LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 10 – Hausaufgaben

H10.1 Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in \mathbb{R}$ stetige Funktion und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine in $y_0 := f(x_0) \in \mathbb{R}$ stetige Funktion, sowie $h = g \circ f$. Zeigen Sie *direkt* mit der ϵ-δ-Definition der Stetigkeit, dass h in x_0 stetig ist. Achten Sie dabei besonders auf eine korrekte logische Argumentation im Umgang mit Quantoren.

H10.2 Beweisen Sie *ohne Verwendung der Differentialrechnung:*

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x) \quad \text{für } x \to 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

H10.3 *Aus der GOP des Wintersemesters 2012/13, um einen Hinweis ergänzt:*

(a) Gegeben seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, $r > 0$ und eine Funktion $f :]-r, r[\setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Definieren Sie, was die Aussage

$$f(x) = \frac{a}{x^2} + b + cx^2 + o(x^2) \quad \text{für } x \to 0$$

bedeutet.

(b) Geben Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ an, so dass gilt:

$$\frac{1}{1-\cos x} = \frac{a}{x^2} + b + cx^2 + o(x^2) \quad \text{für } x \to 0.$$

Begründen Sie Ihr Ergebnis durch eine Rechnung.
Hinweis: $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$.

H10.4 Zeigen Sie: Die erweiterte reelle Exponentialfunktion $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,

$$\mathrm{Exp}(x) = \begin{cases} \exp(x) & \text{für } x \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{für } x = -\infty \\ +\infty & \text{für } x = +\infty \end{cases}$$

ist stetig.

H10.5 (a) Es seien $M, N, U \subseteq \mathbb{C}$ mit $M \cup N = U$. Die Mengen M und N seien in U abgeschlossen. Zeigen Sie, dass eine Menge $V \subseteq U$ genau dann offen in U ist, wenn $V \cap M$ offen in M und $V \cap N$ offen in N ist.

(b) Wie eben sei $U = M \cup N \subseteq \mathbb{C}$, und M und N seien in U abgeschlossen. Weiter sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Abbildung, deren Einschränkungen auf M und N stetig sind. Zeigen Sie: f ist stetig.

(c) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ und $(M_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von U mit in U offenen Mengen $M_i \subseteq U$. Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Abbildung, so dass für alle $i \in I$ die Einschränkung $f_i : M_i \to \mathbb{C}$, $f_i(z) = f(z)$, von f auf M_i stetig ist. Zeigen Sie, dass f stetig ist. Folgern Sie, dass die Aussage in (b) richtig bleibt, wenn man dort das Wort "abgeschlossen" durch "offen" ersetzt.

(d) *Typische Anwendung von (b):* Gegeben seien $U \subseteq \mathbb{C}$ und zwei stetige Funktionen $f, g : U \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Mengen $M := \{x \in U |\ f(x) - g(x) \le 0\}$ und $N := \{x \in U |\ f(x) - g(x) \ge 0\}$ abgeschlossen in U sind. Folgern Sie, dass die Abbildung $f \wedge g : U \to \mathbb{R}$, $f \wedge g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ stetig ist.

H10.6 Lesen und verstehen Sie den Beweis des Abelschen Grenzwertsatzes (siehe den Text ab nächster Seite oder auch den Abschnitt 3.6.6 im Skript). Analysieren Sie die logische Struktur des Beweises (ohne das Lemma mit der Vorüberlegung), indem Sie in einem Ausdruck alle Stellen mit Nummern (1), (2), (3) etc. markieren, an denen sich das Beweisziel, also die zu zeigende Aussage, ändert. Geben Sie zu jeder dieser Nummern auf einem anderen Blatt an, welche Aussage jeweils das neue Beweisziel ist.
Hinweis: Bei manchen dieser Stellen steht das schon im Beweis.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 10.1.2017, Abend.

Text zu Aufgabe H10.6: Der Abelsche Grenzwertsatz

Für $M \geq 0$ und $c > 0$ definieren wir die Menge

$$\Delta_{M,c} := \{z \in \mathbb{C} |\ 1 - c \leq \operatorname{Re} z \leq 1,\ |\operatorname{Im} z| \leq M(1 - \operatorname{Re} z)\}.$$

Für $M > 0$ ist das die abgeschlossene Dreiecksscheibe in der komplexen Ebene mit den Eckpunkten 1, $1 - c + iMc$ und $1 - c - iMc$; für $M = 0$ ist es nur das Intervall $[1 - c, 1]$. Als Vorüberlegung beweisen wir:

