Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 15 – Tutorien

T15.1 **Der Satz von Stokes für Rechtecke – elementare Herleitung.** Beweisen Sie den Satz von Stokes $\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$ im Spezialfall, dass $\omega_{(x,y)} = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ eine glatte 1-Form auf einem Rechteck $M = [a,b] \times [c,d]$ ist, elementar und direkt, also ohne Verwendung des Satzes von Stokes aus der Vorlesung.

T15.2 **Wesentliches Supremum.**

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(R))$, λ das Lebesguemaß darauf und δ_0 das Diracmaß in 0 darauf. Berechnen Sie $\operatorname{ess\,sup}_\lambda 1_{\{0\}}$ und $\operatorname{ess\,sup}_{\delta_0} 1_{\{0\}}$.

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$ und $a \geq 0$. Überlegen Sie sich, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

i. $\|f\|_\infty \leq a$,

ii. $|f| \leq a$ μ-fast sicher.

T15.3 **Übungen zur $\|\cdot\|_\infty$-Norm.**

(a) Beweisen Sie die Hölder-Ungleichung für $p = 1$, $q = \infty$.

(b) Zeigen Sie: Jede Cauchyfolge in $(\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ konvergiert μ-fast überall.

T15.4 **Ableitung $D_j \overset{\text{Fourier}}{\longrightarrow}$ Multiplikation mit ik_j.** Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit kompaktem Träger. Zeigen Sie für alle $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ und $j = 1, \ldots, n$:

$$\mathcal{F}(D_j f)(k) = ik_j \mathcal{F} f(k)$$

Hinweis: Fubini + partielle Integration.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 15 – Hausaufgaben

H15.1 **Dualitätsrelationen zu $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$.** Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f \in M(\Omega, \mathcal{A})$, und es gebe eine Folge $E_n \uparrow \{f \neq 0\}$ in $\mathcal{A}$ mit $\mu(E_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Dies ist z.B. der Fall, wenn μ σ-endlich ist.) Zeigen Sie die Dualitätsrelation

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \int |fg| \, d\mu \,\middle|\, g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|g\|_q \leq 1 \right\} \tag{1}$$

für die beiden Fälle $(p, q) = (1, \infty)$ und $(p, q) = (\infty, 1)$.

H15.2 **Dichtheit von $C_c^\infty(U)$ in $L^p(U)$.** Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

$$C_c^\infty(U) := \{f|_U \,|\, f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp} f \subseteq U\}$$

der Raum aller glatten Funktionen mit kompaktem Träger in U. Zeigen Sie für $1 \leq p < \infty$: Der Raum $C_c^\infty(U)$ ist dicht in $(\mathcal{L}^p(U, \mathcal{B}(U), \lambda_n|_{\mathcal{B}(U)}), \|\cdot\|_p)$.

H15.3 **Fouriertransformation von Schwartzfunktionen.** Die Elemente des Raums

$$\mathcal{S} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) | \; \forall a, b \in \mathbb{N}_0 : \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^a D^b f(x)| < \infty\}$$

werden *Schwartzfunktionen* über $\mathbb{R}$ genannt. Zeigen Sie für alle Schwartzfunktionen $f \in \mathcal{S}$, dass auch $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}$ gilt.

H15.4 **Berechnung eines Integrals.** Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^4 x}{x^4} \, dx.$$

Hinweis: Wenden Sie die Plancherel-Gleichung auf $1_{[-1,1]} * 1_{[-1,1]}$ an.

keine Abgabe.