LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 4 – Hausaufgaben

Es bezeichnet $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit.

H4.1 **Die Menge der komplexen Zahlen ohne 0 als multiplikative abelsche Gruppe.** *Bei dieser Aufgabe soll nicht die Standardnotation $a + ib \in \mathbb{C}$ für komplexe Zahlen verwendet werden, sondern noch die Paarnotation $(a, b) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.*
In der Vorlesung wurde bemerkt, dass die Menge der komplexen Zahlen mit den Operationen + und $\cdot$ einen Körper bildet. Beweisen Sie als Teil davon, dass $(\mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe bildet, wobei die Multiplikation von $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ durch

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

definiert ist. Zeigen Sie also:

(a) *Richtiger Zielbereich:* Für alle $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ ist $(a, b) \cdot (c, d) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$.

(b) *Assoziativität:* Für alle $z, w, v \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ gilt $(z \cdot w) \cdot v = z \cdot (w \cdot v)$.

(c) *Linksneutrales Element:* Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ gilt $(1, 0) \cdot z = z$.

(d) *Linksinverse:* Für alle $z = (a, b) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ ist $w := (a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2)) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ ein linksinverses Element bezüglich der Multiplikation: $w \cdot z = (1, 0)$.

(e) *Kommutativität:* Für alle $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ gilt $z \cdot w = w \cdot z$.

H4.2 **Der Satz von Thales.** Gegeben sei die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = i\frac{z+1}{z-1}$$

Weiter bezeichne $S^1 = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$ den Einheitskreis in der komplexen Ebene.

(a) Beweisen Sie für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ die folgende Äquivalenz:

$$z \in S^1 \setminus \{1\} \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}.$$

(b) Interpretieren Sie die eben bewiesene Aussage geometrisch als Satz von Thales: Ein Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ bildet zusammen mit 1 und -1 genau dann ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei z, wenn z auf dem Einheitskreis liegt.

H4.3 **Darstellung komplexer Quadratwurzeln mittels reeller Quadratwurzeln.** Es sei $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es genau zwei Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $w^2 = z$ gibt. Drücken Sie Real- und Imaginärteil dieser "komplexen Quadratwurzeln" von z mittels reeller arithmetischer Operationen und reeller Quadratwurzelbildung in Abhängigkeit von a und b aus. Unterscheiden Sie wenn nötig mehrere Fälle.

H4.4 **Stereographische Projektion.** Wir betrachten die Ebene

$$E = \{(a, b, 0) |\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

und die Kugeloberfläche

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

im Raum $\mathbb{R}^3$. Der Punkt $N = (0, 0, 1) \in S^2$ bezeichne den "Nordpol". Gegeben ein Punkt $P = (a, b, 0) \in E$, sei PN die Gerade durch P und N; sie wird durch

$$PN = \{(1 - t)N + tP |\ t \in \mathbb{R}\}$$

parametrisiert. Die stereographische Projektion $f(a + ib)$ von $a + ib \in \mathbb{C}$ ist der von N verschiedene Schnittpunkt der Geraden PN mit der Kugel S^2. Weiter setzen wir $f(\infty) = N$.

(a) Beweisen Sie die in der Vorlesung angegebene Formel für $f(a+ib)$, indem Sie alle $t \in \mathbb{R}$ mit $(1-t)N + tP \in S^2$ bestimmen.

(b) Geben Sie (mit Beweis) die Umkehrabbildung $f^{-1} : S^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ der stereographischen Projektion $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to S^2$ explizit an.

H4.5 **Unendlich ferne Punkte zu einer Hyperbel.** Gegeben seien der Kegel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y^2 = x^2 + z^2\},$$

die Hyperbel

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y^2 = x^2 + 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y, 1) \in K\}$$

Für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ bezeichne

$$\mathbb{R}(x, y, z) = \{(tx, ty, tz) |\ t \in \mathbb{R}\}$$

die Gerade durch (x, y, z) und den Nullpunkt $(0, 0, 0)$. Weiter sei

$$G := \{\mathbb{R}(x, y, z) |\ (x, y, z) \in K,\ (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$$

die Menge aller Geraden durch den Nullpunkt, die im Kegel K liegen. Wir erweitern die Hyperbel H um zwei verschiedene neue Punkte ∞_+ und ∞_-, die man sich "unendlich fern" in Richtung der Asymptoten $\{(x, \pm x) |\ x \in \mathbb{R}\}$ von H vorstellen soll.

(a) Veranschaulichen Sie sich die Hyperbel H durch eine Graphik in der x-y-Ebene. Veranschaulichen Sie sich auch den Kegel K, die Ebene $E = \{(x, y, 1) |\ x, y \in \mathbb{R}\}$, den Kegelschnitt $K \cap E = \{(x, y, 1) |\ (x, y) \in H\}$ und die beiden Geraden $\mathbb{R}(1, \pm 1, 0) \in G$ in einer dreidimensionalen Skizze.

