LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

Sammlung von Klausuraufgaben zur Analysis 3 des Wintersemesters 2013/14

Diese Zusammenstellung alter Klausuraufgaben soll interessierten Studierenden zusätzliches Übungsmaterial zur Verfügung stellen. Sie wird nicht in den Tutorien oder den Übungen besprochen.

1. (a) Formulieren Sie eine Version der Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale.

   (b) Gegeben sei die Abbildung
   $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (e^{2x+y}, e^{x+y}).$$
   Berechnen Sie eine Dichte $\frac{df[\lambda_2]}{d\lambda_2}$ des Bildmaßes $f[\lambda_2]$. Hierbei bezeichnet λ_2 das Lebesguemaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
   Hinweis: Beachten Sie, dass f nicht surjektiv ist. Verwechseln Sie nicht f mit f^{-1}!

2. (a) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine n-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit, wobei $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \le m$. Weiter sei $\phi : U \to \phi[U] = M$ eine glatte bijektive Parametrisierung, definiert auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Definieren Sie das Oberflächenmaß ω_M auf $(M, \mathcal{B}(M))$. Dabei soll $\mathbb{R}^m$ mit dem Standardskalarprodukt versehen werden.

   (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\omega_M(M)$ der Schraubenfläche
   $$M = \{(r \cos t, r \sin t, t) |\ 0 < t < 2\pi,\ 0 < r < R\}$$
   für gegebenes $R > 0$.

3. (a) Formulieren Sie *entweder* den Satz von der dominierten Konvergenz *oder* den Satz von Lebesgue zur Vertauschung von Integral und Ableitung.

   (b) Die Funktion
   $$\mathrm{Ai} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \mathrm{Re} \int_0^\infty \omega \exp\left(-\frac{t^3}{3} + ix\omega t\right) dt$$
   mit der Abkürzung $\omega := e^{i\pi/6}$ wird *Airy-Funktion* genannt. Zeigen Sie, dass sie die folgende Differentialgleichung erfüllt:
   $$\mathrm{Ai}''(x) = x \,\mathrm{Ai}(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$
   Achten Sie dabei sorgfältig auf die Begründung von Vertauschungen von Integral und Ableitung.

4. (a) Gegeben sei die durch

$$\omega_{(x,y,z)} := \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

definierte 2-Form $\omega \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$. Berechnen Sie $d\omega$.

(b) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Stokes, inklusive der Voraussetzungen.

(c) Beweisen Sie: Es gibt *keine* glatte 1-Form $\eta \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ mit $d\eta = \omega$.
Hinweis: Betrachten Sie das Integral $\int_{S^2} \omega$, wobei S^2 mit einer beliebigen Orientierung versehen sei.

5. (a) Formulieren Sie das Lemma von Fatou.
Hinweis: Gemeint ist das allgemeine Lemma von Fatou aus der Maßtheorie, nicht der Spezialfall für Reihen aus der Analysis 1.

(b) Gegeben seien $p \in [1,\infty[$, ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n \in M(\Omega, \mathcal{A})$ und eine weitere Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:

i. $\forall \omega \in \Omega : \; f_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\omega)$,

ii. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n 1_{\{|f_n|>m\}}\|_p \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Beweisen Sie:

$$\|f_n - f\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

6. (a) Gegeben sei ein von unten σ-stetiger Inhalt μ auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$ über einer Menge Ω. Definieren Sie das zugehörige äußere Maß μ^*.

(b) Gegeben seien eine Menge Ω und eine Funktion $\nu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

i. $\nu(\emptyset) = 0$.

ii. Für alle $A, B \subseteq \Omega$ mit $A \subseteq B$ gelte $\nu(A) \le \nu(B)$.

iii. *σ-Subadditivität*: Für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen $A_n \subseteq \Omega$ gelte:

$$\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n).$$

Weiter sei

$$\mathcal{F} := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) |\; \forall C \in \mathcal{P}(\Omega) : \; \nu(C) \ge \nu(A \cap C) + \nu(A^c \cap C)\},$$

wobei $A^c := \Omega \setminus A$. Zeigen Sie:

(b1) Für alle $A, B \in \mathcal{F}$ gilt $A \cup B \in \mathcal{F}$.

