Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
 Blatt 10 – Tutorien

T10.1 **Vom Ortsvektor in Polarkoordinaten überstrichene Fläche.** Für gegebenes $f \in \overline{M}_+([0, 2\pi[, \mathcal{B}([0, 2\pi[))$ definieren wir die Menge

$$M = \{(r \cos \phi, r \sin \phi) \mid 0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq r < f(\phi)\}.$$

Zeigen Sie:

$$\lambda_2(M) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\phi)^2 d\phi.$$

Dies gibt der in der Analysis 1 heuristisch-anschaulich begründeten Formel für die vom Ortsvektor in Polarkoordinaten überstrichene Fläche einen rigorosen Sinn.

T10.2 **Fouriertransformierte der multidimensionalen Normalverteilung.** Es sei $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Sigma = \Sigma^t$, eine positiv definite Matrix und ν_Σ die zentrierte multidimensionale Normalverteilung zur Kovarianzmatrix Σ . Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} \nu_\Sigma(dx) = \exp\left(-\frac{1}{2}k^t \Sigma k\right) \quad (1)$$

Hierbei bezeichnet $\langle k, x \rangle = \sum_{j=1}^n k_j x_j$ das euklidische Skalarprodukt.

T10.3 **Operationen mit Normalverteilungen.**

- (a) Es seien $\nu_{\Sigma_1} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1]$ und $\nu_{\Sigma_2} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \rightarrow [0, 1]$ die multidimensionalen zentrierten Normalverteilungen zu gegebenen positiv definiten Kovarianzmatrizen $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\Sigma_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, wobei $n, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $\nu_{\Sigma_1} \otimes \nu_{\Sigma_2} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) \rightarrow [0, 1]$ ist die multidimensionale zentrierte Normalverteilung mit der Kovarianzmatrix (in Blocknotation)

$$\Sigma = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_1 & 0 \\ \hline 0 & \Sigma_2 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}.$$

- (b) Es seien $m \leq n$ zwei natürliche Zahlen, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite Matrix, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix vom Rang m und $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $L_A(x) = Ax$ die zugehörige Multiplikationsabbildung. Beweisen Sie $L_A[\nu_\Sigma] = \nu_{A\Sigma A^t}$.

Hinweis: Der Spezialfall $m = n$ ist Ihnen schon bekannt. Reduzieren Sie den allgemeinen Fall auf diesen Spezialfall.

T10.4 **Kovarianzen der multidimensionalen Normalverteilung.** Gegeben sei eine positiv definite Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Weiter bezeichne ν_Σ die multidimensionale (zentrierte) Normalverteilung mit Kovarianzmatrix Σ . Zeigen Sie für $l, m \in \{1, \dots, n\}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_l x_m \nu_\Sigma(dx) = \Sigma_{l,m},$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ und $\Sigma_{l,m}$ den (l, m) -Eintrag der Matrix Σ bezeichnet.

Hinweis: Leiten Sie die Fouriertransformierte (1) der multidimensionalen Normalverteilung, siehe Aufgabe T10.2, nach k_l und k_m ab.

T10.5 **Die Chi-Quadrat-Verteilung.**

- (a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\nu_n(dx) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\|x\|_2^2} \lambda_n(dx), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

die n -dimensionale Standardnormalverteilung. Die Chi-Quadrat-Verteilung χ_n^2 mit n Freiheitsgraden wird definiert als das Bildmaß $\chi_n^2 := q[\nu_n]$ von ν_n unter der Norm-Quadrat-Abbildung $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $q(x) = \|x\|_2^2$. Zeigen Sie:

$$\chi_n^2(dt) = \frac{2^{-n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t/2} dt, \quad t \geq 0.$$

- (b) Zeigen Sie

$$\chi_m^2 * \chi_n^2 = \chi_{m+n}^2$$

für $m, n \in \mathbb{N}$.

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
 Blatt 10 – Hausaufgaben

H10.1 Rechteck*Rechteck=Dreieck.

- (a) Es sei $\mu = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Berechnen Sie $\mu * \mu$. Zeichnen Sie den Graphen von $a \mapsto \mu * \mu(\{a\})$, $a \in \mathbb{Z}$, und veranschaulichen Sie sich seine Entstehung an Hand einer Graphik des Quadrats $\{0, 1, 2\}^2$.
- (b) Zeigen Sie:

$$\frac{1_{[-1,1]}}{2} * \frac{1_{[-1,1]}}{2} : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{2}(1 - |x/2|)_+ \quad (2)$$

Veranschaulichen Sie sich diese Formel graphisch.

- (c) Beweisen Sie

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} (1 - |x/2|)_+ dx = \begin{cases} \frac{\sin^2 k}{k^2} & \text{für } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

auf zwei verschiedene Weisen:

- i. direkt mit Techniken aus der Analysis 1,
- ii. mittels Fouriertransformation der Faltungsformel (2).

