in \mathbb{R}, a \le b\}$ sei die Menge der kompakten Intervalle.

(c) $\mathcal{E}_3 = \{] - \infty, a]|\ a \in \mathbb{R}\}$ sei die Menge der linksseitig unendlichen abgeschlossenen Intervalle.

(d) $\mathcal{E}_4 = \{] - \infty, a]|\ a \in \mathbb{Q}\}$ sei die Menge der linksseitig unendlichen abgeschlossenen Intervalle mit rationalem Endpunkt.

(e) $\mathcal{E}_5 = \{]a, b] \cap \mathbb{R}|\ a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}$

H2.3 **Klassifizierung von σ-Algebren auf abzählbaren Mengen; Fortsetzung von Übung H1.3.**

(a) Es sei Ω eine abzählbare Menge, $\Sigma(\Omega)$ das Mengensystem aller Σ-Algebren darüber, und $\Pi(\Omega)$ das Mengensystem aller Partitionen darüber. Beweisen Sie, dass die Abbildung part : $\Sigma(\Omega) \to \Pi(\Omega)$, $\mathcal{A} \mapsto \text{part}(\mathcal{A})$ aus Übung H1.3 und die Abbildung $\sigma : \Pi(\Omega) \to \Sigma(\Omega)$, $\mathcal{E} \mapsto \sigma(\mathcal{E})$ zueinander inverse Bijektionen sind.

(b) Zählen Sie alle σ-Algebren auf der Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ auf.

H2.4 **Produkte von Mengenalgebren und Inhalten.** Für $j = 1, 2$ seien Ω_j eine Menge, $\mathcal{A}_j$ eine Mengenalgebra darüber und $\mu_j : \mathcal{A}_j \to [0, \infty]$ ein Inhalt. Weiter sei $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ und $\mathcal{A}$ die Menge aller endlichen Vereinigungen von Rechtecken $A_1 \times A_2$ mit Seiten $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Zeigen Sie:

(a) Jedes Element von $\mathcal{A}$ kann als endliche Vereinigung von *paarweise disjunkten* Rechtecken $A_1 \times A_2$ mit Seiten $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ dargestellt werden.

(b) $\mathcal{A}$ ist eine Mengenalgebra über Ω.

(c) Es gibt genau einen Inhalt $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ für $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$.

Insbesondere gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ genau einen Inhalt μ_n auf der Mengenalgebra aller endlichen Vereinigungen von Quadern $\prod_{j=1}^n (]a_j, b_j] \cap \mathbb{R})$, $a_j \le b_j$ in $[-\infty, \infty]$, mit $\mu(\prod_{j=1}^n (]a_j, b_j] \cap \mathbb{R})) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$. Wir werden später sehen, dass dieser Inhalt eine eindeutige Fortsetzung zu einem Maß λ_n auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ besitzt, dem *n-dimensionalen Lebesguemaß*.

H2.5 **Unabhängigkeit von $\cap$-stabilen Mengensystemen.** Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{A}$ durchschnittstabile Mengensysteme mit $\Omega \in \mathcal{E}_i$ für $i = 1, \dots, n$. Wir nennen $\mathcal{E}_1, \dots \mathcal{E}_n$ (voneinander) unabhängig bzgl. μ, wenn gilt:

$$\forall A_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}_n : \ \mu\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Zeigen Sie:

(a) Sind die Mengensysteme $\mathcal{E}_1, \dots \mathcal{E}_n$ von oben (voneinander) unabhängig bzgl. μ, so auch $\sigma(\mathcal{E}_1), \dots, \sigma(\mathcal{E}_n)$.

(b) Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel, dass die Aussage von eben falsch werden kann, wenn wir auf die Voraussetzung "$\Omega \in \mathcal{E}_i$ für $i = 1, \dots, n$" oben verzichtet hätten. Versehen Sie dazu $\Omega = \{1, 2\}$ mit einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsmaß und betrachten Sie $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \{\{1\}\}$ und $\mathcal{E}_3 = \{\emptyset\}$.

(c) Zeigen Sie: Sind $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4 \subseteq \mathcal{A}$ voneinander bzgl. μ unabhängige Unter-σ-Algebren von $\mathcal{A}$, so sind auch $\sigma(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$ und $\sigma(\mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4)$ voneinander unabhängig bzgl. μ.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 31.10.2017, Abend.