Aufgabe 1:

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}(X=n \wedge n+Y=k) = \sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}(X=n \wedge Y=k-n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}(X=n)\cdot\mathbb{P}(Y=k-n) = \sum_{n=0}^{k} \frac{e^{-\mu}}{n!}\cdot\mu^n\cdot\frac{e^{-\nu}}{(k-n)!}\cdot\nu^{k-n} =$$

$\uparrow$ Unabhängigkeit von X und Y

$$= e^{-(\mu+\nu)}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}\cdot\frac{1}{k!}\cdot\mu^n\cdot\nu^{k-n} = e^{-(\mu+\nu)}\cdot\frac{1}{k!}\cdot\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}\cdot\mu^n\cdot\nu^{k-n} =$$

$$= e^{-(\mu+\nu)}\cdot\frac{(\mu+\nu)^k}{k!}$$

Da die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ von den Mengen $\{k\}, k\in\mathbb{N}_0$ erzeugt wird, folgt mit dem Eindeutigkeitssatz für W'Maße, dass $X+Y$ die Verteilung „Poisson $(\mu+\nu)$" hat.

Aufgabe 2:

Berechne zuerst die Verteilung von $X+Y$. Seien $f = \mathbb{1}_{]0,1[}$ und $g = \mathbb{1}_{]0,1[}$ die Dichten von X und Y. Es folgt für die Dichte von $X+Y$:

$$\underset{h(x)}{\underbrace{f*g(x)}} = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]0,1[}(x-y)\cdot\mathbb{1}_{]0,1[}(y)\,dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)\cdot\mathbb{1}_{]0,1[}(x-y)\cdot\mathbb{1}_{]0,1[}(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[1,2[}(x)\cdot\mathbb{1}_{]0,1[}(x-y)\cdot\mathbb{1}_{]0,1[}(y)\,dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)\cdot\mathbb{1}_{]0,x[}(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[1,2[}(x)\cdot\mathbb{1}_{]x-1,1[}(y)\,dy =$$

$$= \mathbb{1}_{]0,1[}(x)\cdot[y]_0^x + \mathbb{1}_{[1,2[}(x)\cdot[y]_{x-1}^{1} = \mathbb{1}_{]0,1[}(x)\cdot x + \mathbb{1}_{[1,2[}\cdot(2-x)$$

Sei $a = \mathbb{1}_{]0,1[}$ die Dichte von der Verteilung von Z.

Berechne nun mit Hilfe von $h(x)$ die Dichte der Verteilung von $X+Y+Z$.

$$b(x) = \int_{\mathbb{R}} a(x-y)\, h(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]0,1[}(x-y) \cdot \left(\mathbb{1}_{]0,1]}(y) \cdot y + \mathbb{1}_{[1,2[}(y) \cdot (2-y) \right) dy =$$

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]0,1[}(x-y) \cdot \mathbb{1}_{]0,1[}(y) \cdot y \, dy}_{I)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[1,2[}(y) \cdot (2-y) \cdot \mathbb{1}_{]0,1[}(x-y)\, dy}_{II)}$$

Analog vorhin folgt für $I)$:

$$I = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]0,1[}(x) \cdot \mathbb{1}_{]0,x[}(y) \cdot y\, dy + \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[1,2[}(x) \cdot \mathbb{1}_{]x-1,1[}(y) \cdot y\, dy =$$

$$= \mathbb{1}_{]0,1[}(x) \cdot \left[\tfrac{1}{2} y^2 \right]_0^x + \mathbb{1}_{[1,2[}(x) \cdot \left[\tfrac{1}{2} y^2 \right]_{x-1}^1 =$$

