LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 9 – Hausaufgaben

H9.1 *Aus der Probeklausur zur Analysis einer Variablen des Wintersemesters 2012/13:*

(a) Formulieren Sie den Satz von der dominierten Konvergenz für Reihen.

(b) Zeigen Sie die Existenz von

$$x = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n + \frac{k}{n} e^{-\frac{k}{n}}\right).$$

Berechnen Sie x.

H9.2 **Iteration einer stetigen Funktion.** Es sei $M \subseteq \mathbb{C}$ und $f : M \to M$ stetig. Wir wählen $x_0 \in M$ und setzen rekursiv $x_{n+1} = f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie: Konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen einen Punkt $x \in M$, dann gilt $f(x) = x$.

H9.3 **Das Lemma von Fatou für Reihen.**

(a) Es sei $(a_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}_0}$ eine Doppelfolge mit Werten in $[0, +\infty]$. Zeigen Sie:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \liminf_{i\to\infty} a_{n,i} \le \liminf_{i\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{n,i}$$

Hinweis: Betrachten Sie dazu die Doppelfolge $(\inf_{j\ge i} a_{n,j})_{n,i\in\mathbb{N}_0}$ und wenden Sie den Satz von der monotonen Konvergenz an.

(b) *Typische Anwendung des Lemmas von Fatou:* Es sei $(a_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}_0}$ eine Doppelfolge mit Werten in $\mathbb{C}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ der Grenzwert $b_n = \lim_{i\to\infty} a_{n,i}$ in $\mathbb{C}$ existiert. Zeigen Sie:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |b_n|^2 \le \liminf_{i\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} |a_{n,i}|^2 \le \sup_{i\in\mathbb{N}_0} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} |a_{n,i}|^2$$

(c) Zeigen Sie an Hand von je einem Beispiel, dass unter der Voraussetzung in (a) jede der drei folgenden Ungleichungen auftreten kann:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \liminf_{i\to\infty} a_{n,i} < \liminf_{i\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{n,i},$$
$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \limsup_{i\to\infty} a_{n,i} < \limsup_{i\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{n,i},$$
$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \limsup_{i\to\infty} a_{n,i} > \limsup_{i\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{n,i}.$$

Bitte wenden!

H9.4 **Änderung des Entwicklungspunkts bei Potenzreihen.** Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe in x mit komplexen Koeffizienten a_n und Konvergenzradius $r > 0$. Weiter seien $y, z \in \mathbb{C}$ mit $|y| + |z| < r$ gegeben. Beweisen Sie:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k+l}{k} |a_{k+l} y^l z^k| < \infty.$

(b) Folgern Sie, dass die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

in z mit den Koeffizienten

$$b_k := \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k+l}{k} a_{k+l} y^l$$

mindestens den Konvergenzradius $r - |y|$ besitzt, und dass für $x := y + z$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

H9.5* **Eulersche Produktdarstellung der Riemannschen Zetafunktion.** Es sei $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine bijektive Aufzählung aller Primzahlen, zum Beispiel die monotone Aufzählung $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, $p_6 = 13$, ... Es bezeichne $\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ die Menge aller Folgen $(v_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$, für die $v_j \neq 0$ für höchstens endlich viele $j \in \mathbb{N}$ gilt. In der elementaren Zahlentheorie wird der folgende Satz von der Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung bewiesen; er darf hier ohne Beweis verwendet werden:
Die Abbildung $\Pi : \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{N}$, $\Pi((v_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{v_j}$ *ist eine Bijektion.* [1]
Es sei $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$ gegeben.

(a) Zeigen Sie für alle $v = (v_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{\{n\in M_v\}}}{n^s} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 - p_j^{-(v_j+1)s}}{1 - p_j^{-s}},$$

wobei

$$M_v := \{\Pi(w) |\ w = (w_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})},\ \forall j \in \mathbb{N} : w_j \leq v_j\} = \{n \in \mathbb{N} |\ n \text{ ist Teiler von } \Pi(v)\}.$$

(b) Folgern Sie für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{\{n\in L_m\}}}{n^s} = \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1 - p_j^{-s}},$$

wobei

$$\begin{aligned} L_m &:= \{\Pi(v) |\ v = (v_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})},\ \forall j > m : v_j = 0\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} |\ n \text{ enthält höchstens die Primfaktoren } p_1, \ldots, p_m\}. \end{aligned}$$

(c) Beweisen Sie damit die folgende Eulersche Produktdarstellung der Riemannschen Zetafunktion:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_j^{-s}}$$

Hinweis: Der Satz von der monotonen Konvergenz für Reihen (oder auch der Satz von der dominierten Konvergenz für Reihen) kann Ihnen bei den letzten beiden Teilaufgaben helfen.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 20.12.2016, Abend.

[1] *Zur Notation:* $\prod_{j=1}^{\infty} \ldots$ ist eine Abkürzung für $\lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^{m} \ldots$. Die Primfaktorzerlegung ist dennoch eigentlich ein endliches Produkt, denn es treten nur endlich viele von 1 verschiedene Faktoren auf.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 9 – Tutorien und Zentralübung

T9.1 **Übung zum logischen Schließen mit Quantoren.** Beweisen Sie, dass für alle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ gilt:

$$(\forall\epsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}_0\ \forall n > m:\ |a_n| \leq \epsilon) \ \Rightarrow\ (\forall\epsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m:\ |a_n| < \epsilon)$$

T9.2 **Übung zur ϵ–δ–Definition der Stetigkeit.** Wenden Sie *direkt* die ϵ–δ–Definition der Stetigkeit in einem Punkt an, um zu zeigen, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{|x|}$$

stetig in 0 ist.

T9.3 **Die Riemannsche Zetafunktion.** Für gegebenes $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$ definieren wir

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Zeigen Sie, dass diese Reihe in $\mathbb{R}$ konvergiert.
Hinweis: Fassen Sie analog zum Beweis der Divergenz in $\mathbb{R}$ der harmonischen Reihe die Summanden jeweils in Blöcke von Zweierpotenzlänge zusammen. Schätzen Sie jede Blocksumme nach oben ab. Gültige Rechenregeln für Potenzen dürfen Sie dabei ohne Begründung verwenden. Die Funktion $\zeta :]1,\infty[\to \mathbb{R}$ wird *Riemannsche Zetafunktion* genannt. Sie spielt in der analytischen Zahlentheorie eine wichtige Rolle.

T9.4 **Numerische Berechnung der Eulerschen Zahl.** Berechnen Sie die Eulersche Zahl $e = \exp(1)$ näherungsweise mit einem Fehler vom Betrag kleiner als 10^{-6} – mit Beweis!