LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 3 – Hausaufgaben

H3.1 **Eine Anwendung der geometrischen Summe.** Ein Sparer zahlt jedes Jahr am gleichen Tag x Euro auf sein Sparkonto ein. Es wird mit dem jährlichen Zinssatz p verzinst. Welches Guthaben weist das Konto (inkl. Zins und Zinseszins) unmittelbar nach der n-ten Einzahlung auf? Berechnen Sie mit dem Taschenrechner dieses Guthaben in den drei Fällen $x = 100$, $n = 40$ und $p = 0\%$ bzw. $p = 1\%$ bzw. $p = 4\%$. Vergleichen Sie die Zahlenwerte.

H3.2 **Ganzzahliger Anteil.** Zeigen Sie, dass es für jedes $r \in \mathbb{R}$ ein eindeutig bestimmtes $z \in \mathbb{Z}$ mit $z \leq r < z + 1$ gibt. Dieses z wird mit $\lfloor r \rfloor$ bezeichnet und *ganzzahliger Anteil* oder auch *Gaußklammer* von r genannt. Dabei bezeichnet

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{-n|\ n \in \mathbb{N}\}$$

die Menge der ganzen Zahlen.

H3.3 **Approximation reeller Zahlen durch abbrechende Dezimalbrüche.** Es sei

$$D = \left\{ \frac{k}{10^n} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

die Menge aller abbrechenden Dezimalbrüche. Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen a gilt:

$$\sup\{x \in D|\ x < a\} = a$$

H3.4 **Logarithmen – elementarer Zugang.** *Bei dieser Aufgabe sollen Sie zwar die Rechenregeln und Monotonieeigenschaften für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten, aber weder die Existenz von Logarithmen noch deren Eigenschaften als bekannt voraussetzen.*
Es seien $a > 1$ und $b \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Wir definieren wir die Menge

$$L(a, b) = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N},\, a^m < b^n \right\}.$$

Beweisen Sie:

(a) $3^{11} < 2^{19} < 3^{12}$ (Taschenrechner erlaubt!) Folgern Sie $\frac{19}{12} \in L(2, 3)$ und $\frac{19}{11} \notin L(2, 3)$.

(b) $\forall p \in \mathbb{Q}\ \forall q \in \mathbb{Q} :\ (p \in L(a, b)\ \wedge q < p\ \Rightarrow\ q \in L(a, b))$
Erinnerung: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle|\ m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\}$ bezeichnet die Menge der rationalen Zahlen.

(c) Die Menge $L(a, b)$ ist nichtleer und nach oben beschränkt. Also ist

$$\log_a b := \sup L(a, b) \in \mathbb{R}$$

wohldefiniert. Wir nennen $\log_a b$ den Logarithmus von b zur Basis a.

(d) $\frac{19}{12} \leq \log_2 3 \leq \frac{19}{11}$

(e) $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$

(f) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, wobei auch $c \in \mathbb{R}^+$ gegeben sei. *Hinweis:* Zeigen Sie zuerst $\log_a(bc) \geq \log_a b + \log_a c$ und verwenden Sie dann die vorherige Teilaufgabe.

Bitte wenden!

H3.5 Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a_m := \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2}$$

sowie

$$A := \{a_m \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $l, m \in \mathbb{N}$ mit $l \leq m$ gilt:

$$a_l \leq a_m \leq a_l + \frac{1}{l} - \frac{1}{m}$$

(b) Folgern Sie, dass 2 eine obere Schranke von A ist. Insbesondere ist $\sup A \in \mathbb{R}$ wohldefiniert.

(c) Geben Sie (mit Beweis) ein $m \in \mathbb{N}$ explizit an, für das

$$a_m \leq \sup A \leq a_m + \frac{1}{10}$$

gilt. Berechnen Sie a_m für dieses m mit Taschenrechnergenauigkeit.
Bemerkung: Es gilt $\sup A = \pi^2/6$ mit der Kreiszahl $\pi = 3{,}14159\ldots$. Das beweisen wir allerdings erst am Ende des zweiten Semesters.

H3.6 Lesen Sie nochmal den Abschnitt 1.2 über Mengen im Skript:
`www.math.lmu.de/~merkl/ws16/ana1/skript.pdf`
Stellen Sie zur *Abgabe in der Zentralübung* eine Liste mit allen Fragen zu diesem Abschnitt zusammen, die Sie beantwortet haben wollen, getrennt von den übrigen Hausaufgaben, wenn Sie wollen in Gruppenarbeit oder anonym.

Abgabe: H3.1–H3.5 bis spätestens Dienstag, den 8.11.2016, Abend. H3.6 am Mittwoch, den 9.11.2016 in der Zentralübung.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 3 – Tutorien

T3.1 Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften reeller Zahlen direkt aus den Axiomen der reellen Zahlen:

(a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}(b < c \Rightarrow a + b < a + c)$

(b) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}(a > 0 \wedge b < c \Rightarrow a \cdot b < a \cdot c)$

(c) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+(b < c \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a}{c})$, wobei $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} | \ x > 0\}$ und $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$ für $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

T3.2 Beweisen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$:

$$\sup\{x \in \mathbb{R} | \ x < a\} = a$$

T3.3 (a) Beweisen Sie:

$$\forall a > 1 \ \forall \epsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}_0 : \ \frac{1}{a^n} < \epsilon.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Bernoullische Ungleichung und das Archimedische Axiom. Bei dieser Aufgabe sollen Sie die Existenz und Eigenschaften von Logarithmen *nicht* als gegeben voraussetzen.

(b) Folgern Sie für alle reelle Zahlen $a > 1$:

$$\inf \left\{ \frac{1}{a^n} \middle| \ n \in \mathbb{N}_0 \right\} = 0.$$

T3.4 Für $A, B \subseteq \mathbb{R}$ setzen wir

$$A + B := \{a + b | \ a \in A \wedge b \in B\},$$
$$AB := \{a \cdot b | \ a \in A \wedge b \in B\}$$

und, falls $0 \notin A$,

$$A^{-1} := \{a^{-1} | \ a \in A\}.$$

Beweisen Sie:

(a) Sind $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt, so ist auch $A + B$ nichtleer und nach oben beschränkt, und es gilt

$$\sup A + \sup B = \sup(A + B).$$

(b) Sind $A, B \subset \mathbb{R}^+$ nichtleer und nach oben beschränkt, so ist auch AB nichtleer und nach oben beschränkt, und es gilt

$$\sup A \cdot \sup B = \sup(AB).$$

(c) Ist $A \subset \mathbb{R}^+$ nichtleer und von der 0 weg beschränkt, d.h. besitzt A eine positive untere Schranke, so ist A^{-1} nichtleer und nach oben beschränkt, und es gilt

$$\sup(A^{-1}) = (\inf A)^{-1}.$$

T3.5 **Quadratwurzeln.** *Bei dieser Aufgabe sollen Sie weder die Existenz von Quadratwurzeln noch Eigenschaften von Quadratwurzeln als bekannt voraussetzen.*
Beweisen Sie:

(a) Für alle $a > 0$ ist die Menge $Q(a) := \{x > 0 | \ x^2 < a\}$ nichtleer und nach oben beschränkt.

(b) Setzt man $\sqrt{a} := \sup Q(a)$ für alle $a > 0$, so gilt $\sqrt{a} > 0$ und $\sqrt{a}^2 = a$.

(c) Es gilt $\sqrt{a^2} = a$ für alle $a > 0$.

(d) Für alle $a > 0$ und $b > 0$ gilt $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.