(b) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : H \cup \{\infty_+, \infty_-\} &\to G, \\ f(x, y) &:= \mathbb{R}(x, y, 1) \text{ für } (x, y) \in H, \\ f(\infty_\pm) &:= \mathbb{R}(1, \pm 1, 0) \end{aligned}$$

ist eine Bijektion.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 15.11.2016, Abend.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 4 – Tutorien und Zentralübung

Es bezeichnet $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit.

T4.1 **Rechnungen mit komplexen Zahlen.** Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{1}{i}, \quad z_2 = (1+i)^8, \quad z_3 = \frac{1+i}{1-i}, \quad \text{und} \quad z_4 = \sum_{n=1}^{6} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)^n$$

(a) direkt in der Darstellung mit Real- und Imaginärteil,

(b) unter Verwendung der Polardarstellung.

Veranschaulichen Sie sich die Rechnungen auch graphisch in der komplexen Ebene.

T4.2 **Polynomdivision im Raum $\mathbb{C}[x]$ der Polynome über $\mathbb{C}$.** Ein *Polynom* in einer Variablen x mit komplexen Koeffizienten ist ein Ausdruck der Gestalt

$$p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, wobei alle a_k komplexe Zahlen sein sollen.[1] Ist $a_n \neq 0$, so nennt man n den Grad des Polynoms p, in Zeichen $\deg p = n$. (Für das Nullpolynom 0, dessen Koeffizienten a_k alle gleich 0 sind, definiert man $\deg 0 := -\infty$.) Es bezeichne $\mathbb{C}[x]$ die Menge aller Polynome in x mit komplexen Koeffizienten.

(a) Zeigen Sie: $\forall a, b \in \mathbb{C}[x] : \; [\deg a \geq \deg b \geq 0 \; \Rightarrow \; \exists z \in \mathbb{C} : \; \deg(a - z x^{\deg a - \deg b} b) < \deg a]$

(b) Folgern Sie induktiv: $\forall a, b \in \mathbb{C}[x] : \; [\deg b \geq 0 \; \Rightarrow \; \exists q \in \mathbb{C}[x] : \deg(a - qb) < \deg b]$

(c) Nun sei speziell $a = x^6 - ix^5$ und $b = x^3 - 2ix^2 + x + (1-i)$ gegeben. Finden Sie Polynome $q, r \in \mathbb{C}[x]$ mit $r = a - qb$ und $\deg r < 3$. *Hinweis:* Eine an die schriftliche Division von Dezimalzahlen angelehnte Notation hilft, die Rechnung übersichtlich darzustellen.

(d) *Spezialfall: Abspalten von Linearfaktoren.* Es sei $p \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $\deg p \geq 1$ gegeben. Weiter sei $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, das heißt p erhält den Wert $p(z) = 0$, wenn man die komplexe Zahl z für die Variable x einsetzt. Zeigen Sie, dass es ein Polynom q mit $p = (x - z)q$ gibt.

(e) Spalten Sie den Linearfaktor $x - i$ von dem Polynom $p = x^4 - (1+2i)x^3 + (i-2)x^2 + 2ix + 1$ ab.

(f) *Linearfaktorzerlegung durch iteriertes Abspalten von Linearfaktoren.* Finden Sie eine Linearfaktorzerlegung $p = \prod_{k=1}^{4}(x - a_k)$ des Polynoms $p = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 \in \mathbb{C}[x]$. *Hinweis:* $p(i) = 0$, und mit jeder Nullstelle a_k von p ist auch das konjugiert Komplexe $\overline{a_k}$ eine Nullstelle, da p nur reelle Koeffizienten besitzt.

T4.3 **Euler-Substitutionen als Variante der stereographischen Projektion.** Es sei

$$S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \; x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

der Einheitskreis, $P = (p_1, p_2) \in S^1$ ein fixierter Punkt darauf und

$$g = QR := \{tQ + (1-t)R | \; t \in \mathbb{R}\}$$

[1] Wer möchte, kann sich ein Polynom p als Abbildung vom Typ $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto p(z)$ vorstellen. In der Algebra fasst man Polynome eher als formale Ausdrücke auf: $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}^{(\mathbb{N}_0)} := \{(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} | \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall k > n : \; a_k = 0\}$, indem man $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ der Koeffizienten identifiziert, wobei $a_k = 0$ für $k > n$ gesetzt sei. Addition und Multiplikation von Polynomen werden dann so definiert:

$$(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} + (b_k)_{k\in\mathbb{N}_0} := (a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}, \quad (a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \cdot (b_k)_{k\in\mathbb{N}_0} := \left(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} \right)_{k\in\mathbb{N}_0}, \quad z \cdot (a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} := (z a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \text{ für } z \in \mathbb{C}$$

die Gerade durch zwei verschiedene gegebene Punkte $Q = (q_1, q_2)$ und $R = (r_1, r_2)$ in $\mathbb{R}^2$. Wir nehmen $P \notin g$ an. Für $t \in \mathbb{R}$ sei $h(t)$ die Gerade durch die Punkte P und $tQ + (1-t)R \in g$, und $h(\infty)$ sei die zu g parallele Gerade durch den Punkt P.

