LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 11 – Hausaufgaben

H11.1 **Rechentraining zum Ableiten.** Berechnen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f_1(x) = x \log x$, $x > 0$;

(b) $f_2(x) = \binom{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ eine gegebene Zahl sei;

(c) $f_3(x) = x^{x^x}$, $x > 0$;

(d) $f_4(\varphi) = \frac{a+\cos\varphi}{\sqrt{(a+\cos\varphi)^2+(b+\sin\varphi)^2}}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ gegebene Zahlen mit $a^2 + b^2 \neq 1$ seien;

(e) $f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, wobei $\sigma > 0$ eine gegebene Zahl sei;

(f) $f_6(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma > 0$, wobei $x \in \mathbb{R}$ eine gegebene Zahl sei;

(g) $f_7(x) = \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}$, $x > 0$.

Bemerkung: Die Funktion f_5 spielt in der Stochastik als sogenannte "Dichte einer Normalverteilung" eine wichtige Rolle. Die Funktion f_7 ist eine berühmte Näherung an die Fakultätsfunktion, die sogenannte "Stirlingsche Formel". Mehr dazu im 3. Semester.

H11.2 **Parametrisierung eines Hyperbelasts.** Beweisen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x > 0,\ x^2 - y^2 = 1\}$, $f(t) = (\cosh t, \sinh t)$ eine Bijektion ist. Setzen Sie dazu weder die Existenz noch Eigenschaften der Areafunktionen als bekannt voraus.

H11.3 **Ableitungen der Areafunktionen.** Gegeben seien die folgenden Hyperbelfunktionen und die zugehörigen Areafunktionen:

(a) $f_1 : \mathbb{R}^+ \to]1, \infty[$, $f_1(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $f_1^{-1} :]1, \infty[\to \mathbb{R}^+$, $f_1^{-1}(y) = \operatorname{arcosh}(y)$;

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $f_2^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2^{-1}(y) = \operatorname{arsinh}(y)$;

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to]-1, 1[$, $f_3(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, $f_3^{-1} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $f_3^{-1}(y) = \operatorname{artanh}(y)$;

(d) $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, $f_4(x) = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$, $f_4^{-1} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f_4^{-1}(y) = \operatorname{arcoth}(y)$.

Beweisen Sie für y im jeweils oben angegebenen Definitionsbereich:

(a) $\operatorname{arcosh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$;

(b) $\operatorname{arsinh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$;

(c) $\operatorname{artanh}(y) = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}$;

(d) $\operatorname{arcoth}(y) = \frac{1}{2} \log \frac{y+1}{y-1}$.

Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktionen f_j^{-1}, $j = 1, 2, 3, 4$, jeweils auf zwei verschiedene Weisen, und zwar

(i) direkt mit der eben bewiesenen expliziten Formel für die Umkehrfunktion;

(ii) mit der allgemeinen Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion.

Überprüfen Sie in allen vier Fällen (a), (b), (c) und (d), dass die Ergebnisse aus (i) und (ii) übereinstimmen.
Hinweis: Ein kleiner Teil der Arbeit wird schon in Aufgabe T11.1(a) erledigt.

Bitte wenden!

H11.4 **Vertauschung von Ableitung und Reihe.**

(a) Gegeben sei eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$ mit einer offenen Umgebung U von $x_0 \in \mathbb{R}$. Alle f_n seien in x_0 stetig. Es gelte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in U} |f_n(x)| < \infty.$$

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion stetig in x_0 ist:

$$g : U \to \mathbb{C}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^3}$$

eine differenzierbare Funktion mit der folgenden Ableitung ist:

$$f'(x) = i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^2}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz, angewandt auf Real- und Imaginärteil (warum aufgespalten?).

H11.5 **Beispiel einer glatten stückweise definierten Funktion.**

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(-1/x)$. Beweisen Sie: f ist beliebig oft differenzierbar, und für die n-te Ableitung, $n \in \mathbb{N}_0$, gilt

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$$

mit einer Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Polynomen, die die folgenden Rekursionsgleichungen erfüllt:

$$p_0(z) = 1, \quad p_{n+1}(z) = z^2(p_n(z) - p_n'(z)) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

(b) Berechnen Sie $p_1(z)$, $p_2(z)$ und $p_3(z)$ und damit $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ für $x > 0$ explizit.

