Einführung in die Stochastik, Blatt 8

Andreas Fackler

2. Dezember 2007

Aufgabe 5

Die Menge der Sehnen identifizieren wir mit der Menge $\Omega = \{(\Phi, \Psi) \in [0, 2\pi[^2 \mid \Phi \leq \Psi\}$, wobei das Element $(\Phi, \Psi) \in \widetilde{\Omega}$ die Sehne bezeichnet, die durch die Punkte $(\cos(\Phi), \sin(\Phi))$ und $(\cos(\Psi), \sin(\Psi))$ geht. Aus technischen Gründen empfiehlt es sich jedoch, zunächst den gesamten Raum $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^2$ zu betrachten und eine Abbildung zu definieren, welche jedem Paar $(\widetilde{\Phi}, \widetilde{\Psi})$ die durch die Punkte $(\cos(\widetilde{\Phi}), \sin(\widetilde{\Phi}))$ und $(\cos(\widetilde{\Psi}), \sin(\widetilde{\Psi}))$ verlaufende Sehne in Ω zuzuordnet:

$$p: \quad \widetilde{\Omega} \to \Omega, \quad p(\widetilde{\Phi}, \widetilde{\Psi}) = \begin{cases} (\Phi, \Psi), & \text{falls } \Phi \leq \Psi \\ (\Psi, \Phi), & \text{falls } \Phi > \Psi \end{cases} \text{ und}$$

$$\widetilde{\Phi} = \Phi + 2k\pi, \widetilde{\Psi} = \Psi + 2l\pi \text{ mit } k, l \in \mathbb{Z} \text{ und } \Phi, \Psi \in [0, 2\pi[$$

Beide Mengen versehen wir mir der jeweiligen Borel-σ-Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$ und $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{B}(\widetilde{\Omega})$. Für $k, l \in \mathbb{Z}$ sei

$$\begin{aligned} \Delta_{k,l} &:= \{(\Phi + 2k\pi, \Psi + 2l\pi) \mid (\Phi, \Psi) \in]0, 2\pi[^2, \Phi < \Psi\} \text{ und} \\ \widehat{\Delta}_{k,l} &:= \{(\Phi + 2k\pi, \Psi + 2l\pi) \mid (\Phi, \Psi) \in]0, 2\pi[^2, \Phi > \Psi\}. \end{aligned}$$

Dann ist jeweils $p_{k,l} := p|_{\Delta_{k,l}}$ bzw. $\widehat{p}_{k,l} := p|_{\widehat{\Delta}_{k,l}}$ ein Diffeomorphismus von $\Delta_{k,l}$ bzw. $\widehat{\Delta}_{k,l}$ nach $\Delta_{0,0} \subset \Omega$ mit Funktionaldeterminante 1 bzw. -1.

Sei nun Q ein Maß auf $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{A}})$ mit einer Dichte f. Da $\widetilde{\Omega} \setminus \bigcup_{k,l \in \mathbb{Z}} (\Delta_{k,l} \cup \widehat{\Delta}_{k,l})$ eine Nullmenge bezüglich λ_2 ist, gilt für $A \in \Omega$:

$$\mathcal{L}_Q(p)(A) = Q(p^{-1}[A]) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} Q(p_{k,l}^{-1}[A]) + Q(\widehat{p}_{k,l}^{-1}[A]) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \int_A f \circ p_{k,l}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_A f \circ \widehat{p}_{k,l}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$$

Also ist die Dichte des Bildmaßes $\mathcal{L}_Q(p)$ genau die Summe:

$$\sum_{k,l \in \mathbb{Z}} f \circ p_{k,l}^{-1} + f \circ \widehat{p}_{k,l}^{-1}$$

Wir werden auch im folgenden oft implizit Nullmengen ignorieren, um offene Definitionsbereiche für Diffeormophismen zu erhalten und Dichtefunktionen kürzer aufzuschreiben. Beachte hierzu, dass eine auf einer Nullmenge abgeänderte Dichtefunktion immer noch dasselbe Maß beschreibt.