(b2) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen $A_n \in \mathcal{F}$ gilt:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Ideen aus dem Beweis des Fortsetzungssatzes von Carathéodory.

7. (a) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Fubini.
   (b) Gegeben sei ein σ-endliches Maß μ auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$. Beweisen Sie:

$$2\int_{\mathbb{R}^+} x\mu([x,\infty[)\,dx = \int_{\mathbb{R}^+} x^2\,\mu(dx).$$

8. (a) Gegeben sei eine glatte Abbildung $f : U \to V$ zwischen zwei offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$, sowie eine glatte p-Form $\omega \in \mathcal{D}^p(V)$, wobei $m, n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}_0$. Definieren Sie den Rückzug $f^*\omega$.
   (b) Gegeben sei die Standardvolumenform $\lambda_3 = dx \wedge dy \wedge dz$ auf $\mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $V(x,y,z) = (x,y,0)$. Berechnen Sie den Rückzug $f^*\omega$ der Form

$$\omega = i_V\lambda_3$$

unter der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (s,t) \mapsto (s\cos t, s\sin t, s).$$

Stellen Sie das Ergebnis in der Form $f^*\omega_{(s,t)} = g(s,t)\,ds \wedge dt$ dar.

9. (a) Formulieren Sie den Satz von der monotonen Konvergenz.
   Hinweis: Gemeint ist die Version für Integrale aus der Maßtheorie, nicht der gleichnamige Spezialfall für Reihen aus der Analysis 1.
   (b) Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{1 - e^{-\frac{x^2}{2}}}\,dx = \sqrt{2\pi}\zeta\left(\frac{3}{2}\right),$$

wobei

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad s > 1$$

die sogenannte Riemannsche Zetafunktion bezeichnet.
Hinweis: Entwickeln Sie $1/(1 - e^{-\frac{x^2}{2}})$ in eine geometrische Reihe.
Wenn Sie bei der Rechnung Integral und Reihe vertauschen, begründen Sie dies sorgfältig.

10. (a) Formulieren Sie den Satz von der dominierten Konvergenz.
   (b) Welchen Wert besitzt das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}e^{-x^2/2}\,dx$$

für $k \in \mathbb{R}$? Die Angabe des Werts genügt; eine Begründung dafür ist *nicht* verlangt.
   (c) Zeigen Sie, dass der Limes

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^3}{3a} - \frac{x^2}{2} + ikx\right)\,dx$$

für gegebenes $k \in \mathbb{R}$ mit dem in Teilaufgabe (b) angegebenen Integral übereinstimmt. Begründen Sie dabei sorgfältig die Vertauschung von Integral und Limes.

11. (a) Formulieren Sie den Satz von Gauß. Gemeint ist der Integralsatz von Gauß als Spezialfall des Satzes von Stokes.

    (b) Gegeben seien das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $V(x) = \|x\|_2^{-3} x$, ein Punkt $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ein Radius r mit $0 < r < \|a\|_2$ und die Sphäre $S = \{x \in \mathbb{R}^3 | \; \|x - a\|_2 = r\}$, versehen mit einer Orientierung Ihrer Wahl. Berechnen Sie den Fluss $\int_S i_V \lambda_3$ von V durch S.

12. (a) Es bezeichne für integrierbare $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \mathcal{F}h(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} h(x) \, dx$$

    die Fouriertransformierte von h.

    Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} 1_{\mathbb{R}^+}(x)$. Geben Sie eine integrierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\mathcal{F}g = (\mathcal{F}f)^2$ explizit an. Das Ergebnis für $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, darf kein Integral enthalten.

    (b) Formulieren Sie die Fourier-Umkehrformel, inklusive ihrer Voraussetzungen.

    (c) Berechnen Sie den Wert $\mathcal{F}\mathcal{F}g(x)$ der iterierten Fouriertransformierten für die Funktion g aus Teilaufgabe (a) und $x \in \mathbb{R}$.

Keine Abgabe.