Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 12 – Tutorien

T12.1 **Ein Beispiel zur Vertauschbarkeit von Rückzug mit äußerer Ableitung.** Berechnen Sie $d\omega$, $f^*\omega$, $f^*(d\omega)$ und $d(f^*\omega)$ für die 1-Form $\omega = x\,dy - y\,dx$ auf $\mathbb{R}^2$ und die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi).$$

T12.2 **Kartenwechsel zwischen Poincaré-Modell und Kleinschem Modell der hyperbolischen Ebene.** Aus Teil 2. der Hausaufgabe H11.3 seien gegeben: das Hyperboloid H, seine positive Schale $H_+ := \{(y_1,y_2,y_3) \in H |\ y_3 > 0\}$, die indefinite symmetrische Bilinearform h und die hyperbolische stereographische Projektion $f : D \to H_+$ auf der Einheitskreisscheibe D. Weiter sei

$$k : D \to H_+, \quad k(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}(x_1,x_2,1).$$

Berechnen Sie die Riemannsche Metrik k^*h auf D und die zugehörige Flächenform ω^{k^*h}, dargestellt bezüglich der Standardbasis auf $\mathrm{Bilin}(\mathbb{R}^2)$ bzw. auf $\bigwedge^2(\mathbb{R}^2)'$. Berechnen Sie den Kartenwechsel $\phi := f^{-1} \circ k : D \to D$ explizit. Bestätigen Sie die Aussagen $\phi^* f^* h = k^* h$ und $\phi^* \omega^{f^*h} = \omega^{k^*h}$ auf zwei Weisen:

a) Abstrakt mit den Eigenschaften des Rückzugs,

b) Rechnerisch mit der expliziten Darstellung von ϕ.

Das Paar (D, k^*h) wird *Kleinsches Modell der hyperbolischen Ebene* genannt.

T12.3 **Äußere Ableitung als alternierend gemachte Ableitung.** Es sei ω eine glatte p-Form auf $\mathbb{R}^n$, wobei $p \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $x, v_0, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie:

$$d\omega_x(v_0,\ldots,v_p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \tilde{d}\omega_x(v_k)(v_0,\ldots,\cancel{v_k},\ldots,v_p), \tag{1}$$

wobei "$\tilde{d}$" die Ableitungsoperation (Linearisierung) im Sinne der Analysis 2 bezeichnet, und "d" die äußere Ableitungsoperation im Sinne der Analysis 3.

T12.4 **Ein Beispiel zur antikommutativen Produktregel.** Es seien $\omega = ye^{-x^2}\,dx + e^{-x^2}\,dz$ und $\lambda = x\,dy + dz$. Berechnen Sie zunächst $\omega \wedge \lambda$, $d\omega$ und $d\lambda$. Berechnen Sie daraus $d(\omega \wedge \lambda)$ unter Verwendung der Produktregel und auch ohne diese; versuchen Sie, auf beiden Wegen übereinstimmende Ergebnisse zu erreichen.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematatisches Institut
Wintersemester 2017/18

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 12 – Hausaufgaben

H12.1 **Flächen von Kreisscheiben in der hyperbolischen Ebene.** Berechnen Sie die Flächenform (= zweidimensionale Volumenform) zur Poincaré-Metrik. Berechnen Sie die Fläche A_r der Kreisscheibe $D_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 < r\}$ und die Länge R_r ihres Radius $C_r = \{(x,0)|\ 0 < x < r\}$ für $0 < r < 1$ im Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene, also nicht im euklidischen Sinn. Berechnen Sie $\lim_{r\to 0} \pi_r$ und $\lim_{r\to 1} \pi_r$ für $\pi_r := A_r/R_r^2$.

H12.2 **Integral über Blätterungen durch Hyperflächen.**

(a) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $df_x \neq 0$ für alle $x \in U$, so dass die Niveaugebilde $M_t := f^{-1}[\{t\}]$, $t \in \mathbb{R}$ Hyperflächen in $\mathbb{R}^n$ (oder leer) sind. Zeigen Sie für alle $g \in \overline{M}_+(U, \mathcal{B}(U))$:

$$\int_U g\, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}} \int_{M_t} \frac{g(x)}{\|\nabla f(x)\|_2}\, \omega^{M_t}(dx)\, dt.$$

(b) Überzeugen Sie sich davon, dass man im Spezialfall $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(x) = \|x\|_2$ hieraus wieder die Formel (3) aus Hausaufgabe 10.3(b) erhält.

H12.3 **Isomorphie zwischen Vektoren und $n{-}1$-Formen durch Volumenform.** Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum und ω eine Basis von $\bigwedge^n V'$, so ist

$$*_\omega : V \to \bigwedge^{n-1} V', \quad *_\omega(v) = i_v(\omega) = \omega(v, \underbrace{\cdot, \ldots, \cdot}_{\substack{n-1 \\ \text{Argumente}}})$$

ein Isomorphismus.

H12.4 **Laplaceoperator in Kugelkoordinaten.** Sei $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ glatt,

$$h :]0, 2\pi[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]0, \infty[\to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$
$$h(\phi, \theta, r) = (r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta)$$

die Umrechnung in Kugelkoordinaten, und $F = f \circ h$.

(a) Zeigen Sie:

$$(\Delta f) \circ h = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}$$

Der Kürze halber sind hier die Argumente (ϕ, θ, r) weggelassen.

(b) Wenden Sie diese Formel für $f(x) = x_3 e^{-\|x\|_2}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ an. Berechnen Sie zur Kontrolle auch $(\Delta f) \circ h$ direkt und versuchen Sie, übereinstimmende Ergebnisse zu erhalten.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 23.1.2017, Abend.