(a)

1. Sei $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{A}}, Q_1)$ die Gleichverteilung auf $[0, 2\pi[^2$, also die Verteilung mit der Dichte $\widetilde{f}_1 = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \mathbf{1}_{\Delta_{0,0} \cup \widehat{\Delta}_{0,0}}$. Wird (Φ, Ψ) gezogen, so wählen wir die Sehne $p(\Phi, \Psi)$ aus. Dies entspricht der angegebenen Vorgehensweise. P_1 ist also das Bildmaß von Q_1 unter p. Nach obiger Bemerkung ist P_1 also die Gleichverteilung auf $(\Omega, \mathcal{A})$, mit der Dichte:

$$f_1 = \widetilde{f_1} \circ p_{0,0}^{-1} + \widetilde{f_1} \circ \widehat{p_{0,0}^{-1}} = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \mathbf{1}_{\Delta_{0,0}}$$

2. Sei $B = [0, 2\pi[\times [0, \pi[$, $(B, \mathcal{B}(B), Q_2)$ die Gleichverteilung auf B, also die Verteilung mit der Dichte $\frac{1}{2\pi^2} \cdot \mathbf{1}_B$. Wird (Ψ, Φ) gezogen, so drehen wir wie beschrieben die Tangente im Punkt $(\cos(\Psi), \sin(\Psi))$ um den Winkel Φ. Man überlegt sich leicht, dass dann der zweite Endpunkt der Sehne $(\cos(\Psi + 2\Phi), \sin(\Psi + 2\Phi))$ ist. Setzen wir also

$$g: \quad B \to \widetilde{\Omega}, \quad f(\Psi, \Phi) = (\Psi, \Psi + 2\Phi),$$

so ist P_2 das Bildmaß von Q_2 unter $p \circ g$. Nach dem Satz über die Transformation von Dichten hat das Bildmaß unter g die Dichte

$$\frac{1}{2\pi^2} \cdot \mathbf{1}_{g[B]} \cdot |\det Dg^{-1}|$$

Da $\det Dg(\Psi, \Psi + 2\Phi) = 2$ für alle Ψ und Φ, ist $\det Dg^{-1}$ konstant $\frac{1}{2}$, und weil $g[B] = \{(\Psi, \Phi) \mid \Psi \in]0, 2\pi[, \Phi - \Psi \in]0, 2\pi[\}$ bis auf eine Nullmenge gleich $\Delta_{0,0} \cup \widehat{\Delta}_{0,-1}$ ist, ist eine Dichte von $\mathcal{L}_{Q_2}(g)$:

$$\widetilde{f_2} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \mathbf{1}_{\Delta_{0,0} \cup \widehat{\Delta}_{0,-1}}$$

P_2 ist das Bildmaß hiervon unter p, also wieder die Gleichverteilung mit der Dichte:

$$f_2 = \widetilde{f_2} \circ p_{0,0}^{-1} + \widetilde{f_2} \circ \widehat{p_{0,-1}^{-1}} = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \mathbf{1}_{\Delta_{0,0}}$$

3. Sei schließlich $C =]-1, 1[\times]0, 2\pi[$, $(C, \mathcal{B}(C), Q_3)$ die Gleichverteilung auf C, mit der Dichte $\frac{1}{4\pi} \cdot \mathbf{1}_C$. Wird (y, Φ) gezogen, so drehen wir die vertikale Gerade durch $(y, 0)$ um den Winkel Φ. (Wir beginnen hier, anders als in der Angabe, mit einer vertikalen Geraden, da dies die folgende Rechnung etwas vereinfacht. Beide Vorgehensweisen beschreiben offenbar das gleiche Modell.) Dies entspricht dann der Sehne $p \circ h(y, \Phi)$, wobei

$$h: \quad C \to \widetilde{\Omega}, \quad f(y, \Phi) = (\Phi - \arccos(y), \Phi + \arccos(y)),$$

denn die vertikale Gerade durch $(y, 0)$ trifft den Einheitskreis in den Punkten mit den Winkeln $\arccos(y)$ und $-\arccos(y)$. $\mathcal{L}_{Q_3}(h)$ hat also die Dichte

$$\widetilde{f_3} = \frac{1}{4\pi} \cdot \mathbf{1}_{h[C]} \cdot |\det Dh^{-1}|.$$

Nun ist $h^{-1}(\Phi, \Psi) = (\cos(\frac{\Psi - \Phi}{2}), \frac{\Phi + \Psi}{2})$, also $\det Dh^{-1}(\Phi, \Psi) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\Psi - \Phi}{2})$. Weiterhin ist $h[C] = \{(\Phi, \Psi) \mid \Phi + \Psi \in]0, 4\pi[, \Psi - \Phi \in]0, 2\pi[\} =: E$, also ist die Dichte gleich

$$\widetilde{f_3}(\Phi, \Psi) = \frac{1}{4\pi} \cdot \mathbf{1}_E(\Phi, \Psi) \cdot \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\Psi - \Phi}{2}\right) = \mathbf{1}_E(\Phi, \Psi) \cdot \frac{\sin(\frac{\Psi - \Phi}{2})}{8\pi}.$$

