Aufgabe 1:

a) Sei $\Omega = \{1,2,3,4\} \times \underbrace{\{0,1\}^2}_{(*)} = \Omega_1 \times \Omega_2$

In $(*)$ gilt:

0 bedeutet es wurde ein blauer Ball gezogen.

1 bedeutet es wurde ein roter Ball gezogen.

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\}) = \rho_1(\omega_1) \cdot \rho_{2|\omega_1}(\omega_2) \cdot \rho_{3|\omega_1,\omega_2}(\omega_3)$

wobei: $\rho_1(\omega_1) = \left\{ \frac{k}{10} \right.$ für $\omega_1 = k$, $k \in \{1,2,3,4\}$

$$\rho_{2|\omega_1}(\omega_2) = \begin{cases} \frac{4-\omega_1}{3} & \text{für } \omega_2 = 0 \\ \frac{\omega_1 - 1}{3} & \text{für } \omega_2 = 1 \end{cases}$$

$$\rho_{3|\omega_1,\omega_2}(\omega_3) = \rho_{3|\omega_1}(\omega_3) = \begin{cases} \frac{4-\omega_1}{3} & \text{für } \omega_3 = 0 \\ \frac{\omega_1 - 1}{3} & \text{für } \omega_3 = 1 \end{cases}$$

Bezeichne Y die Zufallsvariable die das zweistufige Zufallsexperiment beschreibt.

Sei nun $Y: \Omega \to \Omega$ mit $Y(\omega) = \omega$.

Sei weiter X die Projektion auf Ω_1 und Z die Projektion auf Ω_2.
(X also wie in der Angabe die zufällige Augenzahl des Tetraeders.)

b) $\mathbb{P}(\text{"beide gezogenen Bälle sind rot"}) = \mathbb{P}(Z = (1,1)) = \mathbb{P}(Z=(1,1) / X=1) +$
$+ \mathbb{P}(Z=(1,1) / X=2) + \mathbb{P}(Z=(1,1) / X=3) + \mathbb{P}(Z=(1,1) / X=4) =$
$= \frac{1}{10} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{10} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{9}$

c) $$\mathbb{P}(X=k \mid Z=(1,1)) = \frac{\mathbb{P}(X=k \cap Z=(1,1))}{\mathbb{P}(Z=(1,1))} = \frac{\mathbb{P}(Y=(k,1,1))}{\mathbb{P}(Z=(1,1))} =$$

$$= \frac{\frac{k}{10}\cdot\left(\frac{k-1}{3}\right)^2}{\frac{5}{9}}$$

Es ergeben sich also folgende Ergebnisse:

$\mathbb{P}(X=1 \mid Z=(1,1)) = 0$;

$\mathbb{P}(X=2 \mid Z=(1,1)) = \frac{1}{25}$;

$\mathbb{P}(X=3 \mid Z=(1,1)) = \frac{6}{25}$;

$\mathbb{P}(X=4 \mid Z=(1,1)) = \frac{18}{25}$;

Aufgabe 2:

a) Eine "1" symbolisiert, es wurde eine rote Kugel in die Urne gelegt.

Eine "0" symbolisiert, es wurde eine blaue Kugel in die Urne gelegt.

Setze: $\Omega_i = \{0,1\}^i \;, i = 1,2,3$

$\mathcal{E}_i = \mathcal{P}(\Omega_i)$

$\mathbb{P}_1(\{\omega_1\}) = \varrho_1(\omega_1)$

$\mathbb{P}_2(\{(\omega_1,\omega_2)\}) = \varrho_1(\omega_1) \cdot \varrho_{2|\omega_1}(\omega_2)$

