LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 1 – Hausaufgaben

H1.1 Es sei $N : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ die Nachfolgerfunktion auf den natürlichen Zahlen. Wir setzen $1 := N(0)$, $2 := N(1)$, $3 := N(2)$ und $4 := N(3)$. Die Addition $+ : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ und die Multiplikation $\cdot : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ werden rekursiv wie folgt definiert: Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\begin{aligned} n + 0 &:= n, \\ n + N(m) &:= N(n+m), \\ n \cdot 0 &:= 0, \\ n \cdot N(m) &:= n \cdot m + n. \end{aligned}$$

Beweisen Sie mit diesen Definitionen:

(a) $1 + 1 = 2$,

(b) $2 + 2 = 4$,

(c) $2 \cdot 2 = 4$.

H1.2 *Der Philosoph, der tritt herein*
Und beweist Euch, es müßt so sein:
Das Erst wär so, das Zweite so,
Und drum das Dritt und Vierte so;
Und wenn das Erst und Zweit nicht wär,
Das Dritt und Viert wär nimmermehr.
Goethe, Faust I

Zeigen Sie, dass die hier bewiesene Aussage

$$[A_1 \wedge A_2 \Rightarrow A_3 \wedge A_4] \wedge [\neg(A_1 \wedge A_2) \Rightarrow \neg(A_3 \wedge A_4)]$$

äquivalent zu folgender Aussage ist:

$$A_1 \wedge A_2 \Leftrightarrow A_3 \wedge A_4$$

H1.3 (a) Es seien A und B Aussagen. Beweisen Sie mit einer Wahrheitstabelle, dass $\neg(A \Rightarrow B)$ den gleichen Wahrheitswert wie $A \wedge \neg B$ besitzt.

(b) Formulieren Sie das Gegenteil der Aussage

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \; \forall y \in \mathbb{R} : \; (|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x^2 - y^2| < \epsilon) \tag{1}$$

mit Hilfe einer prädikatenlogischen Formel, in der alle Quantoren vorne stehen und in der keine Negation vorkommt.
Hinweis: "$\neg\, a < b$" kann durch "$a \geq b$" ersetzt werden.

(c) Versuchen Sie, sich dieses Gegenteil der Aussage (1) an Hand des Graphen der Quadratfunktion anschaulich vorzustellen. *Hinweis:* Zu dieser Teilaufgabe brauchen Sie keine Lösung aufschreiben!

(d) Beweisen Sie das oben formulierte Gegenteil der Aussage (1). Die noch zu zeigende Behauptung sollte im Verlauf Ihres Beweises immer kürzer werden.

(e) Analysieren Sie die logische Struktur Ihres Beweises von eben, indem Sie an allen Stellen, an denen sich die noch zu zeigende Behauptung ändert, diese noch zu zeigende Behauptung und alle durch den vorhergehenden Teil des Beweises gegebenen (relevanten) Aussagen angeben.

Bitte wenden!

H1.4 **Disjunktive Normalform von Junktoren.**

(a) Es seien A, B und C Aussagen. Geben Sie eine Disjunktion $Y_1 \vee \ldots \vee Y_k$ von Aussagen Y_i der Gestalt $a_i \wedge b_i \wedge c_i$ an, wobei a_i bzw. b_i bzw. c_i für A oder $\neg A$ bzw. B oder $\neg B$ bzw. C oder $\neg C$ steht, so dass $Y_1 \vee \ldots \vee Y_k$ den gleichen Wahrheitswert wie

$$(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)$$

besitzt. Beweisen Sie Ihr Ergebnis mit einer Wahrheitstabelle.

(b*) [1] Es seien $A_1, \ldots, A_n$ Aussagen, wobei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jeder n-stellige Junktor $J(A_1, \ldots, A_n)$, aufgefasst als Abbildung $J : \{w, f\}^n \to \{w, f\}$, sich als Disjunktion $Y_1 \vee \ldots \vee Y_k$ einer geeigneten Anzahl $k \in \mathbb{N}_0$ von Aussagen Y_i der Gestalt $a_{i,1} \wedge \ldots \wedge a_{i,n}$ darstellen lässt, wobei jedes $a_{i,j}$ für A_j oder $\neg A_j$ steht. Dabei wird für $k = 0$ die leere Disjunktion mit dem Falsum $\perp$ identifiziert.