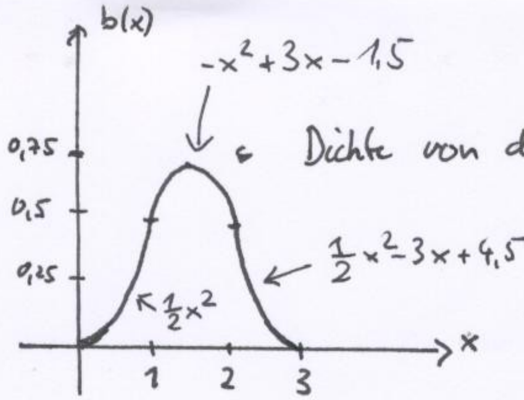
$$= \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \mathbb{1}_{]0,1[}(x) + \mathbb{1}_{[1,2[}(x) \cdot \left(x - \tfrac{1}{2} x^2 \right)$$

$$II = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]1,2[}(x) \cdot \mathbb{1}_{]1,x[}(y) \cdot (2-y)\, dy + \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[2,3[}(x) \cdot \mathbb{1}_{]x-1,2[}(y) \cdot (2-y)\, dy =$$

$$= \mathbb{1}_{]1,2[}(x) \cdot \left[2y - \tfrac{1}{2} y^2 \right]_1^x + \mathbb{1}_{[2,3[}(x) \cdot \left[2y - \tfrac{1}{2} y^2 \right]_{x-1}^2 =$$

$$= \mathbb{1}_{]1,2[}(x) \cdot \left(2x - \tfrac{1}{2} x^2 - 1{,}5 \right) + \mathbb{1}_{[2,3[}(x) \cdot \left(\tfrac{1}{2} x^2 - 3x + 4{,}5 \right).$$

$$\Rightarrow b(x) = I + II = \tfrac{1}{2} x^2\, \mathbb{1}_{]0,1[}(x) + \left(-x^2 + 3x - 1{,}5 \right) \mathbb{1}_{[1,2[}(x) + \left(\tfrac{1}{2} x^2 - 3x + 4{,}5 \right) \mathbb{1}_{[2,3[}(x)$$



$=$ Dichte von der Verteilung von $X+Y+Z$

Aufgabe 3:

Es gilt: $H(V) = \frac{1}{2} m \cdot \|V\|_2^2$, wobei $V = (V_1, V_2, V_3)$. Weiter sei $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Damit folgt: $$\mathbb{P}(H(V) \leq t) = \int_{\mathbb{R}^3} 1\!\!1_{\{\frac{1}{2}m(v_1^2+v_2^2+v_3^2) \leq t\}} \cdot \frac{1}{Z} e^{-\frac{m(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}{2kT}} dv =$$

$$\underset{\text{Fubini}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{\{\frac{1}{2}m(v_1^2+v_2^2+v_3^2) \leq t\}} \cdot \frac{1}{Z} e^{-\frac{m(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}{2kT}} dv_1 dv_2 dv_3 \underset{(*)}{=}$$

Verwende Kugelkoordinaten:

$$g: \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ r \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} r\cos\beta\cos\alpha \\ r\cos\beta\sin\alpha \\ r\sin\beta \end{pmatrix}$$, wobei g ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus von

$\underbrace{]0,2\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]0,\infty[}_{=A} \longrightarrow g(A) \subset \mathbb{R}^3$ ist, aber gilt: $\mathbb{R}^3 \setminus g(A)$ ist eine Nullmenge.

$$\underset{(*)}{=} \int_0^\infty \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{Z} \cdot 1\!\!1_{\{\frac{1}{2}mr^2 \leq t\}} e^{-\frac{mr}{2kT}} \cos\beta \, r^2 \, d\alpha \, d\beta \, dr =$$

$$= \int_0^\infty \frac{4\pi}{Z} 1\!\!1_{\{\frac{1}{2}mr^2 \leq t\}} e^{-\frac{mr}{2kT}} r^2 dr =$$

Setze: $\frac{1}{2}mr^2 = x \Rightarrow \frac{dx}{dr} = mr$

$\Downarrow$

$r = \sqrt{\frac{2x}{m}}$

$$= \int_0^\infty \frac{4\pi}{mZ} \cdot 1\!\!1_{\{\frac{1}{2}mr^2 \leq t\}} e^{-\frac{mr}{2kT}} \cdot r \, dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{4\pi\sqrt{2}}{Z \cdot m^{\frac{3}{2}}} 1\!\!1_{\{x \leq t\}} e^{-\frac{x}{kT}} \cdot \sqrt{x} \, dx =$$

$$\underset{Z = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{-\frac{3}{2}}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{x} \, e^{-\frac{x}{kT}} \cdot 1\!\!1_{\{x \leq t\}} dx = \int_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{kT}x} 1\!\!1_{\{x \leq t\}} dx$$

