LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 13 – Hausaufgaben

H13.1 **Rechentraining zur Integration.** Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^a e^{-\lambda x}\sin(\omega x)\,dx$ für $a,\lambda,\omega > 0$,

(b) $\int_1^a x^n \log x\,dx$ für $a > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$,

(c) $\int_0^a x \arctan x\,dx$ für $a > 0$,

(d) $\int_0^a \arcsin x\,dx$ für $0 < a < 1$,

(e) $\int_0^a \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx$ für $a > 0$.

H13.2 *Aus der GOP des Wintersemesters 2012/13:*

(a) Finden Sie eine Stammfunktion F der Funktion

$$f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x(\log x)^2}.$$

(b) Entscheiden Sie mit Beweis, ob die Reihe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert. *Hinweis:* Eine mögliche Lösung vergleicht Summanden $1/(n(\log n)^2)$ mit Zuwächsen der in (a) gefundenen Stammfunktion F.

H13.3 **Taylorentwicklung von Potenzen.** Zeigen Sie mit der Taylorformel aus Aufgabe H12.1 für alle $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{m} \binom{\alpha}{n} x^n + o(|x^m|) \qquad \text{für } x \to 0,\ x \in \mathbb{R}$$

H13.4 **Die Differentialgleichung $\mathbf{y = (1 + x^2)y'}$.** Bestimmen Sie die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ der Differentialgleichung $y(x) = (1 + x^2)y'(x)$ mit $y(0) = 1$.
Hinweis: Betrachten Sie $\int_0^t \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx$.

H13.5 **Umfang einer Ellipse.** Gegeben sei die Ellipse

$$E(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ a^{-2}x^2 + b^{-2}y^2 = 1\}$$

mit der großen Halbachse $a > 0$ und der kleinen Halbachse b, wobei $0 < b \le a$. Ein Teilchen durchläuft diese Ellipse einmal:

$$x(t) = a\cos t, \quad y(t) = b\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

wobei $(x(t), y(t))$ den Ort des Teilchens zur Zeit t beschreibt. Der Geschwindigkeitsbetrag des Teilchens zur Zeit t beträgt

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2},$$

wobei der Punkt die Zeitableitung (Ableitung nach t) bedeutet. Durch Integration der Geschwindigkeit über die Zeit erhalten wir den Umfang der Ellipse:

$$U(a, b) = \int_0^{2\pi} v(t)\,dt$$

Bitte wenden.

(a) Beweisen Sie:

$$U(a,b) = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t}\, dt = 2a \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 z^2}{1 - z^2}}\, dz$$

wobei

$$\varepsilon := \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

die "Exzentrizität" der Ellipse bezeichnet. Hierbei ist $\int_{-1}^{1} \ldots$ als $\lim_{s\uparrow 1} \int_{-s}^{s} \ldots$ zu verstehen. *Bemerkung:* Das "elliptische Integral" $U(a,b)$ kann nur in Ausnahmefällen mit elementaren Funktionen dargestellt werden. Sie sollen es daher nicht "ausrechnen".

(b) Beweisen Sie:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t}\, dt = 2\pi - \frac{\pi}{2}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \qquad \text{für } \varepsilon \to 0$$

(c*) Beweisen Sie allgemeiner für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t}\, dt &= \sum_{n=0}^{m} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \varepsilon^{2n} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} t\, dt + o(\varepsilon^{2m}) \\ &= 2\pi \sum_{n=0}^{m} \binom{\frac{1}{2}}{n} \binom{2n}{n} \left(-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)^n + o(\varepsilon^{2m}) \end{aligned}$$

Hinweis: Aus Aufgabe H13.3 wissen Sie:

$$\sqrt{1 - x^2} = \sum_{n=0}^{m} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n + o(x^{2m}) \qquad \text{für } x \to 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Verwenden Sie das Ergebnis von Aufgabe T13.2, um $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t\, dt$ zu bestimmen.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 31.1.2017, Abend.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 13 – Tutorien und Zentralübung

T13.1 **Rechentraining zur Integration.** Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^a e^{-\lambda x} \cos(\omega x)\, dx$ für $a, \lambda, \omega > 0$,

(b) $\int_0^a x^2 e^{-x} \cos x \, dx$ für $a > 0$,

(c) $\int_0^a \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ für $0 < a < 1$

(d) $\int_0^a x e^{-x^2/2}\, dx$ für $a > 0$,

(e) $\int_a^b \frac{dx}{x \log x}$ für $1 < a < b$.

T13.2 *Aus der GOP des Wintersemesters 2012/13:*

(a) Stellen Sie $\sin x$ und $\cos x$ für $x \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion und arithmetischen Operationen dar.

(b) Formulieren Sie die allgemeine binomische Formel aus der Vorlesung. *Hinweis:* Gemeint ist *nicht* nur der Spezialfall für Quadrate aus der Schulmathematik.

(c) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^{2n} x \, dx = \frac{2\pi}{4^n} \binom{2n}{n}$$

Hierbei steht $\sin^{2n} x$ für $(\sin x)^{2n}$.

T13.3 *Aus der GOP-Nachklausur des Sommersemesters 2013:*

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Stellen Sie Aussage "f ist *nicht* gleichmäßig stetig" mit einer prädikatenlogischen Formel dar, bei der die Liste der Quantoren zu Beginn steht.

(b) Formulieren Sie eine Version des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

(c) Nun sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cosh \sqrt{1 + x^2}.$$

Beweisen Sie, dass f *nicht* gleichmäßig stetig ist. Achten Sie dabei besonders auf die logische Korrektheit der Darstellung. *Hinweis:* Die Teilaufgaben (a) und (b) sollen Ihnen hier helfen.

T13.4 **Zusammensetzen von Riemannintegralen.** Es seien $a < b < c$ reelle Zahlen und $f\colon [a, c] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass f dann auch auf $[a, b]$ sowie auf $[b, c]$ Riemann-integrierbar ist und dass gilt:

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$$