(Beachte, dass der Sinus in $[0, \pi]$ nicht negativ ist, die Betragsstriche also tatsächlich weggelassen werden können.) E ist aber bis auf eine Nullmenge genau $\Delta_{0,0}$, vereinigt mit der unteren Hälfte von $\widehat{\Delta}_{0,-1}$ und der oberen Hälfte von $\widehat{\Delta}_{-1,0}$. Ist $(\widetilde{\Phi}, \widetilde{\Psi}) = \widehat{p_{-1,0}^{-1}}(\Phi, \Psi)$, so ist $\frac{\widetilde{\Psi} - \widetilde{\Phi}}{2} = \pi - \frac{\Psi - \Phi}{2}$, also $\sin(\frac{\widetilde{\Psi} - \widetilde{\Phi}}{2}) = \sin(\frac{\Psi - \Phi}{2})$. Folglich ist $\widetilde{f_3} \circ \widehat{p_{-1,0}^{-1}}$ genau in der oberen Hälfte von $\Delta_{0,0}$ gleich $\frac{1}{8\pi}\sin(\frac{\Psi - \Phi}{2})$ und sonst 0. Analoges gilt für $\widetilde{f_3} \circ \widehat{p_{0,-1}^{-1}}$. Die Dichte von $\mathcal{L}_{Q_3}(p \circ h) = \mathcal{L}_{\mathcal{L}_{Q_3}(h)}(p)$ ist also

$$f_3(\Phi, \Psi) = (\widetilde{f_3} \circ p_{0,0}^{-1} + \widetilde{f_3} \circ \widehat{p_{-1,0}^{-1}} + \widetilde{f_3} \circ \widehat{p_{0,-1}^{-1}})(\Phi, \Psi) = \frac{\sin(\frac{\Psi - \Phi}{2})}{4\pi} \cdot \mathbf{1}_{\Delta_{0,0}}(\Phi, \Psi)$$

(wobei die zweite Gleichheit nur fast überall gilt).

(b)

Da $P_1 = P_2$ die Gleichverteilung auf Ω mit der Dichte $\frac{1}{2\pi^2}$ ist, hat P_3 als Dichte bezüglich P_1 und P_2 die Funktion

$$(\Phi, \Psi) \mapsto \frac{\pi \sin(\frac{\Psi - \Phi}{2})}{2},$$

denn für $A \in \mathcal{A}$ gilt nach Blatt 4, Aufgabe 6:

$$\int_A \frac{\pi \sin(\frac{\Psi-\Phi}{2})}{2} \, \mathrm{d}P_1 = \int_A \frac{\pi \sin(\frac{\Psi-\Phi}{2})}{2} \cdot \frac{1}{2\pi^2} \, \mathrm{d}\lambda_2 = \int_A \frac{\sin(\frac{\Psi-\Phi}{2})}{4\pi} \, \mathrm{d}\lambda_2 = \int_A f_3 \, \mathrm{d}\lambda_2 = P_3(A)$$

Umgekehrt haben P_1 und P_2 bezüglich P_3 die Dichte

$$(\Phi, \Psi) \mapsto \frac{2}{\pi \sin(\frac{\Psi-\Phi}{2})},$$

denn wieder gilt nach Blatt 4, Aufgabe 6:

$$\int_A \frac{2}{\pi \sin(\frac{\Psi-\Phi}{2})} \, \mathrm{d}P_3 \quad = \quad \int_A \frac{2}{\pi \sin(\frac{\Psi-\Phi}{2})} \frac{\pi \sin(\frac{\Psi-\Phi}{2})}{2} \, \mathrm{d}P_1 = \int_A \mathrm{d}P_1 = P_1(A)$$

(c)

Die Modelle stimmen nicht überein, da die unterschiedlichen Verfahren, eine zufällige Sehne auszuwählen, nicht die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge der Sehnen beschreiben. Bei den ersten beiden Modellen ist beispielsweise der Winkel zwischen den beiden Endpunkten auf $[0, \pi]$ gleichverteilt. Beim dritten Modell hingegen wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit $|Y| < \frac{1}{2}$ und $|Y| > \frac{1}{2}$, der Winkel also mit gleicher Wahrscheinlichkeit größer und kleiner als $\frac{2}{3}\pi$ sein.