LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 2 – Hausaufgaben

H2.1 Beweisen Sie, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{2+m}{2^m}$$

H2.2 *Aus der GOP des Wintersemesters 2012/13, minimal variiert:*

(a) Formulieren Sie eine Version des Induktionsprinzips, die zur Lösung der folgenden Teilaufgabe (b) nützlich ist.

(b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ganzer Zahlen sei rekursiv wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} a_0 &:= 0, \\ a_1 &:= 2, \\ a_{n+1} &:= 4(a_n - a_{n-1}) \text{ für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie mit Hilfe des Induktionsprinzips aus Teilaufgabe (a), dass $a_n = n2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Achten Sie dabei besonders auf eine logisch korrekte Darstellung des Beweises! Geben Sie insbesondere an, auf welche Formel Sie das Induktionsprinzip aus (a) anwenden.

H2.3 Die Addition $+ : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ und die Multiplikation $\cdot : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ auf den natürlichen Zahlen seien wie in Aufgabe H1.1 rekursiv definiert. Beweisen Sie damit durch vollständige Induktion:

(a) Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0$ gilt $a + b = b + a$ (*Kommutativgesetz der Addition*).

(b) Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ gilt $(a + b) + c = a + (b + c)$ (*Assoziativgesetz der Addition*).

(c) Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$ (*Kommutativgesetz der Multiplikation*).

(d) Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (*Assoziativgesetz der Multiplikation*).

(e) Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ gilt $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (*Distributivgesetz*).

Achten Sie dabei besonders auf eine logisch korrekte Darstellung der Beweise! Geben Sie bei den Induktionsbeweisen genau an, inklusive aller Quantoren, welche Aussage induktiv bewiesen wird und wie die Induktionsvoraussetzung lautet.

H2.4 Leiten Sie die Variante

$$[\forall n : ((\forall m < n\colon \varphi(m)) \Rightarrow \varphi(n))] \Rightarrow \forall n : \varphi(n)$$

des Induktionsschemas aus dem Induktionsschema

$$[\psi(0) \wedge \forall n : (\psi(n) \Rightarrow \psi(N(n)))] \Rightarrow \forall n : \psi(n)$$

her. Welche mit Hilfe von φ gebildete Formel ψ ist dafür geeignet? Die Variablen m, n sollen dabei über $\mathbb{N}_0$ laufen, also über die natürlichen Zahlen inkl. 0.

H2.5 Wir definieren rekursiv für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} p_0(k) &:= k, \\ p_n(k) &:= \frac{1}{n+1}\left[k^{n+1} - \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n+1}{j}p_j(k)\right], \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie $p_1(k)$, $p_2(k)$ und $p_3(k)$.

(b*) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$p_n(k) = \sum_{l=0}^{k-1} l^n$$

Abgabe: Bis spätestens Mittwoch, den 2.11.2016, Abend.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 2 – Tutorien

T2.1 Beweisen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{n=0}^{m}(a+nb) = (m+1)(a+mb/2)$$

T2.2 Die Fibonacci-Zahlen f_n, $n \in \mathbb{N}_0$, sind rekursiv wie folgt definiert: $f_0 := 0$, $f_1 := 1$, $f_{n+1} := f_n + f_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir kürzen ab:

$$\omega_+ = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \qquad \omega_- = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

Beobachten Sie $\omega^2 = \omega + 1$ für $\omega \in \{\omega_+, \omega_-\}$. Beweisen Sie damit für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\omega_+^n - \omega_-^n)$$

T2.3 Wir verwenden die Notationen von Aufgabe H1.1. Die Kleinerrelation $< \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ wird rekursiv so definiert:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \neg\, n < 0,$$
$$\forall m \in \mathbb{N}_0 : 0 < N(m),$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0\ \forall m \in \mathbb{N}_0 : (N(n) < N(m) \quad :\Leftrightarrow \quad n < m).$$

Hierbei soll $A :\Leftrightarrow B$ bedeuten, dass A als äquivalent zu B definiert wird. Beweisen Sie mit Hilfe dieser Definition:

(a) $2 < 4$,

(b) $\neg\, 4 < 2$,

(c) $\forall n \in \mathbb{N}_0\ \forall m \in \mathbb{N}_0 :\ (n \le m \ \Leftrightarrow\ n < N(m))$,

(d) $\forall n \in \mathbb{N}_0\ \forall m \in \mathbb{N}_0 :\ (n < m \ \Leftrightarrow\ \neg\, m \le n)$.

Dabei ist $n \le m$ eine Abkürzung für $n < m \vee n = m$.

T2.4 Beweisen Sie, dass jede nichtleere Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ ein minimales Element besitzt, d.h.

$$\forall M \subseteq \mathbb{N} : (M \neq \emptyset \Rightarrow \exists n \in M\ \forall m \in \mathbb{N} : (m < n \Rightarrow m \notin M)).$$

Hinweis: Beweisen Sie das durch Kontraposition. Nehmen Sie also an, M besitze kein minimales Element, und folgern Sie $M = \emptyset$. Verwenden Sie hierzu vollständige Induktion.

T2.5 Beweisen Sie die folgende Eindeutigkeitsaussage im Rekursionssatz über $\mathbb{N}_0$: Sind M eine Menge, $a \in M$ ein Element davon und $g : \mathbb{N}_0 \times M \to M$ eine Abbildung, so gibt es *höchstens eine* Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \to M$ mit $f(0) = a$ und $f(n+1) = g(n, f(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.