Hausaufgabenblatt 6:

Aufgabe 1:

i) $P(\Omega | B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

ii) Seien $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt.

Es folgt: $$P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \middle| B\right) = \frac{P(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap B))}{P(B)} \overset{\substack{(A_i \cap B)_{i \in \mathbb{N}} \text{ paarweise} \\ \text{disjunkt}}}{=}$$

$$= \frac{\sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i | B)$$

Da $\mathbb{P}(\cdot | B) : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ folgt, dass $\mathbb{P}(\cdot | B)$ ein W'Maß ist.

Aufgabe 2:

Es gilt: $$\mathbb{F}(z) = \mathbb{P}(X + Y \leq z) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x,y) \, \mathbb{1}_{\{x+y \leq z\}} \, dx \otimes dy = (*)$$

Betrachte jetzt den $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $h(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. $\left(h^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}\right)$. Es gilt $Dh(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es folgt: $|\det Dh(x,y)| = 1$

Weiter gilt nach dem Transformationssatz:

$$(*) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x-y, y) \, \mathbb{1}_{\{x-y+y \leq z\}} \, dx \otimes dy \underset{\text{Fubini für positiv, messbare Fktn.}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) \, \mathbb{1}_{\{x \leq z\}} \, dx \, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) \, dy}_{= \tilde{h}(x)} \, dx$$

Da die Mengen $]-\infty, z]$, $z \in \mathbb{R}$ einen durchschnittsstabilen Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ bilden, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz für W'Maße, dass $\tilde{h}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) \, dy$ eine Dichte von $X+Y$ darstellt.

Aufgabe 3:

a) Sei $g^{-1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x+y+z} \\ \frac{y}{x+y+z} \\ x+y+z \end{pmatrix}$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid x+y+z = 0\}$

Es gilt für die Umkehrabbildung $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z - xz - yz \end{pmatrix}$.

Weiter folgt: $Dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} z & 0 & x \\ 0 & z & y \\ -z & -z & 1-x-y \end{pmatrix}$

$|\operatorname{Det} Dg(x,y,z)| = |z^2| = z^2$

Auch die Ableitung von $g^{-1}(x,y,z)$ existiert für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus A$.

Setze $B = \{(x,y,z) \mid z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Es folgt g ist ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^3 \setminus B \to \mathbb{R}^3 \setminus A$ und eine Bijektion.

Da A und B λ^3-Nullmengen sind brauchen sie bei der Transformation nicht beachtet werden. (Formal: Setze $\tilde{f} = f \cdot 1\!\!1_{\{\mathbb{R}^3 \setminus A\}}$).

Es folgt:

$$f \circ g \cdot |\operatorname{Det} Dg| = z^2 \cdot e^{-xz-yz-z+xz+yz}\, 1\!\!1_{]0,\infty[}(xz) \cdot 1\!\!1_{]0,\infty[}(yz) \cdot 1\!\!1_{]0,\infty[}(z-xz-yz) =$$

$$= z^2 \cdot e^{-z}\, 1\!\!1_{]0,\infty[}(z) \cdot 1\!\!1_{]0,\infty[}(x) \cdot 1\!\!1_{]0,\infty[}(y) \cdot 1\!\!1_{]0,\infty[}(1-x-y) =$$

$$= z^2 \cdot e^{-z}\, 1\!\!1_{]0,\infty[}(z) \cdot 1\!\!1_{]0,1[}(x) \cdot 1\!\!1_{]0,1[}(y) \cdot 1\!\!1_{]0,1[}(1-x-y) = h(x,y,z)$$

Es gilt $h(x,y,z)$ ist die Dichte von $\left(\frac{X}{S}, \frac{Y}{S}, S\right) = g^{-1}(X,Y,Z)$ nach Vorlesung.

b) $$\tilde{h}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} z^2 \cdot e^{-z} \cdot 1\!\!1_{]0,\infty[}(z) \cdot 1\!\!1_{]0,1[}(x) \cdot 1\!\!1_{]0,1[}(y) \cdot 1\!\!1_{]0,1[}(1-x-y)\, dz =$$

$$= \int_0^\infty z^2 \cdot e^{-z}\, dz \cdot \left(1\!\!1_{]0,1[}(x) \cdot 1\!\!1_{]0,1[}(y) \cdot 1\!\!1_{]0,1[}(1-x-y)\right) =$$

$= 2 \cdot \mathbb{1}_{]0,1[}(x) \cdot \mathbb{1}_{]0,1[}(y) \cdot \mathbb{1}_{]0,1[}(1-x-y)$.

Dies ist die Dichte der Gleichverteilung auf dem angegebenen Dreieck.

$\left(\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{h}(x,y)\, dx\, dy = 1 \right)$

c) $\bar{h}(x) = \int_{\mathbb{R}} 2 \cdot \mathbb{1}_{]0,1[}(x) \cdot \mathbb{1}_{]0,1[}(y) \cdot \mathbb{1}_{]0,1[}(1-x-y)\, dy =$

$$= 2 \cdot \mathbb{1}_{]0,1[}(x) \cdot \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]0,1[}(y) \cdot \mathbb{1}_{]0,1[}(1-x-y)\, dy =$$

$$= 2 \cdot \mathbb{1}_{]0,1[}(x) \cdot \int_0^{1-x} dy = 2-2x \cdot \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$$

Aufgabe 4:

a) Sei $t>0$ beliebig.

