LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 8 – Hausaufgaben

H8.1 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n!}}.$$

H8.2 **Die Binomialreihe.** Beweisen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ und alle $a \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

konvergiert.
Bemerkung: Diese Reihe wird *Binomialreihe* genannt. Erst später beweisen wir, dass sie im Fall $x \in \mathbb{R}$, $-1 < x < 1$ gleich $(1+x)^a$ ist.

H8.3 *Aus der GOP-Nachklausur des Sommersemesters 2013:*
Gegeben seien zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{C}$, eine weitere Folge $(n(m))_{m\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{N}$, sowie $c \in \mathbb{C}$.

(a) Definieren Sie, wann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge genannt wird.
(b) Definieren Sie die Aussage $n(m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
(c) Definieren Sie die Aussage $\lim_{m\to\infty} b_m = c$. Notieren Sie ebenso die Definition der Aussage $\lim_{n\to\infty} a_n = c$. *Hinweis:* Das scheinbar redundante doppelte Aufschreiben der Konvergenzdefinition soll Ihnen bei der folgenden Teilaufgabe (d) helfen.
(d) Nun sei gegeben:
   i. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.
   ii. $n(m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   iii. $b_m = a_{n(m)}$ für alle $m \in \mathbb{N}$.
   iv. $\lim_{m\to\infty} b_m = c$.

   Beweisen Sie: $\lim_{n\to\infty} a_n = c$. Achten Sie dabei besonders auf eine logisch korrekte Darstellung des Beweises, insbesondere bei der Behandlung von Quantoren. Alle nicht quantifiziert auftretenden Variablen müssen vor der Verwendung eingeführt werden.

H8.4 **Das arithmetisch-geometrische Mittel.** Es seien $a_0 \geq b_0$ gegebene positive reelle Zahlen. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ seien simultan rekursiv durch das *arithmetische* bzw. *geometrische Mittel*

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}. \text{ für } n \in \mathbb{N}_0$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
(b) Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen den selben Grenzwert konvergieren.

H8.5 **Produkt zweier Potenzreihen.** Es seien $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r_1 und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r_2. Zeigen Sie, dass die Potenzreihe

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$$

mindestens den Konvergenzradius $\min\{r_1, r_2\}$ hat und dass für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < \min\{r_1, r_2\}$ gilt: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 13.12.2016, Abend.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 8 – Tutorien und Zentralübung

T8.1 Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}^+$ mit $\inf_{n\in\mathbb{N}_0} a_n = 0$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, und dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{2k+1}(-1)^n a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \leq \sum_{n=0}^{2k}(-1)^n a_n.$$

Zum Beispiel konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ in $\mathbb{R}$.

T8.2 Finden Sie eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit positivem Konvergenzradius $r > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < r$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{1}{1+x^2}$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius r dieser Reihe.

T8.3 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} 9^{-n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2(-1)^n}{2^{n-1}}$,

Berechnen Sie in c) die Summe, falls die Reihe konvergiert.

T8.4 **Exponentielles Wachstum ist schneller als alle Potenzen – alternativer Beweis.**
Zeigen Sie

$$\forall \lambda > 0 \; \forall k \in \mathbb{N}_0 : \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{\exp(\lambda n)} = 0.$$

Verwenden Sie dazu *nicht* die Aufgabe T6.1, sondern zeigen Sie zunächst $n^k \leq \frac{1}{n}\lambda^{-k-1}(k+1)!\exp(\lambda n)$ für $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$.