LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 5 – Hausaufgaben

H5.1 Lesen und verstehen Sie den Text "Wichtige Hinweise zum Beweisen und Rechnen bei Übungsaufgaben und Klausuraufgaben" (siehe folgende Seite). Berücksichtigen Sie ihn in Ihrem gesamten Studium, insbesondere bei der GOP.

H5.2 Gegeben seien zwei Zahlen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}$ und die Menge $H = \{z \in \mathbb{C} | \ \mathrm{Re}(z\overline{w}) > a\}$.

(a) Veranschaulichen Sie sich die Menge H durch eine Skizze in der komplexen Ebene.

(b) Beweisen Sie, dass die Menge H offen in $\mathbb{C}$ ist.

H5.3 Es seien $M \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Der Punkt x ist genau dann ein innerer Punkt von M, wenn M eine offene Umgebung von x enthält.

(b) Der Punkt x ist genau dann ein Berührpunkt von M, wenn jede offene Umgebung von x auch M trifft.

(c) Der Punkt x ist genau dann ein Randpunkt von M, wenn jede offene Umgebung von x sowohl M als auch $\mathbb{R} \setminus M$ trifft.

H5.4 Es sei $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Zeigen Sie, dass $\partial B = S^1$ gilt.

H5.5 Es sei $V \subseteq \mathbb{C}$. Beweisen Sie:

(a) V ist offen $\Leftrightarrow V \cap \partial V = \emptyset$

(b) V ist abgeschlossen $\Leftrightarrow \partial V \subseteq V$

(c) ∂V ist abgeschlossen.

H5.6 Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge reeller Zahlen, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Zeigen Sie: $A = \mathbb{R}$ oder $A = \emptyset$. *Hinweis:* Verwenden Sie das Vollständigkeitsaxiom.
Bemerkung: Man sagt für die hier gezeigte Aussage auch: *Der Raum* $\mathbb{R}$ *ist zusammenhängend.*

H5.7 **Kehrwertabbildung in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.** Es sei $k : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $k(z) := 1/z$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k(0) := \infty$, $k(\infty) := 0$. Beweisen Sie für alle $A \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, dass A genau dann offen in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist, wenn ihr Bild $k[A]$ offen in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 22.11.2016, Abend.

Wichtige Hinweise zum Beweisen und Rechnen bei Übungsaufgaben und Klausuraufgaben

"Man könnte den ganzen Sinn des Buches etwa in die Worte fassen: Was sich überhaupt sagen läßt, läßt sich klar sagen; und wovon man nicht reden kann, darüber muß man schweigen."
(zitiert aus dem Vorwort zum "Tractatus logico-philosophicus" von Ludwig Wittgenstein)

Der folgende Text soll Ihnen Hinweise geben, wie Sie sehr häufige Anfängerfehler beim Beweisen und Rechnen vermeiden können. Die Berücksichtigung dieser Hinweise hilft Ihnen nicht nur bei der GOP, sondern bei Ihrem gesamten weiteren Mathematikstudium!

- **Präzise und klare Argumentation in ganzen deutschen Sätzen.** Beweise bestehen aus logisch argumentierenden *vollständigen deutschen Sätzen*, die mit mathematischen Formeln angereichert sind.

  Eine bloße Aneinanderreihung von Formeln ist kein Beweis.

  Falsche Logik oder gar fehlende logische Argumentationen sind schwere Fehler; sie führen in der Klausur zu hohem Punktabzug, in schweren Fällen sogar zum Totalverlust aller Punkte der betroffenen Aufgabe. Argumentieren Sie also präzise und klar! Wenn Sie zum Beispiel beim Induktionsbeweis einer Aussage $\forall n \in \mathbb{N}: \varphi(n)$ im Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n+1$ bei gegebenem n nicht nur $\varphi(n)$, sondern auch $\varphi(n-1)$ verwenden wollen, reicht $\varphi(n)$ als Induktionsvoraussetzung nicht aus. Die Induktionsvoraussetzung sollte dann zum Beispiel auf $\forall m \in \mathbb{N}: (m \leq n \Rightarrow \varphi(m))$ erweitert werden.

