LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 1 – Tutorien

ϵ-Aufgaben sind eher einfach; sie dienen der Einübung von Begriffen. $*$-Aufgaben sind eher schwerer und übersteigen manchmal den Standardstoff.

T1.1$^\epsilon$ Überlegen Sie sich, dass man den gleichen Begriff von Mengenalgebren bzw. von σ-Algebren erhält, wenn man in der Definition die Forderung "1. $\emptyset \in \mathcal{A}$" durch "1.' $\Omega \in \mathcal{A}$" ersetzt.

T1.2 Es sei $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra und $A, B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie: $A \cap B, A \setminus B, A \triangle B \in \mathcal{A}$, wobei $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

T1.3$^\epsilon$ **Monotonie von Inhalten.** Es ν ein Inhalt auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$. Zeigen Sie $\mu(A) \le \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$.

T1.4 Es sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$. Beweisen Sie $\sigma(\mathcal{E}, \Omega) = \mathcal{P}(\Omega)$. Geben Sie auch alle Elemente von $\sigma(\{\{1, 2\}\}, \Omega)$ an.

T1.5 **(σ-)Subadditivität.**

(a) Es sei μ ein Inhalt auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$. Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \le \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

(b) Nun sei μ sogar ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$. Zeigen Sie: Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in $\mathcal{A}$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 1 – Hausaufgaben

H1.1 **Elementare Eigenschaften signierter Maße.** Es sei μ ein signiertes Maß oder ein Inhalt auf einem Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{A})$. Beweisen Sie für $A, B, C \in \mathcal{A}$:

(a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$,

(b) $\mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$,

(c) $\mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(A)$, falls $B \subseteq A$,

(d) $\mu(A \cup B \cup C) + \mu(A \cap B) + \mu(B \cap C) + \mu(C \cap A) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) + \mu(A \cap B \cap C)$.

H1.2 Es sei $\Omega =]a, b]$, wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a < b$. Wir betrachten das Mengensystem $\mathcal{A}(]a, b])$, bestehend aus allen endlichen Vereinigungen $\bigcup_{j=1}^{n}]a_j, b_j]$, $n \in \mathbb{N}_0$, von halboffenen Intervallen $]a_j, b_j] \subseteq]a, b]$ mit $a \leq a_j < b_j \leq b$.

(a) Überzeugen Sie sich davon, dass sich jedes $A \in \mathcal{A}(]a, b])$ als eine endliche Vereinigung $A = \bigcup_{j=1}^{n}]a_j, b_j]$, $n \in \mathbb{N}_0$, von *paarweise disjunkten* Intervallen $]a_j, b_j]$ schreiben lässt.

(b) Überzeugen Sie sich auch davon, dass solch eine Darstellung von A eindeutig bestimmt ist, wenn man zusätzlich $a \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n \leq b$ fordert.

(c) Zeigen Sie, das $\mathcal{A}(]a, b])$ eine Mengenalgebra bildet.

(d) Folgern Sie, dass auch $\mathcal{A}(\mathbb{R}) := \{A \cap \mathbb{R} | \ A \in \mathcal{A}(] - \infty, \infty])\}$ eine Mengenalgebra bildet.

(e) $\mathcal{A}(]a, b])$ ist *keine* σ-Algebra. Geben Sie zur Illustration hiervon (ohne Beweis) eine Folge $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathcal{A}(]a, b])$ an, für die $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \notin \mathcal{A}(]a, b])$ gilt.

H1.3 **Partitionen und σ-Algebren über abzählbaren Mengen.** Es sei Ω eine endliche oder abzählbar unendliche Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra darüber. Für jedes $\omega \in \Omega$ sei $A(\omega) := \{\eta \in \Omega | \ \forall B \in \mathcal{A} : \ \omega \in B \Rightarrow \eta \in B\}$.

(a^ϵ) Berechnen Sie $A(\omega)$ für $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\}$ und alle $\omega \in \Omega$.

(b) Zeigen Sie:Für alle $\omega \in \Omega$ ist $\omega \in A(\omega) \in \mathcal{A}$.

(c) Zeigen Sie: Für alle $\omega, \eta \in \Omega$ gilt $A(\omega) = A(\eta)$ oder $A(\omega) \cap A(\eta) = \emptyset$. Das abzählbare Mengensystem $\mathrm{part}(\mathcal{A}) := \{A(\omega) | \ \omega \in \Omega\}$ bildet also eine *Partition* von Ω, also eine Zerlegung von Ω in nichtleere paarweise disjunkte Mengen.

(d) Zeigen Sie für alle $B \subseteq \Omega$, dass $B \in \mathcal{A}$ genau dann gilt, wenn B sich als eine Vereinigung von Elementen von $\mathrm{part}(\mathcal{A})$ darstellen lässt.

H1.4 **Komplexe Differenzierbarkeit – Wiederholung zur Analysis 2.** Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$ eine glatte Funktion. Wir identifizieren $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ mittels $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i. Für alle $z \in U$ ist $df_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, d.h. es existiert eine komplexe Zahl $f'(z) \in \mathbb{C}$, so dass für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt: $df_z(w) = f'(z)w$.

ii. Es gilt $D_1 f_1 = D_2 f_2$ und $D_2 f_1 = -D_1 f_2$.

iii. Die beiden 1-Formen $\omega_1, \omega_2 : U \to (\mathbb{R}^2)'$, $\omega_1(x, y) = f_1(x, y)\, dx - f_2(x, y)\, dy$, $\omega_2(x, y) = f_2(x, y)\, dx + f_1(x, y)\, dy$ sind geschlossen.

Bemerkung: In diesem Fall kann man in der Notation mit komplexen Zahlen $z = x + iy \in U$, $dz = dx + i\, dy$ schreiben: $\omega_1(z) + i\omega_2(z) = f(z)\, dz$. Dies ist eine *komplexwertige* 1-Form.

(b) Nehmen wir nun an, dass die drei obigen äquivalenten Aussagen gelten und dass U sternförmig sei. Zeigen Sie für jede geschlossene, stetige, stückweise stetig differenzierbare Kurve C in U: $\int_C f(z)\, dz = 0$.

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 23.10.2017, Abend.