Analysis einer Variablen
Lösungen zur Klausur vom 18.2.2017

F. Merkl

1. Gegeben sei eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine weitere Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1(a) Definieren Sie, wann f_n für $n \to \infty$ *punktweise* konvergent gegen f genannt wird. Schreiben Sie die Antwort als eine prädikatenlogischen Formel in das folgende Feld:

$$f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ punktweise} \quad :\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

1(b) Definieren Sie, wann f_n für $n \to \infty$ *gleichmäßig* konvergent gegen f genannt wird. Schreiben Sie die Antwort als eine prädikatenlogischen Formel in das folgende Feld:

$$f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ gleichmäßig} \quad :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m\ \forall x \in \mathbb{R} : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

1(c) Formulieren Sie die Negation der in der letzten Teilaufgabe angegebenen Formel mit einer prädikatenlogischen Formel, in der alle Quantoren zu Beginn stehen. Schreiben Sie die Antwort in das folgende Feld:

$$\neg[f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ gleichmäßig}] \quad \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \geq m\ \exists x \in \mathbb{R} : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

1(d) Nun sei speziell $f(x) = 1$ und $f_n(x) = \cos(x/n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass f_n *nicht* für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Achten Sie bei dem Beweis besonders auf eine logisch korrekte Darstellung.

Beweis:
Wir wählen $\varepsilon = 1$. Nun sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir wählen $n = m$ und $x = n\pi/2$. Dann folgt $|f_n(x) - f(x)| = |\cos(\pi/2) - 1| = |0 - 1| = 1 \geq \varepsilon$, also die Behauptung.

2. 2(a) Formulieren Sie die Formel für die geometrische Summe. Gemeint ist die *endliche* geometrische Summe, nicht die geometrische Reihe. Quantifizieren Sie auch alle dabei vorkommenden Variablen. Schreiben Sie die Antwort in das folgende Feld:

Geometrische Summe: $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : \ \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1}$.

2(b) Es bezeichnet i die imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$. Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - a\exp(2\pi i \frac{k}{n})} = \frac{1}{1 - a^n} \tag{1}$$

Beweis der Formel (1):
Für n und a wie angegeben folgt mit der geometrischen Reihe (konvergent, da $|a\exp(2\pi i \frac{k}{n})| < 1$ für $k \in \mathbb{N}_0$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - a\exp(2\pi i \frac{k}{n})} &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{\infty} a^l e^{2\pi i k l/n} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a^l e^{2\pi i k l/n} \end{aligned}$$

Sei $l \in \mathbb{N}_0$. Nun ist $\sum_{k=0}^{n-1} a^l e^{2\pi i k l/n} = n a^l$, falls $l = jn$ ein ganzzahliges Vielfaches von n ist. Andernfalls ist $e^{2\pi i l/n} \neq 1$ und damit mit der geometrischen Summe

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^l e^{2\pi i k l/n} = a^l \frac{e^{2\pi i l} - 1}{e^{2\pi i l/n} - 1} = 0.$$

Es folgt, nochmals mit der geometrischen Reihe:

$$\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a^l e^{2\pi i k l/n} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\infty} n a^{jn} = \frac{1}{1 - a^n},$$

also eingesetzt die Behauptung.

2(c) Berechnen Sie für gegebenes $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$ das untenstehende Integral I. Schreiben Sie das Ergebnis in möglichst vereinfachter Form in das folgende Feld:

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - ae^{ix}} = 2\pi \tag{2}$$

Hinweis: Eine mögliche Lösung verwendet die vorhergehende Teilaufgabe.

Begründung der Formel (2):
Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Abbildung

$$f : [0, 2\pi] \ni x \mapsto \frac{1}{1 - ae^{ix}}$$

konvergiert die Folge der Treppenfunktion $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$f_n(x) := \frac{1_{\{x=2\pi\}}}{1-a} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1_{\{2\pi k/n \le x < 2\pi(k+1)/n\}}}{1 - a\exp(2\pi i \frac{k}{n})}$$

für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen f. Es folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - ae^{ix}} &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x)\, dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - a\exp(2\pi i \frac{k}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{1 - a^n} \\ &= 2\pi, \end{aligned}$$

da $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ wegen $|a| < 1$.

