Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 11 – Tutorien

T11.1 **Rückzug vertauscht mit Dachprodukt.** Es sei $f : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und ω eine p -Form und χ eine q -Form auf V , $p, q \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

$$f^*(\omega \wedge \chi) = (f^*\omega) \wedge (f^*\chi).$$

T11.2 **Eine Volumenform auf der Kugel.** Es sei $dx_1, \dots, dx_n$ die Standardbasis von $(\mathbb{R}^n)'$ und

$$\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Weiter sei x ein Punkt auf der Einheitskugel S^{n-1} . Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\chi : (T_x S^{n-1})^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi(v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega(x, v_1, \dots, v_{n-1})$$

eine Basis von $\bigwedge^{n-1}(T_x S^{n-1})'$ bildet.

T11.3 (a) **Volumenelement in Kugelkoordinaten.** Es sei

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ (x, y, z) = g(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta)$$

die Kugelkoordinatenabbildung. Zeigen Sie:

$$g^*(dx \wedge dy \wedge dz) = r^2 \sin \vartheta \, dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi.$$

(b) **Volumen eines Kugelschalensektors.** Berechnen Sie für $0 < a < b$ und $c > 0$ das Volumen $\lambda_3(S)$ des Kugelschalensektors

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0, a^2 < x^2 + y^2 + z^2 < b^2, z^2 < c^2(x^2 + y^2)\}$$

Versuchen Sie sich S anschaulich vorzustellen.

T11.4 **Rückzug von Bilinearformen in Matrixdarstellung.** Es sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = Fx$ eine lineare Abbildung, dargestellt durch eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Weiter sei $g \in \text{Bilin}(\mathbb{R}^n)$ eine Bilinearform, dargestellt bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ durch eine Matrix $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass f^*g durch die Matrix $F^t G F \in \mathbb{R}^{m \times m}$ dargestellt wird.

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
 Blatt 11 – Hausaufgaben

H11.1 **Rechenregeln für die Einsetzoperation.** Es seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $p, q \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Einsetzoperation

$$i : V \times \bigwedge^p V' \rightarrow \bigwedge^{p-1} V', \quad (v, \omega) \mapsto i_v \omega$$

bilinear ist.

(b) Zeigen Sie

$$i_v i_w \omega = -i_w i_v \omega$$

für alle $v, w \in V$ und $\omega \in \bigwedge^p V'$ mit $p \geq 2$.

(c) (**Antikommutative Produktregel**) Zeigen Sie für $v \in V$, $\omega \in \bigwedge^p V'$ und $\chi \in \bigwedge^q V'$:

$$i_v(\omega \wedge \chi) = (i_v \omega) \wedge \chi + (-1)^p \omega \wedge (i_v \chi)$$

H11.2 **Zusammensetzen eines Maßes aus Stücken.** Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum, $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von messbaren Mengen $V_i \in \mathcal{A}$, die eine abzählbare Überdeckung $(V_i)_{i \in J}$ von M umfaßt: $J \subseteq I$ abzählbar, $\bigcup_{i \in J} V_j = M$. Für jedes $i \in I$ sei μ_i ein Maß auf $(V_i, \mathcal{A}_i)$, wobei $\mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{A} \mid A \subseteq V_i\}$. Weiter gelte $\mu_i(A) = \mu_j(A)$ für alle $i, j \in I$ und alle $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq V_i \cap V_j$. Zeigen Sie, dass es genau ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ gibt, so dass $\mu(A) = \mu_i(A)$ für alle $i \in I$ und $A \in \mathcal{A}_i$ gilt.

H11.3 **Stereographische Projektion und hyperbolische Ebene.**

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right)$$

die (inverse) stereographische Projektion. Überzeugen Sie sich davon, dass $f(x_1, x_2)$ der zweite Schnittpunkt der Geraden durch $(0, 0, -1) \in S^2$ und $(x_1, x_2, 0)$ mit der Sphäre S^2 ist.

Berechnen Sie f^*g für die euklidische Metrik

$$g = dy_1 \otimes dy_1 + dy_2 \otimes dy_2 + dy_3 \otimes dy_3.$$

Überzeugen Sie sich davon, dass

$$f^*g = \alpha \cdot (dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2)$$

für ein $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ gilt. Man sagt hierzu: f ist *konform* oder auch *winkeltreu*.

(b) **Hyperbolische Variante:** Gegeben sei die indefinite symmetrische Bilinearform

$$h = dy_1 \otimes dy_1 + dy_2 \otimes dy_2 - dy_3 \otimes dy_3$$

und das zweischalige Hyperboloid

$$H = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid h(y, y) = -1\} = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = -1\}$$

sowie die (inverse) hyperbolische stereographische Projektion $f : D \rightarrow H$,

$$f(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{2x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2}, \frac{2x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}, \frac{1 + x_1^2 + x_2^2}{1 - x_1^2 - x_2^2} \right),$$

wobei $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ die Einheitskreisscheibe bezeichnet. Überzeugen Sie sich davon, dass $f(x_1, x_2)$ der zweite Schnittpunkt der Geraden durch $(0, 0, -1) \in H$ und $(x_1, x_2, 0)$ mit dem Hyperboloid H ist.

Berechnen Sie $g := f^*h$ und überzeugen Sie sich davon, dass

$$g = \alpha \cdot (dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2)$$

für ein $\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ gilt. Insbesondere ist g positiv definit, also eine Riemannsche Metrik auf der Einheitskreisscheibe.

g wird die *Poincaré-Metrik* auf D genannt. Die Einheitskreisscheibe D , versehen mit dieser Riemannschen Metrik, wird *Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene* genannt.

H11.4 Oberflächenform aus Volumenform durch Einsetzen von Normalenvektoren. Es sei M eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$, also 1-codimensionale Untermannigfaltigkeit. Weiter sei $\phi : U \rightarrow M$ eine surjektive Parametrisierung von M , $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen. Schließlich sei $N : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein normiertes Normalenvektorfeld auf M , d.h. $N(y) \perp T_y M$ (Orthogonalität bezüglich des Standardskalarprodukts gemeint) und $\|N(y)\|_2 = 1$ für alle $y \in M$. Es gelte $\det(N(\phi(x)), D\phi(x)) > 0$ für alle $x \in U$. Zeigen Sie für alle $A \in \mathcal{B}(M)$:

$$\omega^M(A) = \int_{\phi^{-1}[A]} \phi^*(i_N \lambda_n),$$

wobei $\lambda_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ die Standardvolumenform bezeichnet und $\phi^*(i_N \lambda_n)_x = d\phi_x^*(i_{N(\phi(x))} \lambda_n)$ für $x \in U$.

H11.5 Oberflächeninhalt von Rotationskörpern.

- (a) Es sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ eine glatte Abbildung. Der Graph von f werde im Raum um die x -Achse rotiert:

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = f(x)^2, a < x < b\}.$$

Zeigen Sie, dass M den Flächeninhalt

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie Parametrisierungen der Gestalt $k(x, t) = (x, f(x) \cos t, f(x) \sin t)$.

- (b) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Rotationsellipsoids

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a^{-2}x^2 + b^{-2}y^2 + b^{-2}z^2 = 1\}$$

für gegebene $a, b > 0$. Was erhält man für festes $b > 0$ in den Limiten $a \rightarrow 0$ bzw. $a \rightarrow b$?

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 16.1.2017, Abend.