Also ist $H(V)$ gammaverteilt mit Parameter $\frac{1}{kT}$ und $\frac{3}{2}$. ($\Leftrightarrow H(V) \sim \mathrm{Gamma}\left(\frac{1}{kT}, \frac{3}{2}\right)$)

$$\mathbb{P}(\|V\|_2 \le t) = \int_{\mathbb{R}^3} 1\!\!1_{\{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2} \le t\}} \cdot \frac{1}{Z} \cdot e^{-\frac{m(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}{2kT}} \, dv =$$

$$\underset{\text{Fubini}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{\{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2} \le t\}} \cdot \frac{1}{Z} \cdot e^{-\frac{m(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}{2kT}} \, dv_1 \, dv_2 \, dv_3 =$$

$$\underset{\text{Kugelkoordinaten}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_0^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 1\!\!1_{\{r \le t\}} \cdot \frac{1}{Z} \cdot e^{-\frac{mr^2}{2kT}} \cdot \cos\beta \, r^2 \, d\alpha \, d\beta \, dr =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{4\pi}{Z} \cdot 1\!\!1_{\{r \le t\}} \cdot e^{-\frac{mr^2}{2kT}} \cdot r^2 \, dr$$

Es folgt für die Dichte der Verteilung von $\|V\|_2$: $f(x) = \frac{4\pi}{Z} \cdot x^2 \cdot e^{-\frac{mx^2}{2kT}} \cdot 1\!\!1_{[0,\infty[}(x)$

(Eindeutigkeitssatz für W'Maße)

Aufgabe 4:

a) Zeige, dass für die Dichte der Verteilung der T_n gilt: $f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} a^n e^{-ax} 1\!\!1_{[0,\infty[}(x)$

($T_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, wobei X_i exponentialverteilt mit Parameter $a>0$ ist und $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig sind)

Beweis mit Induktion:

Für $n=1$ gilt die Behauptung trivialerweise.

Zeige jetzt: $n \rightsquigarrow n+1$.

Es gilt: $f_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(y) g(x-y)\, dy$ $(*)$ mit $g(y) = a e^{-ay} 1\!\!1_{[0,\infty[}(y)$

$$(*) = \int_{\mathbb{R}} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} a^n e^{-ay} 1\!\!1_{[0,\infty[}(y)\, a \cdot e^{-a(x-y)} 1\!\!1_{[0,\infty[}(x-y)\, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \cdot a^{n+1} e^{-ax} 1\!\!1_{[0,x[}(y)\, dy = a^{n+1} e^{-ax} \int_{\mathbb{R}} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \cdot 1\!\!1_{[0,x[}(y)\, dy =$$

$$= a^{n+1} e^{-ax} \left[\frac{y^n}{n!}\right]_0^x = \frac{x^n}{n!} a^{n+1} e^{-ax} \quad (= f_{n+1}(x))$$

$\Rightarrow$ Behauptung. Dies impliziert auch folgendes: $\underbrace{[\text{Gamma}(a,1)]^{*n}}_{n\text{-fache Faltung}} = \text{Gamma}(a,n)$

b) Definiere zuerst den Poissonprozess $N(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

$N(t) = \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \in \mathbb{N}}} 1\!\!1_{]0,t]}(T_k)$. Da $\{N(t)=k\} = \{T_k \leq t\} \setminus \{T_{k+1} \leq t\}$ und $\{T_{k+1} \leq t\} \subset \{T_k \leq t\}$.

Es folgt für $k \geq 1$. $\mathbb{P}(N(t)=k) = \text{Gamma}(a,k)(]0,t[) - \text{Gamma}(a,k+1)(]0,t[) =$

$$= \int_0^t \left(\frac{a^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-ax} - \frac{a^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \cdot x^k \cdot e^{-ax}\right) dx = \left[\frac{a^k}{\Gamma(k+1)} x^k e^{-ax}\right]_0^t = e^{-at} \frac{(at)^k}{k!};$$

Für $k=0$ gilt: $\mathbb{P}(N(t)=0) = \int_t^\infty a e^{-ax}\, dx = \left[-e^{-ax}\right]_t^\infty = e^{-at} \left(= e^{-at} \cdot \frac{(at)^0}{0!}\right)$

Damit ist $N(t)$ poissonverteilt mit Parameter $\lambda = at$.