- **Bewusstsein über das sich verändernde Beweisziel.** Seien Sie sich beim Beweisen bewusst, was an jeder Stelle das momentante Beweisziel, "die Behauptung", ist. Sie sollen dies an wichtigen Stellen im Beweis dokumentieren, z.B. im Stil: "Zu zeigen ist hier: ⟨*Aussage*⟩" oder "Noch zu zeigen: ⟨*Aussage*⟩" oder "Wir zeigen nun: ⟨*Zwischenbehauptung*⟩". Das Beweisziel ändert sich im Verlauf des Beweises so lange, bis nichts mehr davon übrig ist. Machen Sie sich bewusst, durch welche logischen Schlüsse sich das Beweisziel geändert hat, zum Beispiel durch die Verwendung verschiedener (aussagenlogischer oder prädikatenlogischer) Herleitungsregeln. Dokumentieren Sie diese logische Struktur des Beweises. Markieren Sie das Beweisende, z.B. mit den Worten "Das war zu zeigen" oder kurz z.B. mit "□" oder klassisch mit "q.e.d." ("quod erat demonstrandum").

- **Bewusstsein und Dokumentation zu gegebenen Aussagen.** Die Liste der *gegebenen Aussagen* ändert sich im Beweisverlauf ebenfalls ständig. Machen Sie sich auch bewusst, welche relevanten Aussagen an der jeweiligen Stelle im Beweis gegeben sind, sei es durch Voraussetzungen, durch Annahmen in den vorhergehenden Beweisteilen oder durch bereits bewiesene Zwischenbehauptungen. An wichtigen Stellen sollen Sie das auch im Beweistext dokumentieren, z.B. mit den Worten "Wegen ⟨*Formelnummer*⟩ wissen wir ⟨*Aussage*⟩" oder "Gegeben ist ⟨*Aussage*⟩" oder "Damit ist ⟨*Aussage*⟩ gezeigt". Besonders wichtig sind solche Dokumentationen am Beweisanfang, am Beweisende und bei Zäsuren im Beweis, an denen Aussagen als neu gegeben hinzukommen, zum Beispiel durch die *Einführung von Annahmen*. Die Einführung einer Annahme können Sie z.B. mit den Worten "Wir nehmen an: ⟨*Aussage*⟩" oder "Es gelte ⟨*Aussage*⟩" (Konjunktiv!) dokumentieren. Sie können wichtige Aussagen durch Markierungen, z.B. Formelnummern oder "$(*)$", kennzeichnen, um sie später leichter zitieren zu können.

- **Bewusstsein und Dokumentation zu gegebenen Objekten.** Auch die Liste der *gegebenen Objekte* (meist dargestellt durch Variable) ändert sich im Beweisverlauf ständig. Seien Sie sich darüber bewusst, welche Variablen an der jeweiligen Beweisstelle gegeben sind! Die Einführung neuer Variablen muss dokumentiert werden, z.B. mit den Worten: "Es sei ⟨*Variable*⟩ mit ⟨*Typspezifikation*⟩ gegeben" (z.B. zur Entfernung eines Allquantors aus dem Beweisziel). Klassisches Beispiel hierzu: "Es sei $\epsilon > 0$ gegeben" oder stark verkürzt: "Sei $\epsilon > 0$". Die Einführung einer Variablen kann auch mit den folgenden Worten geschehen: "Wir wählen ⟨*Variable*⟩ := ⟨*Term*⟩" (z.B. zur Entfernung eines Existenzquantors aus dem Beweisziel); klassisches Beispiel: "Wir wählen $\delta := \ldots$". Neue Variablen tauchen auch bei der Verwendung einer gegebenen Existenzaussage auf, z.B. mit den Worten: "Wegen ⟨*gegebene Existenzaussage*⟩ finden wir ein ⟨*Variable*⟩ [evtl: ⟨*Typangabe*⟩] mit ⟨*Spezifikation*⟩."

  Nicht als gegeben eingeführte Variable müssen *gebunden* werden.

  Die Bindung von Variablen geschieht meist mit Quantoren (oder gleichbedeutenden Worten). Sehr häufig braucht man hier die Allquantifizierung: "Es gilt $\phi(x)$ für alle x mit ⟨*Typangabe*⟩" oder auch

"$\forall x \langle \textit{Typangabe} \rangle: \ \phi(x)$", sehr stark verkürzt manchmal auch nur z.B. "Es gilt $\phi(k)$, $k = 1, \ldots, n$" als Abkürzung für "Es gilt $\phi(k)$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$". Eine Existenzquantifizierung kann ebenfalls abgekürzt geschrieben werden, zum Beispiel "Es gilt $\phi(k)$ für geeignetes $k = 1, \ldots, n$" als Abkürzung für "Es existiert ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\phi(k)$". Auch manche anderen Symbole *binden* Variablen. Zum Beispiel ist die Variable k im Term $\sum_{k=1}^n f(k)$ gebunden, die Variablen n und das Funktionssymbol f sind jedoch darin frei. Ebenso ist die Variable x im Term $\int_a^b f(x)\,dx$ gebunden, die Variablen a und b und die Funktionsvariable f sind jedoch darin frei. Auch die Mengennotation bindet Variablen: Zum Beispiel ist die Variable x im Mengenterm $\{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\}$ gebunden; die Variablen a und b sind jedoch darin frei.