3. 3(a) Definieren Sie für $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Aussage

$$\frac{1}{\sqrt{e^{2x} - e^x}} = ax^{-1/2} + bx^{1/2} + cx^{3/2} + O(x^{5/2}) \quad \text{für } x \downarrow 0. \tag{3}$$

Schreiben Sie die Antwort als eine prädikatenlogische Formel in das folgende Feld:
Aussage (3) :⇔

$$\exists \varepsilon > 0\ \exists C \in \mathbb{R}^+ \forall x \in]0, \varepsilon[: \left| \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - e^x}} - (ax^{-1/2} + bx^{1/2} + cx^{3/2}) \right| \le Cx^{5/2}$$

3(b) Berechnen Sie Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die Aussage (3) wahr wird. Bei der Rechnung dürfen Sie wahre Gleichungen für Grenzwerte und Landausymbole ohne Begründung verwenden. Schreiben Sie die Antworten in möglichst vereinfachter Form in die nachfolgenden Felder:

$$a = 1, \quad b = -\frac{3}{4}, \quad c = \frac{25}{96}. \tag{4}$$

Es gilt für $x \downarrow 0$:

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + O(x^4), \\ e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4), \end{aligned}$$

also

$$e^{2x} - e^x = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + O(x^4)$$

und daher

$$\frac{1}{\sqrt{e^{2x} - e^x}} = x^{-1/2} \left(1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{6}x^2 + O(x^3)\right)^{-1/2}$$

Nun gilt für $y \to 0$ mit der binomischen Reihe:

$$(1+y)^{-1/2} = 1 + \binom{-1/2}{1} y + \binom{-1/2}{2} y^2 + O(y^3) = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 + O(y^3)$$

Setzen wir hier $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{6}x^2 + O(x^3) \to 0$ für $x \downarrow 0$ ein:

$$\left(1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{6}x^2 + O(x^3)\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}x + \frac{7}{6}x^2 + O(x^3)\right] + \frac{3}{8}\left[\frac{3}{2}x + O(x^2)\right]^2 + O(x^3)$$
$$= 1 - \frac{3}{4}x + \frac{25}{96}x^2 + O(x^3)$$

wobei wir $-\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{3^2}{2^2} = -\frac{7 \cdot 8}{12 \cdot 8} + \frac{27 \cdot 3}{32 \cdot 3} = \frac{-56+81}{96} = \frac{25}{96}$ verwendet haben. Oben eingesetzt:

$$\frac{1}{\sqrt{e^{2x} - e^x}} = x^{-1/2} - \frac{3}{4}x^{1/2} + \frac{25}{96}x^{3/2} + O(x^{5/2})$$

4. 4(a) Geben Sie eine Abbildung $f : \mathbb{R}^+ \to]-1, 1[$ an, so dass sich jedes Integral der Gestalt

$$\int R\left(x, \sqrt{1 - x^2}\right) dx \tag{5}$$

mit einem in den Variablen x und y rationalen Term $R(x, y)$ durch die Substitution

$$x = f(t) \tag{6}$$

in ein Integral der Gestalt $\int Q(t)\, dt$ mit rationalem Integranden $Q(t)$ transformieren lässt. Geben Sie auch soweit wie möglich vereinfachte Formeln für $y = \sqrt{1 - f(t)^2}$ und für $\frac{dx}{dt} = f'(t)$ an. Schreiben Sie die Antworten in die folgenden Felder:

$$x = f(t) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad y = \sqrt{1 - f(t)^2} = \frac{2t}{1 + t^2},$$
$$\frac{dx}{dt} = f'(t) = -\frac{4t}{(1 + t^2)^2}. \tag{7}$$

Rechnungen oder Skizzen dazu:

Das ist die Eulersubstitution, die die Halbgerade $\{(0, t) | t > 0\}$ vom Punkt $(-1, 0)$ aus auf den Einheitshalbkreis oberhalb der x-Achse projiziert. In der Tat gilt für $t > 0$:

$$\frac{y}{1 + x} = \frac{2t}{(1 - t^2) + (1 + t^2)} = t$$

und

$$x^2 + y^2 = \frac{(1 - t^2)^2 + (2t)^2}{(1 + t^2)^2} = 1.$$

Weiter:

