LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 6 – Hausaufgaben

H6.1 *Aus der GOP des Wintersemesters 2012/13:*

(a) Definieren Sie für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen und $b \in \mathbb{C}$ die Aussage

$$a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b.$$

Hinweis: Die Begriffe "Konvergenz", "Grenzwert" oder "Limes" sollen hier nicht als bekannt vorausgesetzt werden.

(b) Nun seien

$$a_n = \frac{\sqrt{n} - i}{\sqrt{n} + i}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $b = 1$ gegeben. Beweisen Sie hierfür die Aussage $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ *direkt mit der Definition aus (a).* Achten Sie dabei besonders auf eine logisch korrekte Darstellung des Beweises. *Hinweis:* Es bedeutet i die imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$.

H6.2 $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ **ist nicht kompakt.** Geben Sie explizit eine offene Überdeckung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ an, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt (mit Beweis).

H6.3 **Bisektionsverfahren zur Berechnung von $\sqrt{2}$.** Wir definieren rekursiv eine Folge von ineinander geschachtelten, immer kürzer werdenden Intervallen $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$: Wir fangen an mit $[a_0, b_0] := [1, 2]$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei c_n der Mittelpunkt von $[a_n, b_n]$. Ist $c_n^2 \geq 2$, so setzen wir $[a_{n+1}, b_{n+1}] := [a_n, c_n]$; andernfalls $[a_{n+1}, b_{n+1}] := [c_n, b_n]$. Zeigen Sie:

(a) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = \{\sqrt{2}\}$

(b) Bestimmen Sie ein n, sodass $|a_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{1000}$, und berechnen Sie a_n für dieses n, z.B. mit dem Taschenrechner (Taschenrechnergenauigkeit genügt).

H6.4 **Das Heron-Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln.** Gegeben $a, b \in \mathbb{R}^+$, definieren wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}^+$ rekursiv wie folgt:

$$x_0 := b, \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \text{ für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Weiter sei $\Delta_n := x_n - \sqrt{a}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\Delta_{n+1} = \dfrac{\Delta_n^2}{2x_n}$.

(b) Folgern Sie $\Delta_n \geq 0$, $\Delta_{n+1} \leq \frac{1}{2}\Delta_n$ und $\Delta_{n+1} \leq \frac{\Delta_n^2}{2\sqrt{a}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Falls $\Delta_0 \geq 0$, gelten die Schranken auch für $n = 0$.)

(c) Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

(d) Nun sei speziell $a = b = 2$. Verwenden Sie die Schranke $0 \leq \Delta_0 \leq 1$, also $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ zusammen mit den Schranken aus Teilaufgabe (b), um ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\Delta_n < 10^{-6}$ explizit anzugeben. Berechnen Sie x_n für dieses n explizit, z. B. mit dem Taschenrechner (Taschenrechnergenauigkeit genügt).

Bitte wenden!

H6.5 *Aus der Klausur zur Analysis 1 des Wintersemesters 2004/05, minimal variiert:*

(a) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Definieren Sie die Aussage „M ist kompakt“. *Hinweis:* Gefragt ist die *Definition* der Kompaktheit, nicht etwa eine äquivalente Charakterisierung.

(b) Wenden Sie *direkt* diese Definition an (nicht etwa eine äquivalente Charakterisierung der Kompaktheit), um zu zeigen, dass

$$M = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

kompakt ist.

H6.6* Zeigen Sie: Für jede Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von dichten, offenen Mengen $U_n \subseteq \mathbb{R}$ ist

$$V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

eine nichtleere Menge.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 29.11.2016, Abend.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 6 – Tutorien und Zentralübung

T6.1 Beweisen Sie für alle $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$:

$$n^k a^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

T6.2 *Aus der GOP-Nachholklausur des Sommersemesters 2013:*
Gegeben seien eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{C}$ und eine Zahl $b \in \mathbb{C}$.

(a) Definieren Sie, wann b ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genannt wird.

(b) Nun sei

$$a_n = 2^{-n/2}(1+i)^n \frac{1+n}{n} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

gegeben. Beweisen Sie, dass die imaginäre Einheit i ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Achten Sie dabei besonders auf eine logisch korrekte Darstellung des Beweises.

T6.3 Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq m} a_n$$

(Zur Schreibweise: Das Infimum einer Folge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ bezeichnet man oft mit $\inf_{m\in\mathbb{N}} b_m$ statt mit $\inf\{b_m |\ m \in \mathbb{N}\}$. Weiter steht $\sup_{n\geq m} a_n$ für $\sup\{a_n |\ n \geq m\}$.)

T6.4 Zeigen Sie

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{n+1}} \sum_{l=0}^{k-1} l^n = \frac{1}{n+1}$$

(a) für $n = 2$,

(b*) oder allgemeiner für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe H2.5.