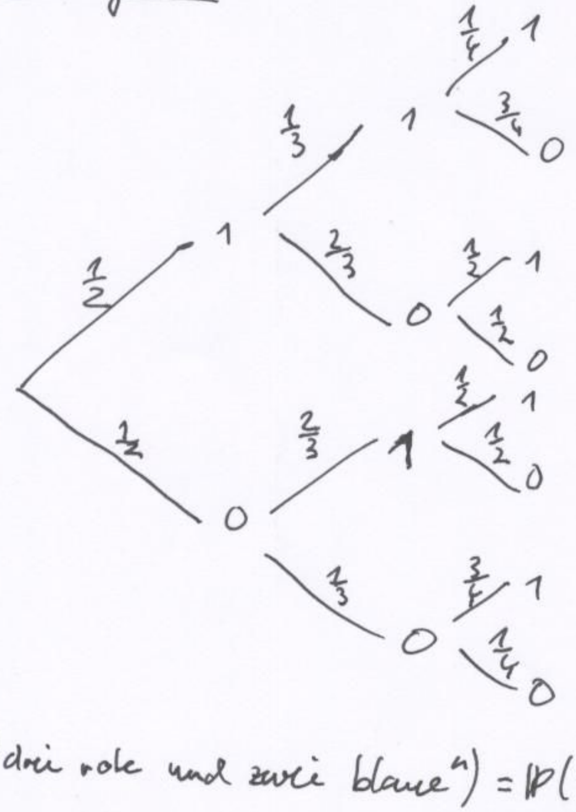
$\mathbb{P}_3(\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}) = \varrho_1(\omega_1) \cdot \varrho_{2|\omega_1}(\omega_2) \cdot \varrho_{3|\omega_1,\omega_2}(\omega_3)$

$$\text{mit: } \varrho_{k|\omega_1 \dots \omega_{k-1}}(\omega_k) = \begin{cases} \dfrac{1 + (k-1-\ell)}{2 + (k-1)} & \text{für } \omega_k = 1 \\[2ex] \dfrac{1+\ell}{2+(k-1)} & \text{für } \omega_k = 0 \end{cases} \quad \text{mit } \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i = \ell$$

für $k \in \{2,3\}$ und: $\varrho_1(1) = \frac{1}{2}$, $\varrho_1(0) = \frac{1}{2}$

Weiter sei: $\Omega = \Omega_3$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_3$, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_3$

Baumdiagramm:



b) $\mathbb{P}(\text{"drei rote und zwei blaue"}) = \mathbb{P}(\{(1,0,0)\}) + \mathbb{P}(\{0,1,0\}) + \mathbb{P}(\{(0,0,1)\}) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{24}$$

c) $A = \{$"drei rote und zwei blaue"$\} = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$

$B_i = \{$"eine blaue Kugel kommt im i-ten Schritt in die Urne"$\} =$

$= \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \,/\, \omega_i = 1\}$

$$\mathbb{P}(B_1/A) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{24}} = \frac{4}{11};$$

$$\mathbb{P}(B_2/A) = \frac{\mathbb{P}(B_2 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{24}} = \frac{4}{11};$$

$$\mathbb{P}(B_3/A) = \frac{\mathbb{P}(B_3 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{11}{24}} = \frac{3}{11};$$

Aufgabe 3:

Sei $x_1, x_2 \in]0,1[$. Setze: $g^{-1}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{-2\log(x_1)}\,\cos(2\pi x_2) \\ \sqrt{-2\log(x_1)}\,\sin(2\pi x_2) \end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$

Berechne jetzt die Umkehrfunktion:

Es gilt: $y_1^2 + y_2^2 = -2\log(x_1)$

$$\Rightarrow x_1 = \exp\left(-\tfrac{1}{2}y_1^2 - \tfrac{1}{2}y_2^2\right)$$

Außerdem gilt: $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{\cos(2\pi x_2)}{\sin(2\pi x_2)} = \dfrac{1}{\tan(2\pi x_2)}$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

$$\Rightarrow g(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2\right) \\ \frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \end{pmatrix}$$

$$Dg(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2\right)(-y_1) & \exp\left(-\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2\right)(-y_2) \\ \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+\frac{y_2^2}{y_1^2}}\cdot\left(-\frac{y_2}{y_1^2}\right) & \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+\frac{y_2^2}{y_1^2}}\cdot\frac{1}{y_1} \end{pmatrix}$$

Es folgt: $\operatorname{Det} Dg(y_1,y_2) = \exp\left(-\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{-y_1^2}{y_1^2+y_2^2} - \frac{y_2^2}{y_1^2+y_2^2}\right)$

$$\Rightarrow |\operatorname{Det} Dg(y_1,y_2)| = \exp\left(-\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)\right)\cdot\frac{1}{2\pi};$$

Weiter gilt g ist ein bijektiver Diffeomorphismus von $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to]0,1[\times]0,1[$.

