LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 14 – Tutorien

T14.1 **Nichtverschwinden von $H^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$.** Es sei $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, $V : U \to \mathbb{R}^3$, $V(x) = x/\|x\|_2^3$ und $\omega = i_V \lambda_3 \in \mathcal{D}^2(U)$, wobei $\lambda_3 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ die Standardvolumenform auf U bezeichnet. Beweisen Sie $d\omega = 0$ und

$$\int_{S^2} \omega \neq 0,$$

wobei S^2 die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$ mit einer Orientierung Ihrer Wahl bezeichnet. Folgern Sie $[\omega]_{H^2(U)} \neq 0$.

T14.2 **Lie-Ableitung der Flächenform unter dem Skalierungsfluss.** Berechnen Sie die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_v\omega$ der Standardflächenform $\omega = dx \wedge dy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nach dem Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v(x, y) = (x, y)$.

T14.3 **Volumeninvarianz Hamiltonischer Vektorfelder.** Es seien $n = 2m$ gerade, $H : U \to \mathbb{R}$ glatt mit offenem $U \subset \mathbb{R}^n$.

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} dx_j \wedge dx_{j+m}$$

und

$$v = (D_{m+1}H, \dots, D_{2m}H, -D_1H, \dots, -D_mH),$$

also $v_j = D_{m+j}H$ und $v_{m+j} = -D_jH$ für $j = 1, \dots, m$. Zeigen Sie:

(a) $i_v\omega = dH$,

(b) $\mathcal{L}_v\omega = 0$,

(c) $\omega^{\wedge m} := \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{m \text{ Faktoren}}$ ist ein konstantes Vielfaches der Standardvolumenform $\lambda_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$,

(d) $\mathcal{L}_v\lambda_n = 0$.

T14.4 **Radialsymmetrische Potenzfunktionen in L^p.** Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n |\ \|x\|_2 < 1\}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_2^\alpha$ für $x \neq 0$, $f(0)$ beliebig. Entscheiden Sie für jede der drei Funktionen $f1_B$, $f1_{B^c}$ und f, unter welchen Voraussetzungen an α, n und p sie in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ liegt.

T14.5 **Darstellung divergenzfreier Vektorfelder als Rotation.** Gegeben sei ein glattes Vektorfeld $B = (B_1, B_2, B_3)^t$ über $\mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{div} B = 0$ und die Homotopie $\Phi : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(t, x) = tx$ von 0 nach $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

(a) Wenden Sie das Lemma von Poincaré mit der Homotopie Φ an, um ein glattes Vektorfeld A über $\mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot} A = B$ zu finden.
(*Ergebnis:*

$$A(x) = \left(\int_0^1 tB(tx)\, dt\right) \times x$$

wobei $V \times W = (V_2W_3 - V_3W_2, V_3W_1 - V_1W_3, V_1W_2 - V_2W_1)^t$ das Kreuzprodukt in $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.)

(b) Bestätigen Sie zur Kontrolle $\operatorname{rot} A = B$ durch direkte Rechnung.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 14 – Hausaufgaben

H14.1 **Der Satz vom Igel.**

(a) Es sei $\omega \in \mathcal{D}^2(U)$ die 2-Form über $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ aus Aufgabe T14.1. Weiter sei $M : U \to U$, $M(x) = -x$ der Vorzeichenwechsel. Beweisen Sie $M^*\omega = -\omega$. Folgern Sie $[M^*\omega]_{H^2(U)} \neq [\omega]_{H^2(U)}$ mit dem Ergebnis von Aufgabe T14.1.

(b) Beweisen Sie den "Satz vom Igel": *Jedes glatte Tangentialvektorfeld $G : S^2 \to \mathbb{R}^3$, also $G(x) \in T_xS^2$ für alle $x \in S^2$, besitzt eine Nullstelle: $\exists x \in S^2 : G(x) = 0$.*
Gehen Sie dazu so vor: Angenommen, G wäre ein solches Vektorfeld ohne Nullstelle. Normieren Sie es so $N : S^2 \to S^2$, $N(x) := G(x)/\|G(x)\|_2$ und definieren Sie die glatte Homotopie

$$f : [0,1] \times U \to U, \quad (t,x) \mapsto f_t(x) := \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)N(x).$$

Zeigen Sie, dass f wohldefiniert ist, also insbesondere nicht den Wert 0 annimmt, und $f_0 = \mathrm{id}_U$, $f_1 = M$ erfüllt. Folgern Sie den Widerspruch $[-\omega]_{H^2(U)} = [M^*\omega]_{H^2(U)} = [f_1^*\omega]_{H^2(U)} = [f_0^*\omega]_{H^2(U)} = [\omega]_{H^2(U)}$.
Wie der Satz zu seinem Namen kommt: Igel sind bekanntlich Tiere, die sich bei Gefahr zu einer Stachelkugel zusammenrollen. Der Satz vom Igel besagt, dass man einen Igel nicht ohne Scheitelpunkt glatt kämmen kann.

H14.2 **Wie die ∞-Halbnorm zu ihrem Namen kommt.** Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $0 < \mu(\Omega) < \infty$. Zeigen Sie für alle $f \in M(\Omega, \mathcal{A})$:

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p. \tag{1}$$

Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel, dass die Gleichung (1) im Fall $\mu(\Omega) = \infty$ falsch werden kann.

H14.3 **Eine iterierte Hölder-Ungleichung.** Es seien $p_1, \ldots, p_m \in [1, \infty]$ mit

$$\sum_{j=1}^m p_j^{-1} = 1$$

(Konvention: $\infty^{-1} := 0$). Weiter seien $f_1, \ldots, f_m \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Zeigen Sie:

$$\left\| \prod_{j=1}^m f_j \right\|_1 \leq \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{p_j}.$$

H14.4 **L^2-Isometrie der Fouriertransformation auf Gaußfunktionen.** Für $n \in \mathbb{N}$, eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{C}^n$ setzen wir

$$f(x) = f_{A,b}(x) := \exp\left(-\frac{1}{2}x^tAx + b^tx\right), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei Elemente von $\mathbb{C}^n$ als Spaltenvektoren aufgefaßt werden. Zeigen Sie, ohne Ergebnisse aus dem Abschnitt über die L^2-Theorie von Fourierintegralen vorab zu verwenden:

(a) Für $k \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mathcal{F}f(k) = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \exp\left(-\frac{1}{2}(k+ib)^tA^{-1}(k+ib)\right)$$

(b) Folgern Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{f_{A,b}}\, f_{A',b'}\, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathcal{F}f_{A,b}}\, \mathcal{F}f_{A',b'}\, d\lambda_n,$$

wobei auch $b' \in \mathbb{C}^n$ sei und $A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine weitere positiv definite Matrix bezeichnet.

H14.5 **Das Cup-Produkt.** Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $p, q \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie: Durch

$$[\omega]_{H^p(U)} \cup [\chi]_{H^q(U)} := [\omega \wedge \chi]_{H^{p+q}(U)}, \qquad \omega \in Z^p(U),\ \chi \in Z^q(U)$$

wird eine Abbildung $\cup : H^p(U) \times H^q(U) \to H^{p+q}(U)$ wohldefiniert.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 6.2.2018, Abend.