LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 15 – Hausaufgaben

H15.1 **Wichtige Hinweise für die Klausur.** Lesen Sie nochmal den Text "Wichtige Hinweise zum Beweisen bei Übungsaufgaben und Klausuraufgaben" im Hausaufgabenblatt 5. Beachten Sie die Hinweise bei der GOP.

H15.2 **Die Kettenlinie.** Eine homogene Kette hängt an zwei Nägeln (Koordinaten $P_0 = (x_0, y_0)$ und $P_1 = (x_1, y_1)$) an einer Wand, wobei $x_0 < x_1$. Die Schwerkraft zieht sie in negative y-Richtung nach unten. Die Kette werde durch einen Funktionsgraphen $K = \{(x, f(x)) |\, x_0 \le x \le x_1\}$ mit einer glatten Funktion f beschrieben. In jedem Punkt $P = (x, f(x)) \in K$ der Kette zieht der Teil der Kette rechts von P mit einer Kraft $F(x) = (F_1(x), F_2(x)) \in \mathbb{R}^2$ am Teil der Kette links von P, und zwar in Richtung der Tangente von K in P. Wir nehmen an, dass die horizontale Kraftkomponente $F_1(x) = F_1 > 0$ nicht von x abhängt, während die vertikale Komponente $F_2(x)$ sich durch das Gewicht der Kette von x abhängig ändert: $F_2(x) = F_2(x_0) + \rho L(x)$, wobei $\rho > 0$ das Gewicht der Kette pro Längeneinheit und $L(x)$ die Länge des Kettenstücks zwischen $P_0 = (x_0, f(x_0))$ und $P = (x, f(x))$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f der Integro-Differentialgleichung

$$b + c\int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + f'(s)^2}\, ds = f'(x), \quad x_0 \le x \le x_1$$

mit geeigneten Parametern $b \in \mathbb{R}$ und $c > 0$ genügt. Drücken Sie diese Parameter durch ρ, F_1 und $F_2(x_0)$ aus.

(b) Folgern Sie die Differentialgleichung

$$\frac{f''(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} = c.$$

(c) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \sinh(c(x - x_2))$ für $x \in [x_0, x_1]$ mit einer geeigneten Konstanten $x_2 \in \mathbb{R}$ gilt. Folgern Sie $f(x) = c^{-1}\cosh(c(x - x_2)) + y_2$ für diese x mit einer weiteren Konstanten $y_2 \in \mathbb{R}$.

H15.3 **Besselfunktionen J_n.** Für $n \in \mathbb{Z}$ wird die n-te Besselfunktion $J_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$J_n(x) := \frac{1}{2\pi i^n}\int_0^{2\pi} e^{-int} e^{ix\cos t}\, dt$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Werte von J_n für alle $n \in \mathbb{Z}$ reell sind und dass $J_{-n} = (-1)^n J_n$ gilt.

(b) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

Hinweis: Entwickeln Sie dazu $e^{ix\cos t}$ bei gegebenem $t \in [0, 2\pi]$ in eine Potenzreihe in x. Zeigen Sie, dass man hier Integral und Reihe vertauschen kann. Drücken Sie dann, inspiriert von Aufgabe T13.2, $\cos^n t = [(e^{it} + e^{-it})/2]^n$ mit Hilfe der binomischen Formel aus. Beweisen und verwenden Sie dann

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imx}\, dx = 1_{\{m=0\}} \text{ für } m \in \mathbb{Z}.$$

(c) Zeigen Sie, dass J_n, $n \in \mathbb{Z}$, die folgende "*Besselsche Differentialgleichung*" erfüllt:

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

H15.4 **Die Keplersche Fassregel.** Gegeben seien $a > 0$ und eine viermal stetig differenzierbare Funktion $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie die “Keplersche Faßregel”

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \frac{a}{3}[f(-a) + 4f(0) + f(a)] + R(a)$$

mit folgender Integraldarstellung des “Fehlerterms” $R(a)$:

$$R(a) = \int_{-a}^{a} \left(\frac{1}{24}(a - |x|)^4 - \frac{a}{18}(a - |x|)^3 \right) f''''(x)\,dx$$

Hinweis: Entwickeln Sie mit der Taylorformel sowohl $\int_0^{\pm a} f(x)\,dx$ als auch $f(\pm a)$ in a um $a_0 = 0$ bis zu geeigneter Ordnung. Verwenden Sie die Lagrange-Integraldarstellung der Restglieder.

(b) Zeigen Sie

$$\exists \xi \in [-a, a] : \; R(a) = -\frac{a^5}{90} f''''(\xi).$$

Folgern Sie

$$|R(a)| \leq \frac{a^5}{90} \|f''''\|_\infty,$$

wobei $\|f''''\|_\infty := \sup_{x\in[-a,a]} |f''''(x)|$.
Hinweis: Verwenden Sie die allgemeine Version des Mittelwertsatzes der Integralrechnung. Beachten Sie $(a - x)^4/24 - a(a - x)^3/18 \leq 0$ für alle $a > 0$ und $x \in [0, a]$.

(c) Welche Näherungsformel für das Volumen eines Weinfasses hat Johannes Kepler ($\star$ 1571, † 1630) wohl gefunden, die als Eingabegrößen die Höhe h des Fasses und die Umfänge U_b, U_m, U_d des Fasses am Boden, in der Mitte und am Deckel verwendet?

Abgabe bei der Klausur am 18.2.2017 zusammen mit den anderen Hausaufgabenbearbeitungen und der Probeklausur gesammelt und *eingeheftet* in einer Übungsmappe. Die Probeklausur zählt wie ein Hausaufgabenblatt. Die Übungsmappe entscheidet über das Bestehen des Übungsmoduls. Es ist hinreichend zum Bestehen des Übungsmoduls, wenn 14 der $15 + 1$ Übungblätter inkl. Probeklausur sinnvoll bearbeitet sind.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 15 – Tutorien und Zentralübung

T15.1 Berechnen Sie für $a > 0$ die Länge der folgenden Kurven:

(a) $K = \{(x, \cosh x) \mid -a \le x \le a\}$,

(b) $P = \{(x, x^2) \mid -a \le x \le a\}$.

T15.2 *Aus der Nachklausur zur GOP des Sommersemesters 2013:*

(a) Formulieren Sie die Taylorformel mit einer Integraldarstellung des Restglieds. Geben Sie auch die Voraussetzung an, unter der diese Darstellung des Restglieds gilt.

(b) Beweisen Sie für $x \ge 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} \right| \le \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Hinweise: Es bezeichnet i die imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$. Beachten Sie, dass e^{ix} auch nicht-reelle Werte annimmt. Es wird daher empfohlen, eine Integraldarstellung des Taylor-Restglieds zu verwenden. Sie dürfen die Ungleichung

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \le \int_a^b |f(t)|\, dt$$

für $a \le b$ und Riemann-integrierbare $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ ohne Begründung verwenden.

T15.3 *Aus der Nachklausur zur GOP des Sommersemesters 2013:*

(a) Geben Sie eine Substitution $f :]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$, $t = f(\alpha)$ an, die jedes Integral vom Typ $\int R(\cos\alpha, \sin\alpha)\, d\alpha$ mit rationalem R in ein Integral über eine rationale Funktion transformiert. Geben Sie auch an, welches Integral $\int g(t)\, dt$ man mit dieser Substitution aus $\int R(\cos\alpha, \sin\alpha)\, d\alpha$ erhält.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\pi/3} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}$$

mit Hilfe der in Teilaufgabe (a) angegebenen Substitution.