Nicht eingeführte freie Variablen sind ein sehr häufiger schwerer Anfängerfehler.

Wenn Sie zum Beispiel eine Aussage der Gestalt $\forall n, m \in \mathbb{N}: \ \varphi(n, m)$ durch Induktion über n beweisen wollen, kann die Induktionsvoraussetzung zum Induktionsschritt $n \leadsto n+1$ bei gegebenem n nur dann $\varphi(n, m)$ lauten, wenn eine Zahl m an dieser Beweisstelle schon gegeben ist; in diesem Fall hat man aber zum Beispiel $\varphi(n, m+1)$ nicht aus der Induktionsvoraussetzung zur Verfügung. Ist die Zahl m nicht schon gegeben, könnte man statt dessen zum Beispiel die Induktionsvoraussetzung $\forall m \in \mathbb{N}: \ \varphi(n, m)$ wählen, bei der die Variable *m gebunden* ist; allerdings muss man dann im Induktionsschritt auch $\forall m \in \mathbb{N}: \ \varphi(n+1, m)$ zeigen.

- **Seien Sie kritisch gegenüber Ihren eigenen Rechnungen!** Führen Sie laufend Konsistenzchecks aus: Prüfen Sie zum Beispiel einfache Spezialfälle (z.B. Variablen gleich 0 oder 1 einsetzen, wenn sinnvoll); überlegen Sie sich zum Beispiel in Gedanken, ob das asymptotische Verhalten richtig sein kann. Veranschaulichen Sie sich das Rechenergebnis wenn möglich, z.B. mit geometrischer Anschauung oder mit einer Skizze, und prüfen Sie, ob das Ergebnis konsistent mit Ihrer anschaulichen Erwartung ist. Auch in der Klausur ist das keine verschwendete Zeit! Auf diese Weise kann man nämlich die meisten Rechenfehler schon früh entdecken. Manchmal sieht man in Klausurbearbeitungen schon am Beginn der Rechnung eine Folge von Rechenfehlern, die den Sinn der Aufgabe völlig entstellen, die aber mit einfachen Konsistenzchecks leicht zu finden gewesen wären. Manchmal führen solche Fehler in der Klausur leider zu seitenlangen sinnlosen Rechnungen, die 0 Punkte wert sind, aber viel wertvolle Zeit verschwenden.

- **Verwenden Sie Funktionen und Relationen nicht außerhalb ihres Definitionsbereichs!** Klassische Fehler sind zum Beispiel: Division durch 0 oder Verwendung der $<$-Relation für nichtreelle komplexe Zahlen, wofür sie nicht definiert ist.

- **Erfinden Sie keine falschen Rechenregeln!** Brüche werden addiert, indem man sie durch Erweitern auf einen gemeinsamen Nenner bringt und dann die Zähler addiert, und nicht etwa, indem man jeweils Zähler und Nenner addiert. Transzendente Funktionen wie sin, cos, log und exp sind nicht linear; außer in seltenen Ausnahmen gilt also z.B. $\sin(x+y) \neq \sin x + \sin y$ für reelle x, y. Ebenso gilt bis auf seltene Ausnahmen $e^{ab} \neq e^a e^b$ für komplexe Zahlen a und b. Lassen Sie nicht einfach "lästige" Terme in Rechenregeln weg! Zum Beispiel darf man bei der Transformationsformel für Integrale nicht einfach eine "lästige" innere Ableitung der Transformation weglassen. Solche schweren Anfängerfehler führen nicht selten zu 0 Punkten bei der betroffenen Klausuraufgabe.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 5 – Tutorien und Zentralübung

T5.1 Es sei $\overline{M}$ der Abschluss einer Teilmenge M in $\mathbb{R}$ bzw. in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\overline{M}$ eine abgeschlossene Menge ist.

T5.2 Es seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ und U offen.

(a) Beweisen Sie: $U \cap \overline{V} \subseteq \overline{U \cap V}$.

(b) Zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, dass die Voraussetzung "U offen" nötig ist.

T5.3 Beweisen Sie, dass die Menge

$$M := \left\{ \frac{1}{n} \middle| \; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

abgeschlossen ist.

T5.4 Beweisen Sie, dass das Mengensystem der in $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ offenen Mengen eine Topologie bildet.

T5.5 Zeigen Sie, dass die Menge der abbrechenden Dezimalbrüche

$$D = \{10^{-n}k | \; k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}_0\}$$

dicht in $\mathbb{R}$ ist, d.h. dass $\overline{D} = \mathbb{R}$ gilt.