LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 14 – Hausaufgaben

Bitte vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse zu den Aufgaben H14.1–H14.4 soweit wie möglich.

H14.1 **Rechentraining zur Integration rationaler Funktionen.** Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{a} \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x}$, $a < 0$,

(b) $\displaystyle\int_{0}^{a} \frac{16}{x^4 + 4}\, dx$, $a \in \mathbb{R}$,

(c) $\displaystyle\int_{0}^{a} \frac{x^7 - x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 13x^2 + x - 3}{(1 + x^2)^3}\, dx$, $a \in \mathbb{R}$.

H14.2 **Berechnung eines Integrals vom Typ $\int R(\cosh t, \sinh t)\, dt$.**
Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^b \frac{\cosh t}{5\cosh t - 3\sinh t - 4}\, dt$$

für $b < \operatorname{arsinh} \frac{3}{4}$ auf zwei verschiedene Weisen,

(a) indem Sie es mit der Substitution $x = \cosh t$, $y = \sinh t$ auf das Integral aus Aufgabe T14.2 zurückführen,

(b) indem Sie $\sinh t$ und $\cosh t$ als Linearkombinationen von e^t und e^{-t} ausdrücken und dann $s = e^t$ substituieren.
Bemerkung: Diese Substitution kann man sich geometrisch vorstellen als die *stereographische Projektion der Hyperbel* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 - y^2 = 1\}$ *vom unendlich fernen Punkt in Richtung der Asymptote* $\mathbb{R}(1, -1)$ *auf die andere Asymptote* $\mathbb{R}(1, 1)$; vgl. Aufgabe H4.5.

Überzeugen Sie sich davon, dass diese beiden verschiedenen Wege das gleiche Ergebnis liefern.

H14.3 **Integration mit einer Euler-Substitution zu einem Kreis.**

(a) Berechnen Sie für $-5 < a < 5$ das Integral

$$\int_0^a \frac{dx}{3x - 4\sqrt{25 - x^2} - 25},$$

indem Sie die punktierte Kreislinie $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 = 25\} \setminus \{(0, -5)\}$ mit der Euler-Substitution

$$x = \frac{10t}{1 + t^2}, \quad y = 5\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

parametrisieren, vgl. Aufgabe T4.3. Veranschaulichen Sie sich diese Euler-Substitution geometrisch als Projektion der Geraden $G = \{(t, -4) |\ t \in \mathbb{R}\}$ vom Punkt $(0, -5)$ aus auf die Kreislinie K. Skizzieren Sie hierzu die Kreislinie K, die Gerade G, den Punkt $(0, -5)$, einen typischen Punkt $(t, -4) \in G$, dessen Bildpunkt $(x, y) \in K$ und die Gerade durch diese drei Punkte.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\pi/2}^{\alpha} \frac{\sin\varphi}{3\cos\varphi - 4\sin\varphi - 5}\, d\varphi$$

für $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, indem Sie es durch eine geeignete Substitution auf das Integral aus Teilaufgabe (a) zurückführen.

Bitte wenden.

H14.4 **Übereinstimmung zweier Integrale.** Die beiden von einem Parameter $q < 1$ abhängigen Integrale

$$I(q) = -\frac{2}{3}q^2 \int_1^\infty \frac{(s+\frac{1}{2})}{s^2(s-q)}\sqrt{1-\frac{1}{s}}\,ds$$

und

$$J(q) = \int_0^1 4q(z-z^2)\log[1-4q(z-z^2)]\,dz$$

spielen in der Quantenelektrodynamik bei der Beschreibung der sogenannten "Vakuumpolarisation" eine wichtige Rolle. Berechnen Sie $I(q)$ und $J(q)$ und zeigen Sie damit $I(q) = J(q)$.

H14.5* **Die Eulersche Summenformel.** Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $B_n(x)$ das n-te Bernoulli-Polynom an der Stelle x; siehe Aufgabe T12.1.

(a) Zeigen Sie $\frac{B'_{n+1}(x)}{(n+1)!} = \frac{B_n(x)}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$.

(b) Folgern Sie $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)\,dx = \frac{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie damit $\int_0^1 B_n(x)\,dx = 0$ und $B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. *Hinweis:* Verwenden Sie das Ergebnis von Aufgabe T14.4.