Aufgabe 5:

a) Sei $X \sim N(b,A)$. Es folgt trivialerweise, dass $X+c \sim N(b+c, A)$ für ein $c \in \mathbb{R}^n$, da es sich hierbei nur um eine Verschiebung der Verteilung handelt.

Sei also o.B.d.A $c=0$.

Setze jetzt: $g^{-1}(x) = L \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow g(x) = L^{-1} x$, da L invertierbar.

$$\Rightarrow Dg(x) = L^{-1} \Rightarrow |\mathrm{Det}\, Dg(x)| = |\mathrm{Det}(L^{-1})| = \frac{1}{|\mathrm{Det}(L)|}$$

$\Rightarrow$ Da g ein bijektiver Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist folgt:

$$h(x) = f \circ g(x) \cdot |\mathrm{Det}\, Dg(x)| =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(L^{-1}x-b)^T A^{-1}(L^{-1}x-b)\right) \cdot \frac{1}{|\mathrm{Det}(L)|} =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \left(\det(A) \cdot (\det(L))^2\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(L^{-1}x - L^{-1}Lb)^T A^{-1}(L^{-1}x - L^{-1}Lb)\right) =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \left(\det(L)\det(A)\cdot\det(L^T)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(x-Lb)(L^{-1})^T A^{-1} L^{-1}(x-Lb)\right) =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \left(\det(LAL^T)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(x-Lb)\,(LAL^T)^{-1}(x-Lb)\right)$$

$$\Rightarrow h(X) = LX \sim N(Lb, LAL^T) \Rightarrow LX+c \sim N(Lb+c, LAL^T)$$

b) Da X n-dimensional standardnormalverteilt folgt für die Dichte f von X.

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot (\det E)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\tfrac{1}{2} x^T E^{-1} x\right) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)\right)$$

Sei $n-m = k \geq 1$.

Es folgt für die Dichte von $Y = (X_1, \dots X_m)$ nach dem Satz über die Dichte von Randverteilungen.

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp(-\tfrac{1}{2}\|x\|_2^2)\, dx_{m+1} \dots dx_n =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp(-\tfrac{1}{2}(x_1^2 + \dots x_m^2)) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^k} \exp(-\tfrac{1}{2}(x_{m+1}^2 + \dots x_n^2))\, dx_{m+1} \dots dx_n}_{\text{nach Analysis } = (2\pi)^{\frac{k}{2}}} =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{k}{2}} \exp(-\tfrac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_m^2)) =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \exp(-\tfrac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_m^2)) \Rightarrow \text{Behauptung}$$

c) Nach a) sei wieder o.B.d.A. $c = 0$.

Wir wählen für das durch C^{-1} gegebene Skalarprodukt (C und damit auch C^{-1} positiv definit und symmetrisch) eine Orthonormalbasis $w_{m+1}, \dots, w_n$ vom $\mathrm{Ker}(L)$ und ergänzen sie zu einer ONB $w_1, \dots, w_n$ von $\mathbb{R}^n$.

Sei W die Matrix mit den Spalten w_i und damit $W \in GL(n, \mathbb{R})$.

Definiere nun $\ell_1(x) = W^{-1}x - W^{-1}b$. Es folgt: $\mathcal{L}(\ell_1(x)) =$

$= \mathcal{N}(W^{-1}b - W^{-1}b, W^{-1} \cdot A \cdot (W^{-1})^T) = \mathcal{N}(0, (W^T \cdot A^{-1} W)^{-1}) = \mathcal{N}(0, \mathbb{1}_n)$

Sei $\Pi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nun die Matrix der Projektion $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$.