(c) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass $f^{(n)}(x) = o(x)$ für $x \to 0$, $x > 0$, gilt.

(d) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \le 0 \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist, und dass ihre n-te Ableitung $g^{(n)}(0)$ im Nullpunkt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gleich 0 ist.

H11.6 **Schwingungsgleichung mit Reibungsterm.** Wir betrachten eine Masse m die an einer horizontalen Feder der Härte k in einer Flüssigkeit mit Reibungskoeffizient μ befestigt ist (alle Konstanten sind größer als 0). Die Auslenkung der Masse aus der Ruhelage in Abhängigkeit von der Zeit $t \in \mathbb{R}$ sei $x(t)$. Die Funktion $x(t)$ unterliegt der Differentialgleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu\frac{dx}{dt}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Menge aller Lösungen dieser Gleichung einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ bildet.

(b) Bestimmen Sie mit dem Ansatz $x(t) = \exp(\lambda t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ Lösungen dieser Differentialgleichung. In welchem Fall findet man mit diesem Ansatz zwei *reelle* Lösungen (1. Fall), in welchen Fall zwei nicht-reelle komplexe Lösungen (2. Fall), und in welchem Fall nur eine Lösung (3. Fall)?

(c) Bestimmen Sie im 1. und 2. Fall zwei $\mathbb{C}$-*linear unabhängige reelle* Lösungen. *Hinweis:* Linearkombinationen.

(d) Skizzieren Sie diese beiden reellen Lösungen im 1. und 2. Fall qualitativ und beschreiben Sie den Unterschied qualitativ. Welcher Fall gehört zu "starker Reibung", welcher zu "schwacher Reibung"?

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 17.1.2017, Abend.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 11 – Tutorien und Zentralübung

T11.1 **Rechentraining zum Ableiten.** Berechnen Sie *schnell*:

(a)
$$\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{1+x^2}), \quad x>0$$

(b)
$$\frac{d}{dx}e^{-x^{3/2}}, \quad x>0$$

(c)
$$\frac{d}{dx}\frac{\sin(x^2)}{\cos^2(x)}, \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

T11.2 **Rechentraining zum Finden von Stammfunktionen.** Bestimmen Sie Funktionen f, definiert auf geeigneten nichtleeren offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$, die die folgenden Ableitungen f' besitzen:

(a) $f'(x)=\frac{1}{1-2x}$;

(b) $f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$;

(c) $f'(x)=\tan(x)$;

(d) $f'(x)=xe^{\alpha x^2}$, wobei $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ eine gegebene Zahl sei;

T11.3 **Stammfunktion von $x^n e^{ax}$ und von $x^2\sin(ax)$.**

(a) Es sei $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ gegeben. Definieren Sie rekursiv eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von differenzierbaren Funktionen $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mit $f_n'(x)=x^n e^{ax}$ für $x\in\mathbb{R}$.

(b) Geben Sie f_1 und f_2 explizit an.

(c) Nun sei $a>0$ gegeben. Berechnen Sie eine differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f'(x)=x^2\sin(ax)$. Stellen Sie das Ergebnis auf zwei verschiedene Weisen dar, und zwar einerseits mit der Exponentialfunktion im Komplexen und andererseits mit trigonometrischen Funktionen.

T11.4 **Die Differentialgleichung $f^{(n+1)}=0$.** Es seien $I\subseteq\mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $n\in\mathbb{N}_0$ und $f:I\to\mathbb{R}$ eine $(n+1)$-fach differenzierbare Funktion mit $f^{(n+1)}=0$. Zeigen Sie, dass f eine Polynomfunktion mit Grad $\leq n$ ist, d.h. dass gilt:

$$\exists(a_0,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\;\forall x\in I:\; f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k.$$

T11.5 **Vergleich zweier Zugänge zum Logarithmus.** Beweisen Sie für alle $a>1$ und $b>0$:

$$\log_a b=\frac{\log b}{\log a} \tag{1}$$

Hierbei ist auf der linken Seite der elementar definierte Logarithmus

$$\log_a b=\sup\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\; m\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{N},\, a^m<b^n\right\}$$

aus Aufgabe H3.4 gemeint, während "log" auf der rechten Seite in (1) den natürlichen Logarithmus bedeutet, definiert als Umkehrfunktion der über die Exponentialreihe definierten reellen Exponentialfunktion $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$. Insbesondere folgt $\log b=\log_e b$.