Es folgt für die gemeinsame Dichte von X und Y.

$$f\circ g\cdot|\operatorname{Det} Dg(y_1,y_2)| = \mathbb{1}_{]0,1[}\left(\exp\left(-\tfrac{1}{2}y_1^2-\tfrac{1}{2}y_2^2\right)\right)\cdot\mathbb{1}_{]0,1[}\left(\tfrac{1}{2\pi}\arctan\left(\tfrac{y_2}{y_1}\right)\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\tfrac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)\right) = h(y_1,y_2)$$

h ist die Dichte von zwei unabhängigen, standardnormalverteilten Zufallsvariablen. Es folgt nach Vorlesung, dass X und Y unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind.

Aufgabe 4:

Es gilt: $$\mathbb{P}(C/A) = \frac{\mathbb{P}(C\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(C\cap A\cap B) + \mathbb{P}(C\cap A\cap B^c)}{\mathbb{P}(A)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(C\cap A\cap B)}{\mathbb{P}(A\cap B)} \cdot \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} + \frac{\mathbb{P}(C\cap A\cap B^c)}{\mathbb{P}(A\cap B^c)} \cdot \frac{\mathbb{P}(A\cap B^c)}{\mathbb{P}(A)} =$$

$$= \mathbb{P}(C/A\cap B)\cdot \mathbb{P}(B/A) + \mathbb{P}(C/A\cap B^c)\cdot \mathbb{P}(B^c/A) =$$

$$= 0{,}62\cdot 0{,}69 + 0{,}06\cdot \underset{\substack{\shortparallel \\ 1-\mathbb{P}(B/A)}}{0{,}31} = 0{,}4464$$

Analog: $$\mathbb{P}(C/A^c) = \mathbb{P}(C/A^c\cap B)\cdot \mathbb{P}(B/A^c) + \mathbb{P}(C/A^c\cap B^c)\cdot \mathbb{P}(B^c/A^c) =$$

$$= 0{,}82\cdot 0{,}2 + 0{,}07\cdot 0{,}8 = 0{,}22$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(C/A) > \mathbb{P}(C/A^c) \quad (*)$$

Bemerkung:

$\mathbb{P}[A]$ wurde zur Berechnung nicht benötigt! (Nur die Vorraussetzung $\mathbb{P}[A]>0$)

Trotz (*) wirkt die Salbe "Verrolose" besser als die Salbe "Warzab", da sie nach der Umfrage sowohl bei Kindern, als auch bei Erwachsenen besser wirkt. (*) kam zu Stande, da (auch nach der Umfrage) die Salbe "Verrolose" überwiegend an Kindern getestet wurde, an denen sie schlechter wirkt, Warzab hingegen überwiegend an Erwachsenen.

Aufgabe 5:

„$\Rightarrow$"

Seien also alle Abbildungen $(X_i)_{i\in I}$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_i$-messbar.

Nach Vorlesung wird $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i$ von der Menge

Kreuzprodukt

$$\mathcal{E} = \{ \prod_{i\in I} A_i \;/\; A_i \in \mathcal{A}_i, \text{ aber } A_i \neq \Omega_i \text{ für höchstens endlich viele } i\in I \} =$$

$$= \{ \prod_{i\in I} A_i \;/\; \exists E \subset I, |E| < \infty : A_i = \Omega_i \;\forall i \in I\setminus E, \; A_i \in \mathcal{A}_i, \forall i \in E \}$$

erzeugt.

Sei nun $A \in \mathcal{E}$ beliebig. Es folgt: $X^{-1}(A) = \underbrace{\bigcap_{i\in E} \underbrace{X_i^{-1}(A_i)}_{\in \mathcal{A} \text{ nach Voraussetzung}}}_{\in \mathcal{A}, \text{ da } \mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}}$

Zeige jetzt:

$\mathcal{B} = \{ A \subseteq \prod_{i\in I} \Omega_i \;/\; X^{-1}(A) \in \mathcal{A} \}$ ist eine σ-Algebra.

Es gilt: $\Omega \in \mathcal{B}$.