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left[-1 + \frac{2}{1 + t^2}\right] = -\frac{4t}{(1 + t^2)^2}.$$

4(b) Welchen Term $Q(t)$ erhalten Sie in der Situation der vorhergehenden Teilaufgabe im Spezialfall $R(x, y) = (2x - y + 2)^{-2}$? Schreiben Sie das Ergebnis als gekürzten Bruch $Q(t) = \frac{Z(t)}{N(t)}$ zweier Polynome Z und N in das folgende Feld:

$$Q(t) = \frac{-t}{(2 - t)^2} \tag{8}$$

Begründung der Formel (8):
Mit der Transformationsformel und x, y, dx/dt von der vorigen Teilaufgabe:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{\frac{dx}{dt}}{(2x - y + 2)^2} \\ &= \frac{\frac{-4t}{(1+t^2)^2}}{\left[2\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} + 2\right]^2} \\ &= \frac{-4t}{[2(1 - t^2) - 2t + 2(1 + t^2)]^2} \\ &= \frac{-t}{(2 - t)^2} \end{aligned}$$

4(c) Berechnen Sie das unten angegebene Integral. Schreiben Sie das Ergebnis soweit wie möglich vereinfacht in das nachfolgende Feld:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2x - \sqrt{1-x^2}+2)^2} = 1 - \log 2 \tag{9}$$

Begründung der Formel (9):
Wir arbeiten mit der Transformation aus den vorhergehenden Teilaufgaben. Transformation der Grenzen: $\lim_{t\downarrow 0} f(t) = 1$, $f(1) = 0$. Die Grenzen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ entsprechen daher den transformierten Grenzen $t_0 = 1$ und $t_1 = 0$. Es folgt:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{(2x - \sqrt{1-x^2}+2)^2} &= \int_1^0 \frac{-t}{(2-t)^2}\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{(t-2)+2}{(t-2)^2}\,dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{t-2} + \frac{2}{(t-2)^2}\right] dt \\ &= \left[\log(2-t) + \frac{2}{2-t}\right]_{t=0}^1 \\ &= 1 - \log 2\end{aligned}$$

5. Sie dürfen im Folgenden vorhergehende Teilaufgaben auch dann benutzen, wenn Sie diese nicht gelöst haben. Die Formelnummern am Rand sollen Ihnen das Zitieren erleichtern.

5(a) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, wobei die Differenzierbarkeit am Rand einseitig gemeint ist. Beweisen Sie:

$$\frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x-x^2)f''(x)\,dx \tag{10}$$

Beweis der Formel (10):
Mit zweimaliger partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^1 (x-x^2)f''(x)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(x-x^2)f'(x)\right]_{x=0}^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}-x\right) f'(x)\,dx \\ &= -\left[\left(\frac{1}{2}-x\right) f(x)\right]_{x=0}^1 - \int_0^1 f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \int_0^1 f(x)\,dx,\end{aligned}$$

wobei die Randterme bei der ersten partiellen Integration gleich 0 sind.

5(b) Nun sei zusätzlich $f'' \geq 0$. Beweisen Sie:

$$0 \leq \frac{1}{2}\int_0^1 (x-x^2)f''(x)\,dx \leq \frac{1}{8}[f'(1)-f'(0)] \tag{11}$$

Beweis der Formel (11):
Es git für $0 \leq x \leq 1$:

$$0 \leq \frac{1}{2}x(1-x) = \frac{1}{2}(x-x^2) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(x-x^2) \leq \frac{1}{8}$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit $f''(x) \geq 0$ und integrieren wir dann von 0 bis 1, folgt die Behauptung:

$$0 \leq \frac{1}{2}\int_0^1 (x-x^2)f''(x)\,dx \leq \frac{1}{8}\int_0^1 f''(x)\,dx = \frac{1}{8}[f'(1)-f'(0)],$$

wobei im letzten Schritt der Hauptsatz angewandt wurde.