H1.5 Lesen und verstehen Sie den Abschnitt 1.2 über Mengen im Skript:
`www.math.lmu.de/~merkl/ws16/ana1/skript.pdf`

H1.6 Griechisches Alphabet zum Einprägen:
α, A (Alpha), β, B (Beta), γ, Γ (Gamma), δ, Δ (Delta), ϵ, E (Epsilon), ζ, Z (Zeta),
η, H (Eta), θ, Θ (Theta), ι, I (Jota), κ, K (Kappa), λ, Λ (Lambda), μ, M (My), ν, N (Ny),
ξ, Ξ (Xi), o, O (Omikron), π, Π (Pi), ρ, P (Rho), σ, Σ (Sigma), τ, T (Tau), υ, Υ (Ypsilon),
ϕ, Φ (Phi), χ, X (Chi), ψ, Ψ (Psi), ω, Ω (Omega)

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 25.10.2016, Abend.

[1] "$*$-Aufgabe." Übersteigt den Standardstoff.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Analysis einer Variablen
Blatt 1 – Tutorien

T1.1 Die Aussage $x \leq y$ für reelle Zahlen x und y ist eine Abkürzung für $x < y \ \vee \ x = y$. Gilt $1 + 1 \leq 2$? Begründung?

T1.2 Es seien A, B und C Aussagen.

(a) Beweisen Sie, dass die Aussagen $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$ und B den gleichen Wahrheitswert besitzen. Formulieren Sie damit eine aussagenlogische Herleitungsregel für Fallunterscheidungen.

(b) Beweisen Sie $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow C) \Rightarrow B \vee C$. Formulieren Sie damit eine aussagenlogische Herleitungsregel zum Beweis einer Disjunktion $B \vee C$ durch Unterscheidung der Fälle A und $\neg A$.

(c) Beweisen Sie $(A \vee B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$. Formulieren Sie damit eine aussagenlogische Herleitungsregel zum Beweis von C (unter Voraussetzungen) durch Fallunterscheidung.

T1.3 Geben Sie bei dem untenstehenden Beweis an den mit $\boxed{*_i}$ gekennzeichneten Stellen jeweils an, welche Behauptung an dieser Stelle noch zu beweisen ist und welche (relevanten) Aussagen an dieser Stelle durch den vorhergehenden Teil des Beweises gegeben sind. Geben Sie auch an den mit (j) gekennzeichneten Stellen jeweils an, welche an dieser Stelle gegebenen Aussagen und welche allgemeinen Aussagen über reelle Zahlen hier implizit verwendet werden.

`Es gilt`

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x > 0 \ \forall y > x : \ (y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} < \epsilon).$$

Beweis: $\boxed{*_1}$ `Es sei` $\epsilon > 0$ `gegeben.` $\boxed{*_2}$ `Wir setzen` $\delta := \epsilon^2 > 0$. $\boxed{*_3}$ `Nun sei` $x > 0$ `gegeben.` $\boxed{*_4}$ `Es sei weiter` y `mit` $y > x$ `gegeben.` $\boxed{*_5}$ `Es gelte` $y - x < \delta$. $\boxed{*_6}$ `Dann folgt`

$$\sqrt{y} + \sqrt{x} \overset{(1)}{\geq} \sqrt{y} \overset{(2)}{\geq} \sqrt{y - x}$$

`und damit`

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x})}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \overset{(3)}{=} \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \overset{(4)}{\leq} \frac{y - x}{\sqrt{y - x}} = \sqrt{y - x} \overset{(5)}{<} \sqrt{\delta}.$$

`Das war zu zeigen. (6)` $\boxed{*_7}$

T1.4 *(nach C. Blatter, ETH Zürich)* Aus einem Zoologiebuch: "Jede ungebrochselte Kalupe ist dorig und jede foberante Kalupe ist dorig. In Quasiland gibt es sowohl dorige wie undorige Kalupen." Welche der nachstehenden Schlüsse über die Fauna von Quasiland sind zulässig?

(a) Es gibt sowohl gebrochselte wie ungebrochselte Kalupen.

(b) Es gibt gebrochselte Kalupen.

(c) Alle undorigen Kalupen sind gebrochselt.

(d) Einige gebrochselte Kalupen sind unfoberant.

(e) Alle gebrochselten Kalupen sind unfoberant.