(a) Veranschaulichen Sie sich die Situation mit einer Skizze.

(b) Finden Sie eine Bijektion $F : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to S^1$, so dass $h(t) \cap S^1 = \{P, F(t)\}$ für alle $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gilt. Berechnen Sie dazu $F(t)$ für $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $F^{-1}(x_1, x_2)$ für $(x_1, x_2) \in S^1$ explizit. *Hinweis:* Im Ergebnis kommen nur rationale Funktionen vor, also Quotienten von Polynomen in t bzw. in x_1 und x_2.

Bemerkung: Diese Transformationen F und F^{-1} heißen *Euler-Substitutionen.* Sie spielen in der Integrationstheorie elementarer Funktionen eine Rolle, wie wir später sehen werden.

T4.4 **Einheitswurzeln.** Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\omega_n := \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$. Zeigen Sie:

(a) $\omega_n^n = 1$.

(b) $\overline{\omega_n} = \frac{1}{\omega_n}$.

(c) $\{z \in \mathbb{C} | \; z^n = 1\} = \{\omega_n^k | \; k = 0, \dots, n-1\}$. Sie dürfen hierbei als bekannt voraussetzen:

$$\forall \varphi \in \mathbb{R} : \left(\cos\varphi + i\sin\varphi = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{\varphi}{2\pi} \in \mathbb{Z}\right)$$

Bemerkung: Die komplexen Lösungen der Gleichung $x^n = 1$ werden *"n-te Einheitswurzeln"* genannt.

(d) $\left\{z \in \mathbb{C} | \; \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0\right\} = \{\omega_n^k | \; k = 1, \dots, n-1\}$. Versuchen Sie, sich diese Aussage anschaulich graphisch in der komplexen Ebene vorzustellen.

(e) Die Polynome $x^n - 1$ und $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$ in $\mathbb{C}[x]$ besitzen die folgende Linearfaktorzerlegung:

$$x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(x - \omega_n^k), \qquad \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \prod_{k=1}^{n-1}(x - \omega_n^k)$$

(f) **Orthogonalitätsrelationen für die Einheitswurzeln.** Für alle $k, l \in \{0, \dots, n-1\}$ gilt

$$\sum_{j=0}^{n-1} \overline{\omega_n^{jl}}\,\omega_n^{jk} = n\delta_{k,l}$$

mit dem sogenannten "*Kronecker-Delta*"

$$\delta_{k,l} := \begin{cases} 1 & \text{für } k = l, \\ 0 & \text{für } k \neq l. \end{cases}$$

T4.5 **Die fünften Einheitswurzeln.** Gegeben seien die Zahl $\omega = \cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5)$ sowie $\zeta_+ = \omega + \omega^4$ und $\zeta_- = \omega^2 + \omega^3$.

(a) Zeigen Sie: $2\operatorname{Re}\omega = \zeta_+$ und $2\operatorname{Re}(\omega^2) = \zeta_-$.

(b) Veranschaulichen Sie sich ω^k für $k = 1, 2, 3, 4, 5$ und $\zeta_\pm/2$ mit einer Skizze in der komplexen Zahlenebene, in der auch der Einheitskreis S^1 eingezeichnet ist.

(c) Zeigen Sie: $\zeta_+ + \zeta_- = -1$ und $\zeta_+ \cdot \zeta_- = -1$. Folgern Sie: Das Polynom $x^2 + x - 1 \in \mathbb{C}[x]$ besitzt die Linearfaktorzerlegung

$$x^2 + x - 1 = (x - \zeta_+)(x - \zeta_-).$$

Insbesondere gilt $\zeta_\pm^2 + \zeta_\pm - 1 = 0$ und $\zeta_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

(d) Zeigen Sie:

$$\omega = \frac{\zeta_+}{2} + i\sqrt{1 - \left(\frac{\zeta_+}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$$

Welche Formeln für $\cos 72°$ und $\sin 72°$ erhalten Sie hieraus? *Hinweis:* Die Beobachtung $|\omega| = 1$ kann Ihnen bei der Rechnung helfen.