Sei jetzt $C \in \mathcal{B}$ d.h. $X^{-1}(C) \in \mathcal{A}$. Es folgt: $X^{-1}(C^c) = (X^{-1}(C))^c \in \mathcal{A} \Rightarrow C^c \in \mathcal{B}$

Seien $C_1, C_2, \ldots \in \mathcal{B}$. d.h. $X^{-1}(C_i) \in \mathcal{A} \;\forall i \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow X^{-1}\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i\Big) = \underbrace{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{X^{-1}(C_i)}_{\in \mathcal{A}}}_{\in \mathcal{A}}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} C_i \in \mathcal{B}$$

$\mathcal{B}$ ist eine σ-Algebra die $\mathcal{E}$ enthält folglich gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, da $\mathcal{A}$ von $\mathcal{E}$ erzeugt wird.

$\Rightarrow \forall A \in \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i : \; X^{-1}(A) \in \mathcal{A} \Rightarrow$ Behauptung

„$\Leftarrow$"

Sei X nun $\mathcal{A}$-$\bigotimes_{i\in I}\mathcal{A}_i$ messbar.

Es gilt $X_i = pr_i \circ X$, wobei pr_i die Projektion auf die i-te Koordinate bezeichnet.

Es gilt pr_i ist $\bigotimes_{i\in I}\mathcal{A}_i$ - $\mathcal{A}_i$-messbar.

Sei dazu $A \in \mathcal{A}_i$. Es folgt: $pr_i^{-1}(A) = \prod_{j\in I} A_j$ mit $A_j = \begin{cases} A & \text{für } j=i \\ \Omega_j & \text{für } j\neq i \end{cases}$

Es folgt: $\prod_{j\in I} A_j \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$

Es folgt nach Übungsblatt Aufgabe 1a), dass $X_i = pr_i \circ X$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_i$-messbar ist. Da $i\in I$ beliebig war folgt die Behauptung.

Aufgabe 6:

a) Sei $g^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y-ax \end{pmatrix}$ und o.E. $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.

Es gilt $g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y+ax \end{pmatrix}$, $Dg(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ und $|\operatorname{Det} Dg(x,y)| = |1| = 1$.

Es folgt, dass g ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus von $]0,\infty[\times\mathbb{R} \to]0,\infty[\times\mathbb{R}$ ist.

Es folgt weiter, dass $f\circ g(x,y)\cdot|\operatorname{Det} Dg(x,y)| = f(x, y+ax)$ die gemeinsame Dichte von (X, B_a) ist.

Es folgt: $g(a,b,C) := \mathbb{P}[X\in C \mid B_a = b] = \dfrac{\int_C f(x, b+ax)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^+} f(x, b+ax)\,dx}$

b) Sei jetzt: $g^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y-b}{x} \end{pmatrix}$

Es gilt $g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y\cdot x + b \end{pmatrix}$, $Dg(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ und $|\operatorname{Det} Dg(x,y)| = |x|$

Es folgt, dass g ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus von $]0,\infty[\times\mathbb{R} \to]0,\infty[\times\mathbb{R}$ ist.

Es folgt weiter, dass $f \circ g(x,y) \cdot |\operatorname{Det} g(x,y)| = |x| \cdot f(x, b+yx) = x \cdot f(x, b+yx)$ die gemeinsame Dichte von (X, A_b) ist.

Es folgt: $h(a,b,C) = \mathbb{P}[X \in C / A_b = a] = \dfrac{\int_C x \cdot f(x, b+ax)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^+} x \cdot f(x, b+ax)\,dx}$

c) Das Ergebnis ist überraschend, da im Allgemeinen $h(a,b,C) \neq g(a,b,C)$ gilt.

Ein solches Phänomen gibt es im diskreten Fall nicht.

Da $f > 0$ gilt im diskreten Fall $\mathbb{P}[B_a = b] > 0$ und $\mathbb{P}[A_b = a] > 0$.

Es folgt:

$$\mathbb{P}[X \in C / B_a = b] = \frac{\mathbb{P}[X \in C \cap B_a = b]}{\mathbb{P}[B_a = b]} = \frac{\mathbb{P}[X \in C \cap Y - aX = b]}{\mathbb{P}[Y - aX = b]} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}[X \in C \cap a = \frac{Y-b}{X}]}{\mathbb{P}[\frac{Y-b}{X} = a]} = \frac{\mathbb{P}[X \in C \cap A_b = a]}{\mathbb{P}[A_b = a]} =$$

$$= \mathbb{P}[X \in C / A_b = a]\text{, also } h = g.$$