LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 7 – Hausaufgaben

H7.1 Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge mit Werten in $\mathbb{R}$. Es gelte

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen diesen Limes inferior und Limes superior konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden (vgl. Aufgabe T6.3):

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq m} a_n \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq m} a_n$$

H7.2 Es seien $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv durch $a_n = \frac{2}{5}a_{n-2} + \frac{3}{5}a_{n-1}$ für $n \geq 2$ definiert. Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

H7.3 Finden Sie eine absteigende Folge von rationalen Intervallen

$$I_n = \{x \in \mathbb{Q} |\ a_n \leq x \leq b_n\}$$

mit $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$, so dass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ leer ist.

H7.4 **Vertauschung von Limiten bei gleichmäßiger Konvergenz.** Eine Doppelfolge $(a_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}$ heißt in $n \in \mathbb{N}_0$ *gleichmäßig konvergent* für $m \to \infty$ gegen eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, wenn gilt:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}_0\ \forall n \in \mathbb{N}_0\ \forall m > k :\ |a_{m,n} - b_n| < \varepsilon.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $(a_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}_0}$ in $n \in \mathbb{N}_0$ gleichmäßig konvergent für $m \to \infty$ und existiert $\lim_{n\to\infty} a_{m,n}$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, so existiert sowohl $\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{m,n}$ als auch $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$, und es gilt

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{m,n}.$$

(b) Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel, dass

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{m,n} \neq \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$$

möglich ist, wenn die Voraussetzung *gleichmäßiger* Konvergenz weggelassen wird, auch wenn beide Doppellimiten existieren.

H7.5 Berechnen Sie (mit Beweis):

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 2^{-k}.$$

Hinweis: Die Rekursionsformel für $\sum_{k=0}^{m} k^n x^k$, $x \neq 1$, aus der Zentralübung kann Ihnen dabei helfen.

Bitte wenden!

Mit den Aufgaben H7.6 und H7.7 soll nochmal der Umgang mit dem Summenzeichen geübt werden.

H7.6 **Partielle Summation.** Es seien Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Werten in $\mathbb{C}$ gegeben.
Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(b_k - b_{k-1}) = a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)b_k$$

Bemerkung: Das ist eine diskrete Variante der Formel zur partiellen Integration, die später behandelt wird.

H7.7 **Unitarität der diskreten Fouriertransformation.** Gegeben sei $n \in \mathbb{N}$. Das *Standardskalarprodukt* auf $\mathbb{C}^n$ wird durch

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},$$
$$\langle a, b\rangle := \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a_k} b_k$$

für $a = (a_k)_{k=0,\dots,n-1} \in \mathbb{C}^n$ und $b = (b_k)_{k=0,\dots,n-1} \in \mathbb{C}^n$ definiert. Weiter wird die *diskrete Fouriertransformation* $\mathcal{F} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ durch $\mathcal{F}(a) = (\hat{a}_k)_{k=0,\dots,n-1}$ definiert, wobei

$$\hat{a}_k := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=0}^{n-1} \overline{\omega_n^{kl}} a_l$$

mit der n-ten Einheitswurzel $\omega_n = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$. Beweisen Sie:

(a) **Invarianz des Skalarprodukts.** Für alle $a, b \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$$\langle\mathcal{F}(a), \mathcal{F}(b)\rangle = \langle a, b\rangle$$

(b) **Diskrete Fourierumkehrformel.** Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ist bijektiv mit der Inversen $\mathcal{F}^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $\mathcal{F}^{-1}((\hat{a}_k)_{k=0,\dots,n-1}) = (a_l)_{l=0,\dots,n-1}$, wobei

$$a_l = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kl} \hat{a}_k.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Orthogonalitätsrelationen für die Einheitswurzeln aus Aufgabe T4.4.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 6.12.2016, Abend.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 7 – Tutorien und Zentralübung

T7.1 Am Mittag (Zeit $t_0 = 12\,\mathrm{h}$) stehen der große und der kleine Zeiger der Uhr übereinander. Eine Stunde später (Zeit $t_1 = 13\,\mathrm{h}$) hat der große Zeiger eine Volldrehung durchgeführt, der kleine Zeiger jedoch nur eine $\frac{1}{12}$-Drehung. Fünf Minuten später (Zeit $t_2 = 13\,\mathrm{h} + 5\,\mathrm{min}$) hat der große Zeiger auch diese $\frac{1}{12}$-Drehung aufgeholt, der kleine Zeiger ist jedoch noch ein kleines Stück vorwärts gewandert. Allgemein sei t_n für $n \in \mathbb{N}$ der erste Zeitpunkt nach dem Zeitpunkt t_{n-1}, zu dem der große Zeiger wieder die Stelle erreicht, an der der kleine Zeiger zur Zeit t_{n-1} war.

(a) Geben Sie eine Rekursionsformel für t_n an.

(b) Leiten Sie daraus eine nicht rekursive Formel für t_n her.

(c) Beweisen Sie, dass die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, und berechnen Sie $T := \lim_{n\to\infty} t_n$. Geben Sie das Ergebnis sowohl in Stunden als auch in der Form $T = x\,\mathrm{h} + y\,\mathrm{min} + z\,\mathrm{sec}$ mit $x \in \mathbb{N}_0$, $y \in \{0, 1, \dots, 59\}$ und $0 \le z < 60$ an.

(d) Beweisen Sie, dass großer und kleiner Zeiger zur Zeit T übereinander stehen.

T7.2 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^{\mathbb{N}_0}$ heißt in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvergent gegen $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, in Zeichen $\lim_{n\to\infty} a_n = x$, wenn für jede in $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ offene Umgebung U von x ein $m \in \mathbb{N}_0$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n > m$ gilt: $a_n \in U$. Beweisen Sie: Jede monoton steigende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ konvergiert in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Mit den Aufgaben T7.3 und T7.4 soll nochmal der Umgang mit dem Summenzeichen geübt werden.

T7.3 **Vorwärts und rückwärts summieren.** Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ und $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Beweisen Sie:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k + a_{n-k+1}).$$

Bemerkung: Eine bekannte Geschichte berichtet, dass Carl Friedrich Gauß schon als Grundschüler diese Formel entdeckt und damit $1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$ sehr schnell ausgerechnet hat.

T7.4 **Produkt von Polynomen.** Gegeben seien $n \in \mathbb{N}_0$ und komplexwertige Folgen $(a_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_m = b_m = 0$ für $m > n$. Weiter definieren wir für $m \in \mathbb{N}_0$:

$$c_m := \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}$$

Beweisen Sie für alle $x \in \mathbb{C}$:

$$\left(\sum_{m=0}^{n} a_m x^m\right)\left(\sum_{m=0}^{n} b_m x^m\right) = \sum_{m=0}^{2n} c_m x^m$$