5(c) Für $n \in \mathbb{N}$ sei gegeben:

$$a_n := \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n - \log(n!) \tag{12}$$

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \le a_{n+1} - a_n \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \tag{13}$$

Hinweis: Verwenden Sie die vorhergehenden Teilaufgaben im Spezialfall $f(x) = -\log(x+n)$.
Beweis der Formel (13):
Mit $f(x) = -\log(x+n)$, $f'(x) = -(x+n)^{-1}$ und $f''(x) = (x+n)^{-2} \ge 0$ für $0 \le x \le 1$ sind die beiden vorhergehenden Teilaufgaben anwendbar und liefern:

$$0 \le \frac{1}{2}[-\log n - \log(n+1)] + \int_0^1 \log(x+n)\, dx \le \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right]$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[-\log n - \log(n+1)] + \int_0^1 \log(x+n)\, dx \\
&= -\log(n+1) + \frac{1}{2}[\log(x+n)]_{x=0}^1 + [(x+n)\log(x+n) - (x+n)]_{x=0}^1 \\
&= -\log((n+1)!) + \log(n!) + \left[\left(x+n+\frac{1}{2}\right)\log(x+n) - (x+n)\right]_{x=0}^1 = a_{n+1} - a_n.
\end{aligned}$$

Setzen wir das oben ein, folgt die Behauptung.

5(d) Beweisen Sie induktiv für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \le m$:

$$0 \le a_m - a_n \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \tag{14}$$

mit der in Formel (12) definierten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Achten Sie beim Beweis besonders sorgfältig auf eine korrekte logische Darstellung, insbesondere bei der Wahl der Variable, über die die Induktion geführt wird, der Induktionsvoraussetzung, der Einführung freier Variablen und dem Umgang mit Quantoren.

Induktionsbeweis:
Wir schreiben die Behauptung in der folgenden Form:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0\ \forall m, n \in \mathbb{N} : \left[m - n = k \quad \Rightarrow \quad 0 \le a_m - a_n \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)\right]$$

Wir zeigen dies durch vollständige Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$.
Induktionsanfang, $k = 0$: Gegeben $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m - n = 0$ folgt $m = n$, also

$$0 = a_m - a_n = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right).$$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ gegeben, und es gelte

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : \left[m - n = k \quad \Rightarrow \quad 0 \le a_m - a_n \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)\right]$$

Induktionsschluss: Zu zeigen ist:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : \left[m - n = k+1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le a_m - a_n \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)\right]$$

Hierzu seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m - n = k + 1$ gegeben. Nun gilt

$$0 \le a_{n+1} - a_n \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

wegen Formel (13) und

$$0 \le a_m - a_{n+1} \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m}\right)$$

nach der Induktionsvoraussetzung wegen $m - (n+1) = k$. Durch Addition dieser beiden Ungleichungen folgt die Behauptung so:

$$\begin{aligned}
&0 \le (a_m - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_m - a_n \\
&\le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)
\end{aligned}$$

5(e) Geben Sie für reellwertige Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, wie die Aussage "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge" definiert ist. Schreiben Sie die Antwort als eine prädikatenlogische Formel in das folgende Feld:

$$\begin{aligned}
&(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchyfolge} \quad :\Leftrightarrow \\
&\forall \varepsilon > 0\ \exists l \in \mathbb{N}\ \forall m \ge l\ \forall n \ge l:\ |a_m - a_n| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

5(f) Beweisen Sie, dass die durch die Formel (12) in Teilaufgabe 5(c) definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Achten Sie auch hier besonders sorgfältig auf eine korrekte logische Darstellung, insbesondere bei der Einführung freier Variablen und dem Umgang mit Quantoren.

Beweis:
Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Mit dem archimedischen Axiom wählen wir $l \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{8l} < \varepsilon$ gilt. Nun seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \ge l$ und $n \ge l$ gegeben. Wir dürfen zusätzlich $m \ge n$ annehmen; andernfalls vertauschen wir m und n. Dann folgt

$$0 \le a_m - a_n \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \le \frac{1}{8n} \le \frac{1}{8l} < \varepsilon,$$

wegen Teilaufgabe 5(d), also die Behauptung:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

5(g) Beweisen Sie, dass die durch

$$b_n := \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} \tag{15}$$

definierte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Beweis:
Es gilt $b_n = \exp a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, konvergiert sie in $\mathbb{R}$. Weil die Exponentialfunktion stetig und daher folgenstetig ist, folgt hieraus auch die Konvergenz von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$.