(c) Zeigen Sie $B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Folgern Sie $B_n(0) = 0$ für alle ungeraden $n \geq 3$. *Hinweis*: Entwickeln Sie beide Seiten der Gleichung $\frac{-te^{0\cdot(-t)}}{e^{-t}-1} = \frac{te^{1\cdot t}}{e^t-1}$ für $t \to 0$ wie in Aufgabe T12.1.

(d) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine glatte (d.h. beliebig oft differenzierbare) Funktion; am Rand $\{0,1\}$ ist dabei einseitige Differenzierbarkeit gemeint. Zeigen Sie induktiv für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{B_{k+1}(1)}{(k+1)!}f^{(k)}(1) - \frac{B_{k+1}(0)}{(k+1)!}f^{(k)}(0)\right] + (-1)^n\int_0^1 \frac{B_n(x)}{n!}f^{(n)}(x)\,dx$$

Für $n \in \mathbb{N}$ kann man das auch in der folgenden Form schreiben:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{f(1)+f(0)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} 1_{\{k\text{ ungerade}\}}\frac{B_{k+1}(0)}{(k+1)!}\left[f^{(k)}(1) - f^{(k)}(0)\right] + (-1)^n\int_0^1 \frac{B_n(x)}{n!}f^{(n)}(x)\,dx$$

(e) Nun sei $f : [0,m] \to \mathbb{R}$ glatt (am Rand einseitig gemeint), $m \in \mathbb{N}$. Folgern Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^m f(x)\,dx = \sum_{l=0}^{m-1}\frac{f(l+1)+f(l)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} 1_{\{k\text{ ungerade}\}}\frac{B_{k+1}(0)}{(k+1)!}\left[f^{(k)}(m) - f^{(k)}(0)\right]$$
$$+ (-1)^n\sum_{l=0}^{m-1}\int_0^1 \frac{B_n(x)}{n!}f^{(n)}(x+l)\,dx$$

Diese Formel wird *Eulersche Summenformel* oder auch *Euler-McLaurin-Formel* genannt. Sie ist nützlich zum Vergleich von Summen mit Integralen und kann zur Konvergenzbeschleunigung von Reihen eingesetzt werden.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 7.2.2017, Abend.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 14 – Tutorien und Zentralübung

T14.1 **Rechentraining zur Integration rationaler Funktionen.** Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^a \frac{x^3 - x^2 - 2}{x^2 - 1}\, dx, \quad -1 < a < 1,$

(b) $\displaystyle\int_0^a \frac{2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 8x}{x^4 - 2x^2 + 1}\, dx, \quad -1 < a < 1,$

(c) $\displaystyle\int_0^a \frac{x^4 + 3x^2 + 4}{x^4 + 2x^2 + 1}\, dx, \ a \in \mathbb{R}.$

T14.2 **Integration mit einer Euler-Substitution zu einem Hyperbelzweig.** Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^a \frac{dy}{5\sqrt{y^2 + 16} - 3y - 16}, \ a < 3,$$

indem Sie den Hyperbelzweig $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 - y^2 = 16,\ x > 0\}$ mit der Euler-Substitution

$$x = 4\frac{1 + t^2}{1 - t^2}, \quad y = \frac{8t}{1 - t^2}$$

parametrisieren. Veranschaulichen Sie sich diese Euler-Substitution geometrisch als Projektion der Strecke $S = \{(-3, t)|\ -1 < t < 1\}$ vom Punkt $(-4, 0)$ aus auf den Hyperbelzweig H. Skizzieren Sie hierzu die Hyperbel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 - y^2 = 16\}$, ihre Asymptoten, den Hyperbelzweig H, die Strecke S, den Punkt $(-4, 0)$, einen typischen Punkt $(-3, t) \in S$, dessen Bildpunkt $(x, y) \in H$ und die Gerade durch diese drei Punkte; eine qualitative Handskizze genügt.

T14.3 *Aus der GOP des Wintersemesters 2012/13:* Berechnen Sie für $a \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_a^\infty \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^2}\, dx$$

T14.4 **Darstellung von Potenzsummen mit Bernoullipolynomen.** Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $B_n(x)$ das n-te Bernoulli-Polynom an der Stelle x; siehe Aufgabe T12.1. Zeigen Sie für alle $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{B_{n+1}(m) - B_{n+1}(0)}{n + 1}$$

Insbesondere gilt für die in Aufgabe H2.5 rekursiv definierten Polynome p_n:

$$p_n(m) = \frac{B_{n+1}(m) - B_{n+1}(0)}{n + 1}$$