Lemma 1 *Für alle $M \geq 0$ gibt es ein $c > 0$ und ein $L > 0$, so dass für alle $z \in \Delta_{M.c}$ gilt:*

$$|z - 1| \leq L(1 - |z|). \tag{1}$$

Insbesondere folgt für solche $c > 0$:

$$\Delta_{M,c} \subseteq \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\ \vee\ z = 1\}. \tag{2}$$

Beweis: Gegeben $M \geq 0$, setzen wir

$$c := \frac{1}{1 + M^2} > 0 \tag{3}$$

und

$$L := 2(M + 1) > 0. \tag{4}$$

Nun sei $z \in \Delta_{M,c}$ gegeben. Wir kürzen ab: $x := 1 - \operatorname{Re} z$ und $y := \operatorname{Im} z$. Insbesondere gilt $z = 1 + iy - x$ sowie $0 \leq x \leq c$ und $|y| \leq Mx$. Dann folgt:

$$|z - 1| = |iy - x| \leq |y| + |x| \leq Mx + x = (1 + M)x \tag{5}$$

Wir schätzen andererseits ab:

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{(1 - x)^2 + y^2} \leq \sqrt{(1 - x)^2 + (Mx)^2} = \sqrt{1 - 2x + (1 + M^2)x^2} \\
&\leq \sqrt{1 - 2x + (1 + M^2)cx} \quad \text{(wegen } 0 \leq x \leq c\text{)} \\
&= \sqrt{1 - 2x + x} \quad \text{(wegen (3))} \\
&= \sqrt{1 - x} \leq \sqrt{1 - x + \frac{x^2}{4}} \\
&= \sqrt{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2} = 1 - \frac{x}{2} \quad \text{(wegen } x < 1\text{)}
\end{aligned}$$

also

$$L(1 - |z|) \geq L\frac{x}{2} \geq L\frac{|z - 1|}{2(M + 1)} = |z - 1| \quad \text{(wegen (5) und (4))}$$

Damit ist die Behauptung (1) gezeigt. Zum Beweis der verbleibenden Behauptung (2) sei $z \in \Delta_{M,c}$ mit $z \neq 1$ gegeben. Dann folgt

$$1 - |z| \geq \frac{|z - 1|}{L} > 0$$

und daher $|z| < 1$, was zu zeigen war. □

Satz 2 (Abelscher Grenzwertsatz) *Gegeben sei eine konvergente Reihe*

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \in \mathbb{C}$$

zu einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit Werten in* $\mathbb{C}$. *Weiter sei* $M \geq 0$ *gegeben. Dann existiert* $c > 0$ *mit*

$$\Delta_{M,c} \subseteq \{z \in \mathbb{C} |\, |z| < 1 \ \vee \ z = 1\}, \tag{6}$$

so dass die auf $\Delta_{M,c}$ *eingeschränkte Potenzreihe*

$$f : \Delta_{M,c} \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

stetig ist.

Beweis: Wir wählen $c > 0$ und $L > 0$ nach dem vorhergehenden Lemma; insbesondere gilt dann die Behauptung (6). Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ besitzt mindestens den Konvergenzradius 1, weil sie für $z = 1$ nach Voraussetzung konvergiert. Insbesondere ist sie in allen Punkten $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ stetig. Wegen Formel (6) ist f in allen Punkten $z \in \Delta_{M,c} \setminus \{1\}$ stetig, da Potenzreihen im *Inneren* ihrer Konvergenzkreisscheibe stetig sind. Es bleibt nur noch der interessanteste Fall $z = 1$ zu behandeln. Zu zeigen ist also:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall z \in \Delta_{M,c} : \left(|z - 1| < \delta \ \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - A \right| < \epsilon \right) \tag{7}$$

Hierzu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Weil die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{C}$ konvergiert, bildet die Folge der Partialsummen

$$b_m := \sum_{n=0}^{m} a_n, \quad m \in \mathbb{N}_0, \tag{8}$$

eine Cauchyfolge. Wir finden also ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $l, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n_0 \leq l \leq m$ gilt:

$$|b_m - b_l| < \frac{\epsilon}{2L} \tag{9}$$

Wegen der Stetigkeit von Polynomfunktionen gilt

$$\sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n \xrightarrow{z \to 1} \sum_{n=0}^{n_0} a_n.$$

Wir nehmen also ein $\delta > 0$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - 1| < \delta$ gilt:

$$\left| \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n \right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{10}$$

Mit dieser Wahl von δ ist vom ursprünglichen Beweisziel (7) nur mehr das folgende Beweisziel übrig geblieben:

$$\forall z \in \Delta_{M,c} : \left(|z - 1| < \delta \ \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - A \right| < \epsilon \right) \tag{11}$$