Nun gilt: $\mathrm{Ker}(L \cdot W) = 0 \times \mathbb{R}^k = \mathrm{Ker}(\Pi)$. Es gibt folglich ein $U \in GL(m, \mathbb{R})$ mit $L \cdot W = U \cdot \Pi$. Setze nun: $\ell_3(x) = Ux + L \cdot W^{-1} \cdot b$. Es folgt mit

$\ell_1^{-1}(x) = Wx + W^{-1} \cdot b$: $\quad \ell(x) \circ \ell_1^{-1}(x) = L \cdot (Wx + W^{-1} \cdot b) = L \cdot W \cdot x + L \cdot W^{-1} \cdot b =$

$$= \Pi \cdot x + L W^{-1} \cdot b = \ell_3(\Pi x) = \ell_3 \circ \ell_2(x)$$

Es gilt also: $\ell(x) = \ell_3 \circ \ell_2 \circ \ell_1(x) \;\forall x \Rightarrow \ell = \ell_3 \circ \ell_2 \circ \ell_1$.

Außerdem haben ℓ_3, ℓ_2, ℓ_1 die geforderten Eigenschaften.

Die Behauptung folgt jetzt aus folgender Aussage. Falls die Aussage für L_1 und L_2 gilt können wir sie für $L_1 L_2$ nachrechnen.

$X \sim \mathcal{N}(b, A) \Rightarrow L_1 X \sim \mathcal{N}(L_1 b, L_1 \cdot A \cdot L_1^T) \Rightarrow L_2 \cdot (L_1 X) \sim \mathcal{N}(L_2 \cdot L_1 \cdot b, L_2 L_1 A \cdot L_1^T \cdot L_2^T) =$

$= \mathcal{N}(L_2 \cdot L_1 \cdot b,\ L_2 \cdot L_1 \cdot A \cdot (L_2 \cdot L_1)^T) \Rightarrow (L_2 \cdot L_1) \cdot X \sim \mathcal{N}(L_2 \cdot L_1 \cdot b,\ L_2 \cdot L_1 \cdot A\,(L_2 \cdot L_1)^T)$

Aufgabe 6:

a) Sei $f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x-b)^T A^{-1}(x-b)\right)$ die Dichte von X

und $g(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det A')^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(y-b')^T A'^{-1}(y-b')\right)$ die Dichte von Y.

Da X und Y unabhängig folgt für die gemeinsame Dichte $h(x,y)$ von (X,Y), nach Übungsblatt 8 Aufgabe 3, dass gilt: $h(x,y) = f(x) \cdot g(y) =$

$= (2\pi)^{-n} \cdot (\det A \cdot \det A')^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-b)^T \cdot A^{-1}(x-b) - \frac{1}{2}(y-b')^T \cdot A'^{-1}(y-b')\right) =$

$= (2\pi)^{-n} \cdot (\det(A \cdot A')) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left[(x-b)^T \cdot A^{-1}(x-b) + (y-b')^T \cdot A'^{-1}(y-b')\right]\right) =$

$= (2\pi)^{-n} (\det(A^*)) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} x-b \\ y-b' \end{pmatrix}^T \cdot A^{*-1} \cdot \begin{pmatrix} x-b \\ y-b' \end{pmatrix}\right]\right) =$

$= (2\pi)^{-n} (\det(A^*)) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-b \\ y-b' \end{pmatrix}^T \cdot A^{*-1} \cdot \begin{pmatrix} x-b \\ y-b' \end{pmatrix}\right)$, wobei $A^* = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$

Es gilt außerdem A^* ist symmetrisch und positiv definit, da A und A' diese Eigenschaften aufweisen.

$\Rightarrow$ Behauptung

b) Setze $L = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{n\text{-Spalten}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{n\text{-Spalten}} \Big\}\ n$ Zeilen also $L \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$.

Außerdem ist trivialerweise $L: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ surjektiv. Es folgt Teil c) der Aufgabe 5 ist anwendbar.

Einerseits gilt nun $X+Y = L \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. Andererseits gilt:

$L \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(L \cdot \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}, L \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \cdot L^T\right) = \mathcal{N}\left(b+b', L \cdot \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}\right) = \mathcal{N}(b+b', A+A')$

$\Rightarrow$ Behauptung