H10.2 Die Cauchyverteilung. Die Cauchyverteilung zum Parameter $a > 0$ ist das durch

$$\text{Cau}_a(dx) = \frac{1}{\pi} \frac{a dx}{a^2 + x^2}$$

definierte Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

- (a) **Skalierungseigenschaft.** Für $t > 0$ sei $m_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $m_t(x) = tx$ die Multiplikation mit t . Zeigen Sie für $a, t > 0$:

$$m_t[\text{Cau}_a] = \text{Cau}_{ta}$$

- (b) **Faltungseigenschaft.** Beweisen Sie für $a, b > 0$:

$$\text{Cau}_a * \text{Cau}_b = \text{Cau}_{a+b}$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

H10.3* Das normierte Oberflächenmaß auf der Einheitskugel. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\nu_{n+1}(dx) = (2\pi)^{-(n+1)/2} e^{-\frac{1}{2}\|x\|_2^2} \lambda_{n+1}(dx), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

die $n+1$ -dimensionale Standardnormalverteilung, eingeschränkt auf $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}))$. Weiter sei $N : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$, $N(x) = x/\|x\|_2$, die Normierungsabbildung auf die n -Sphäre

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}.$$

Das normierte Oberflächenmaß auf $(S^n, \mathcal{B}(S^n))$ wird definiert als das Bildmaß $\Omega_n := N[\nu_{n+1}]$.

- (a) Berechnen Sie die Dichte $d\pi[\Omega_n]/d\lambda_n$ des Bildmaßes von Ω_n unter der Projektion $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$.
- (b) Zeigen Sie für alle $f \in \overline{M}_+(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}))$:

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f d\lambda_{n+1} = \frac{(n+1)\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma(\frac{n+3}{2})} \int_0^\infty \int_{S^n} f(rx) \Omega_n(dx) r^n dr \quad (3)$$

Hinweis: Lassen Sie sich von der Herleitung des $n+1$ -dimensionalen Kugelvolumens inspirieren. Man nennt den Vorfaktor $\frac{(n+1)\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma(\frac{n+3}{2})} = (n+1)\lambda_{n+1}(B_{n+1})$ auch die *Oberfläche* der Einheitskugel S^n .

H10.4* **Die Formel von Wick für Momente der multidimensionalen Normalverteilung.** Es sei $\Pi_{\leq 2}(m)$ die Menge aller Partitionen der Menge $\{1, \dots, m\}$ in 1- oder 2-elementige Mengen, und $\Pi_2(m)$ die Menge aller Partitionen von $\{1, \dots, m\}$ in genau 2-elementige Mengen. Zum Beispiel ist $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\} \in \Pi_{\leq 2}(4)$ und $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\} \in \Pi_2(4)$. Gegeben

$$\iota : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\},$$

$k \in \mathbb{R}^n$ und eine positiv definite Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definieren wir für jede 1-elementige Teilmenge $I = \{j\} \subseteq \{1, \dots, m\}$:

$$\phi(I, \iota, k, \Sigma) := (\Sigma k)_{\iota(j)}$$

und für jede 2-elementige Teilmenge $I = \{l, m\} \subseteq \{1, \dots, m\}$:

$$\phi(I, \iota, k, \Sigma) := \Sigma_{l,m}.$$

(a) Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^m x_{\iota(j)} \right) e^{i\langle k, x \rangle} \nu_{\Sigma}(dx) = \exp\left(-\frac{1}{2}k^t \Sigma k\right) \sum_{P \in \Pi_{\leq 2}(m)} \prod_{I \in P} \phi(I, \iota, k, \Sigma)$$

Hinweis: Leiten Sie die Fouriertransformierte (1) der multidimensionalen Normalverteilung nach $k_{\iota(1)}, \dots, k_{\iota(m)}$ ab.

(b) Folgern Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^m x_{\iota(j)} \right) \nu_{\Sigma}(dx) = \sum_{P \in \Pi_2(m)} \prod_{I \in P} \phi(I, \iota, k, \Sigma)$$

Schreiben Sie diese Summe im Fall $m = 4$, also für

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_{\iota(1)} x_{\iota(2)} x_{\iota(3)} x_{\iota(4)} \nu_{\Sigma}(dx)$$

explizit aus.

(c) Überlegen Sie sich, dass die Formeln für die Momente der Standardnormalverteilung aus T7.5(b) als Spezialfall $n = 1, \Sigma = 1$ enthalten sind.

H10.5 Wiederholungsaufgabe¹: Fehlerabschätzung in der Stirlingformel.

(a) Es sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Beweisen Sie:

$$\frac{1}{2}[f(0) + f(1)] - \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^2) f''(x) dx \quad (4)$$

(b) Nun sei zusätzlich $f'' \geq 0$. Beweisen Sie:²

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^2) f''(x) dx \leq \frac{1}{8}[f'(1) - f'(0)] \quad (5)$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst $0 \leq x - x^2 \leq 1/4$ für $0 \leq x \leq 1$.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ sei gegeben:

$$a_n := \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n - \log(n!) = \log \frac{n^{n+1/2} e^{-n}}{n!} \quad (6)$$

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq a_{n+1} - a_n \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \quad (7)$$

Hinweis: Verwenden Sie die vorhergehenden Teilaufgaben im Spezialfall $f(x) = -\log(x+n)$.

(d) Beweisen Sie induktiv für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$:

$$0 \leq a_m - a_n \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \quad (8)$$

(e) Nach der Stirlingformel gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Folgern Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} \leq n! \leq \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n+1/(8n)}$$

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 9.1.2017, Abend.

¹vgl. die 1. Klausur zur Analysis 1 des Wintersemesters 2016/17. zur Analysis 1

²Für den Spezialfall $f(x) = -\log(x+n)$, der unten benötigt wird, kann man den Faktor $\frac{1}{8}$ rechts in (5) (und damit auch in den folgenden Teilaufgaben) durch $\frac{1}{12}$ ersetzen. Wer will, kann auch die daraus resultierende Verschärfung der Fehlerabschätzung in der Stirlingformel zeigen.