LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 13 – Tutorien

T13.1 **Zur Kompaktheitsvoraussetzung im Satz von Stokes.** Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Behauptung $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$ des Satzes von Stokes falsch werden kann, wenn man auf die Voraussetzung verzichtet, dass die Form ω kompakten Träger besitzen soll.

T13.2 **Illustration zum Satz von Stokes.** Gegeben sei die 2-Form $\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$. Berechnen Sie das Integral $\int_{S^2} \omega$ über die Sphäre (so orientiert, dass ω darauf positiv wird) auf zwei verschiedene Weisen:

(a) direkt als zweidimensionales Integral;

(b) mit dem Satz von Stokes.

T13.3 **Greensfunktion zu Δ in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.** Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta f(x)}{\|x\|_2^{d-2}} \, \lambda_n(dx) = -n(n-2)\lambda_n(B_n) f(0)$$

wobei B_n die n-dimensionale Einheitskugel bezeichnet.

T13.4 **Cauchy-Integralformel für reell differenzierbare Funktionen.** Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein kompaktes Gebiet mit stückweise glattem Rand und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Es sei $x : U \to \mathbb{R}$ die Realteilbildung, $y : U \to \mathbb{R}$ die Imaginärteilbildung, $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$. Weiter sei a ein Punkt im Inneren $U^\circ = U \setminus \partial U$ von U. Zeigen Sie:

(a) $d\bar{z} \wedge dz = 2i\,dx \wedge dy = 2i\,\lambda_2$

(b)

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z-a} = 0 \quad \text{auf } U \setminus \{a\}$$

(c) Ist $r > 0$ so klein, dass die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{U_r(a)}$ um a mit Radius r ganz in U° enthalten ist, so gilt

$$\int_{\partial U} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_{\partial U_r(a)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz + \int_{U \setminus U_r(a)} \frac{1}{z-a} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\, d\bar{z} \wedge dz \tag{1}$$

(d) Folgern Sie im Limes $r \downarrow 0$ die folgende verallgemeinerte Cauchy-Integralformel:

$$\int_{\partial U} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 2\pi i f(a) + \int_{U \setminus \{a\}} \frac{1}{z-a} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\, d\bar{z} \wedge dz$$

Insbesondere gilt die Cauchy-Integralformel

$$\int_{\partial U} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 2\pi i f(a)$$

für holomorphe Funktionen f.
Hinweis: Parametrisieren Sie die Kreislinie $\partial U_r(a)$ durch $z(t) := a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, und wenden Sie den Satz von der dominierten Konvergenz an, um den Limes $r \downarrow 0$ in den Integralen in (1) auszuführen. Achten Sie dabei sorgfältig auf die Existenz integrierbarer Majoranten.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 13 – Hausaufgaben

H13.1 **Lösung der Poissongleichung.** Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger und $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch folgende Faltung mit dem Newtonpotential definiert:

$$h(x) := -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x-y)}{\|y\|_2} \, \lambda_3(dy)$$

Zeigen Sie, dass auch h glatt ist und die "Poissongleichung"

$$\Delta h = f$$

erfüllt.
Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass Ableitungen nach Komponenten von x und das Integral hier vertauscht werden können.

H13.2 **Greensfunktion zu Δ in $\mathbb{R}^2$.** Zeigen Sie für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \log \|x\|_2 \, \Delta f(x) \, \lambda_2(dx) = 2\pi f(0)$$

H13.3 **Produktregel für die Lie-Ableitung.** Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $p \in \mathbb{N}_0$ und $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld. Wir definieren die *Lie-Ableitung*:

$$\mathcal{L}_X : \mathcal{D}^p(U) \to \mathcal{D}^p(U),$$
$$\mathcal{L}_X \omega = i_X d\omega + d i_X \omega.$$

Zeigen Sie für $\omega \in \mathcal{D}^p(U)$ und $\chi \in \mathcal{D}^q(U)$ mit $p, q \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \chi) = (\mathcal{L}_X \omega) \wedge \chi + \omega \wedge (\mathcal{L}_X \chi)$$

H13.4 **Lie-Ableitung und Skalarmultiplikation.** Zeigen Sie in der Situation von Aufgabe H13.3 für glatte $a : U \to \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}_{aX} \omega = a \mathcal{L}_X \omega + da \wedge i_X \omega.$$

In diesem Sinne ist die Lie-Ableitung *nicht* $C^\infty(U)$-linear im Vektorfeldargument.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 30.1.2017, Abend.