Zum Beweis hiervon sei $z \in \Delta_{M,c}$ mit $|z - 1| < \delta$ gegeben. Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - A \right| &= \left| \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n \right| + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \right| = \frac{\epsilon}{2} + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n (z^n - 1) \right| \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \lim_{m \to \infty} \left| \sum_{n=n_0+1}^{m} a_n (z^n - 1) \right|
\end{aligned}$$

wobei wir die Stetigkeit des Absolutbetrags verwendet haben. Es genügt nun, noch zu zeigen:

$$\forall m > n_0 : \left| \sum_{n=n_0+1}^{m} a_n(z^n - 1) \right| \leq \frac{\epsilon}{2}, \tag{12}$$

denn damit folgt die zu zeigende Behauptung so:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - A \right| < \frac{\epsilon}{2} + \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{n=n_0+1}^{m} a_n(z^n - 1) \right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Zum Beweis der Behauptung (12) sei $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m > n_0$ gegeben. Die Hauptidee des Beweises besteht nun darin, die Differenz $z^n - 1$ in der folgenden Rechnung mit der geometrischen Summe auszudrücken und dann die Summationsreihenfolge zu vertauschen:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=n_0+1}^{m} a_n(z^n - 1) = \sum_{n=n_0+1}^{m} a_n(z-1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k \\
=&(z-1) \sum_{\substack{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2:\\ n_0<n\leq m,\\ k<n}} a_n z^k = (z-1) \sum_{k=0}^{m-1} z^k \sum_{n=\max\{n_0,k\}+1}^{m} a_n \\
=&(z-1) \sum_{k=0}^{m-1} z^k (b_m - b_{\max\{n_0,k\}}) \quad \text{(siehe (8))}
\end{aligned}$$

Schätzen wir den Betrag davon mit Dreiecksungleichung ab und verwenden nochmal die geometrische Summe, diesmal für die Absolutbeträge:

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{n=n_0+1}^{m} a_n(z^n - 1) \right| = |z-1| \left| \sum_{k=0}^{m-1} z^k (b_m - b_{\max\{n_0,k\}}) \right| \\
\leq&|z-1| \sum_{k=0}^{m-1} |z|^k |b_m - b_{\max\{n_0,k\}}| \leq |z-1| \sum_{k=0}^{m-1} |z|^k \frac{\epsilon}{2L} \quad \text{(wegen (9))} \\
=&|z-1| \frac{1-|z|^m}{1-|z|} \frac{\epsilon}{2L} \leq \frac{|z-1|}{1-|z|} \frac{\epsilon}{2L} \quad \text{(wegen } |z|^m \leq 1) \\
\leq&L \frac{\epsilon}{2L} = \frac{\epsilon}{2} \quad \text{(wegen (1) in Lemma 1)}
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung (12) gezeigt. □

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 10 – Tutorien und Zentralübung

T10.1 Erinnern Sie sich an die Hierarchie wachsender Folgen

$$1 \ll \log\log n \ll \log n \ll n^\alpha \ll n^\beta \ll e^{\gamma n} \ll e^{n^2} \ll e^{e^n} \qquad \text{für } n \to \infty$$

(wobei $0 < \alpha < \beta$ und $\gamma > 0$). Ordnen Sie die nachstehenden Folgen (mit Beweis) in diese Hierarchie ein, so gut Sie es können:

(a) $a_n = \binom{2n}{n}$,

(b) $b_n = n!$,

(c) $c_n = (\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k^2})^{-1}$.

T10.2 Beweisen Sie:

(a) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + O(x^3)$ für $x \to 0$, $x \in \mathbb{C}$.

(b) $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ für $x \to 0$, $x \in \mathbb{C}$.

(c) $\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$ für $x \to 0$, $x \in \mathbb{C}$.

(d) $\frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1 + \frac{x}{4} + o(x))$ für $x \to 0$, $x \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Sie dürfen das Ergebnis von Aufgabe H10.2 verwenden.

(e) $\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{12} + o(x)$ für $x \to 0$, $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

T10.3 *Aus der Klausur zur Analysis 1 des Wintersemesters 2004/05, um einen Hinweis ergänzt:*
Zeigen Sie für ein geeignetes $a \in \mathbb{R}$:

$$\cot(x) = \frac{1}{x} + ax + o(x)$$

für $x \to 0$. Identifizieren Sie a.
Hinweis: Es gilt

$$\cot x = i\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}},$$

falls $x \in \mathbb{C}$ kein ganzzahliges Vielfaches von π ist.

T10.4 Betrachten Sie die Funktion $f : ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \cup (]2,3[\setminus\mathbb{Q}) \to [0,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ x-2 & \text{für } x \in]2,3[\setminus\mathbb{Q} \end{cases}.$$

Zeigen Sie: f ist bijektiv und stetig, aber f^{-1} ist nirgendwo stetig.