LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 12 – Hausaufgaben

H12.1 **Eine einfache Version der Taylorformel.**

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine n-fach stetig differenzierbare Funktion (d.h. die iterierten Ableitungen $g', g'', g''', \ldots, g^{(n)}$ von g bis zur n-ten Stufe existieren und sind stetig). Es sei $g^{(j)}(0) = 0$ für $j = 0, \ldots, n-1$, wobei $g^{(0)} = g$ und $g^{(j+1)} = (g^{(j)})'$. Beweisen Sie: $g(x) = O(|x|^n)$ für $x \to 0$. Verwenden Sie dazu den Mittelwertsatz der Differentialrechnung in einem Induktionsbeweis.

(b) Beweisen Sie für alle $k, j \in \mathbb{N}_0$:

$$\left.\frac{d^j}{dx^j}\frac{x^k}{k!}\right|_{x=0} = 1_{\{k=j\}}$$

Zur Notation: $\mathrm{term}(x)|_{x=a} := \mathrm{term}(a)$ steht für das Belegen der freien Variable x in einem Term $\mathrm{term}(x)$ mit dem Wert a, also für das Einsetzen von a für x.

(c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere n-fach stetig differenzierbare Funktion und

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie $g^{(j)}(0) = 0$ für $j = 0, \ldots, n-1$. Folgern Sie mit der Teilaufgabe (a) für $x \to 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + O(|x|^n)$$

H12.2 **Asymptotik des Arcuscosinus und des Areacosinus hyperbolicus bei 1.**

(a) Beweisen Sie, dass für $x \uparrow 1$ (d.h. für $x \to 1$, $x < 1$) gilt:

$$\arccos x = \sqrt{2-2x} + O((1-x)^{3/2})$$

(b) Beweisen Sie, dass für $x \downarrow 1$ (d.h. für $x \to 1$, $x > 1$) gilt:

$$\operatorname{arcosh} x = \sqrt{2x-2} + O((x-1)^{3/2})$$

H12.3 **Rechentraining mit Taylorapproximationen.**

(a) Finden Sie (mit Beweis) Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$\log(1+x) = ax + bx^2 + o(x^2) \text{ für } x \to 0.$$

(b) Von einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei bekannt:

$$f(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 + o(x^3) \text{ für } x \to 0.$$

Finden Sie (mit Begründung) $c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$\log(1 + f(x)) = cx + dx^2 + o(x^2) \text{ für } x \to 0.$$

(c) Finden Sie (mit Begründung und f wie vorher) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\arctan f(x) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + o(x^3) \text{ für } x \to 0.$$

Bitte wenden.

H12.4 **Leibniz-Regel für höhere Ableitungen von Produkten.** Bearbeiten Sie die folgende Teilaufgabe (a) *oder* ihre Verallgemeinerung (b*).

(a) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatte (d.h. beliebig oft differenzierbare) Funktionen. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

wobei $\cdot^{(k)}$ das Bilden der k-ten Ableitung bezeichnet.

(b*) Es seien $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen, wobei $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\left(\prod_{j=1}^{m} f_j \right)^{(n)} = \sum_{(k_1,\ldots,k_m) \in M_{m,n}} \operatorname{mult}(k_1, \ldots, k_m) \prod_{j=1}^{m} f_j^{(k_j)}$$

mit

$$M_{m,n} := \left\{ (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{N}_0^m \;\middle|\; \sum_{j=1}^{m} k_j = n \right\}$$

und dem sogenannten *Multinomialkoeffizienten*:

$$\operatorname{mult}(k_1, \ldots, k_m) := \frac{\left(\sum_{j=1}^{m} k_j \right)!}{\prod_{j=1}^{m} k_j!}$$

H12.5 **Gaußsche Asymptotik von Potenzen nahe an Extremstellen.**

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$. Zeigen Sie:

$$\log f(x) = \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2) \qquad \text{für } x \to 0$$

Hinweis: Aus Aufgabe H12.1 wissen Sie $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} f''(0) + O(x^3)$ für $x \to 0$.

(b) Folgern Sie für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right)^n = e^{\frac{1}{2} f''(0) x^2}$$

(c) Beweisen Sie als eine Anwendung für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}} = e^{-\frac{1}{2} x^2}$$

H12.6 **Sichtweite zum Horizont.** Sie stehen auf einem Felsen (Höhe h über dem Meeresspiegel) und blicken über das Meer. Wie weit ist es bis zum Horizont? (Kugelgestalt der Erde mit Radius r auf Meereshöhe und geradlinige Lichtausbreitung vorausgesetzt) Leiten Sie eine Näherungsformel für diese Entfernung $L(h, r)$ zum Horizont der Gestalt

$$L(h, r) = c r^a h^b (1 + O(h/r)) \text{ für } h/r \to 0$$

mit geeigneten Konstanten a, b, c her. Werten Sie mit dem Taschenrechner sowohl $L(h, r)$ als auch die Näherung $c r^a h^b$ für die Zahlenwerte $h = 10\text{m}$ und $r = 6370\text{km}$ aus und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 24.1.2017, Abend.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 12 – Tutorien und Zentralübung

T12.1 **Die ersten Bernoulli-Polynome und Bernoulli-Zahlen.** Gegeben seien $x \in \mathbb{R}$ und

$$f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_x(t) := \begin{cases} \dfrac{te^{xt}}{e^t - 1} & \text{für } t \neq 0, \\ 1 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass f_x beliebig oft differenzierbar ist, auch an der Stelle $t = 0$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ wird das n-te Bernoulli-Polynom $B_n(x)$ an der Stelle x durch

$$B_n(x) := f_x^{(n)}(0)$$

definiert. Sein Wert $B_n := B_n(0)$ an der Stelle $x = 0$ wird die n-te Bernoulli-Zahl genannt. Berechnen Sie $B_j(x)$ und B_j für $j = 0, 1, 2, 3$.
Hinweis: Sie können f_x direkt mehrfach ableiten *oder* die Asymptotik

$$f_x(t) = \sum_{j=0}^{3} \frac{B_j(x)}{j!} t^j + O(t^4), \quad t \to 0,$$

siehe Aufgabe H12.1(c), in die Gleichung

$$(e^t - 1) f_x(t) = te^{tx}$$

einsetzen und ein Anfangsstück der zugehörigen Reihen mit Fehlertermen ausmultiplizieren.

T12.2 **Riemannsummen zu $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$.**

(a) Berechnen Sie

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{2n},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, indem Sie den Sinus durch die komplexe Exponentialfunktion ausdrücken und die geometrische Summe verwenden.

(b) Folgern Sie ohne Verwendung der Integralrechnung:

$$\frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{2n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

T12.3 **Gleichmäßige Stetigkeit des Arcustangens und des Tangens hyperbolicus.** Zeigen Sie, dass die Funktionen $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig sind. *Hinweis:* Mittelwertsatz.

T12.4 **Approximation von Potenzreihen durch Partialsummen nahe am Entwicklungspunkt.** Es sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine Potenzreihe in der Variablen z mit positivem Konvergenzradius $r > 0$. Beweisen Sie für alle $m \in \mathbb{N}_0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n + O(|z|^{m+1}) \quad \text{für } z \to 0, \ z \in \mathbb{C}$$

Folgern Sie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n + o(|z|^m) \quad \text{für } z \to 0, \ z \in \mathbb{C}$$