Es folgt: $F_a(t) = \mathbb{P}(T\leq t) = \int\limits_{\mathbb{R}} a e^{-ax} 1\!\!1_{]0,\infty[}(x) \cdot 1\!\!1_{]-\infty,t[}(x)\, dx =$

$$= \int_0^t a e^{-ax}\, dx = 1-e^{-at}$$

Damit gilt: $\mathbb{P}(T>t) = 1-\mathbb{P}(T\leq t) = 1-1+e^{-at} = e^{-at} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$

Sei $F_1(x) = \mathbb{P}(T-t\leq x \mid T>t)$ und $F_2(x) = \mathbb{P}(T\leq x)$. Sei jetzt $x>0$.

Es folgt: $F_1(x) = \mathbb{P}(T-t\leq x \mid T>t) = \dfrac{\mathbb{P}(0<T-t\leq x)}{\mathbb{P}(T>t)} = \dfrac{\mathbb{P}(t<T\leq t+x)}{\mathbb{P}(T>t)} =$

$$= \frac{F_a(x+t)-F_a(t)}{1-F_a(t)} = \frac{1-e^{-a(x+t)}+e^{-at}-1}{1-1+e^{-at}} = \frac{-e^{-a(x+t)}+e^{-at}}{e^{-at}} =$$

$$= 1-e^{-ax} = \mathbb{P}(T\leq x) = F_2(x)$$

Für $x\leq 0$ gilt: $F_1(x) = 0 = F_2(x)$.

Aufgrund der Gleichheit der Verteilungsfunktionen folgt die Gleichheit der Verteilungen und damit die Behauptung.

b) Es muss nach a) für die Verteilungsfunktion F von T gelten:

Sei dazu wieder $x,t>0$: $\dfrac{F(x+t)-F(t)}{1-F(t)} = F(x)$

$$\Leftrightarrow \quad F(x+t)-F(t) = F(x)\cdot(1-F(t))$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-F(x+t) = -F(x) - F(t) + F(x)\cdot F(t) + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-F(x+t) = (1-F(x))\cdot(1-F(t))$$

$$\Leftrightarrow (*) \; V(x+t) = V(x)\cdot V(t) \quad \text{für } V(\tilde{x}) = 1-F(\tilde{x})$$

Es gilt: $V(x) = 1-F(x) = \mathbb{P}(T>x) > 0 \quad \forall x>0 \Rightarrow V\equiv 0$ gilt <u>nicht</u>.

Außerdem gilt $V(x)$ ist monoton fallend, da $F(x)$ monoton steigend.

Es gilt weiter: $V(x) = 1 \quad \forall x \leq 0$, da $F(x) = 0 \; \forall x \leq 0$ wegen $T > 0$.

Es folgt aus Analysis und (*).

$V(x) = e^{-ax}$ für ein $a > 0$, und $x > 0$ und weiter $V(x) = 1 \quad \forall x \leq 0$.

$\Rightarrow F(x) = (1 - e^{-ax}) \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ mit $a > 0$.

$\Rightarrow$ T ist exponentialverteilt mit Parameter $a > 0$.

c) Diese Frage kann jeder selber beantworten.

Kritik zum Beispiel:
- kein Telefongespräch dauert unter 5 Sekunden.
- Ein Telefongespräch kann beliebig lang werden, ist „irgendwann" doch nicht mehr erfüllt.
- Auch die Gedächtnislosigkeit kann kritisiert werden.

Trotzdem scheint die Exponentialverteilung ein gutes Modell zu sein, da sie in der Praxis dort Anwendung findet!

Aufgabe 6:

a) HV = Hauptversicherung NV = Nebenversicherung

$E_1 = \{$HV defekt, NV1 defekt, NV 2 nicht defekt$\}$

$E_2 = \{$HV defekt, NV1 nicht defekt, NV2 defekt$\}$

$E_3 = \{$HV defekt, NV 1 defekt, NV 2 defekt$\}$

$E_4 = \{$HV defekt, NV1 nicht defekt, NV 2 nicht defekt$\}$

$E_5 = \{$HV nicht defekt, NV 1 defekt, NV2 defekt$\}$

$E = \{$"Weder an der Waschmaschine, noch am Kühlschrank liegt Spannung"$\}$

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{5}} E_i\right) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(E_i) = \frac{2}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{2}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{2}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{2}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} +$$

$$+ \frac{5}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{4}{49} + \frac{4}{49} + \frac{2}{49} + \frac{4}{49} + \frac{5}{49} = \frac{19}{49}$$

b) Strategie H:

$A = \{$"beide Maschinen laufen"$\}$

$$\mathbb{P}_E(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap E)}{\mathbb{P}(E)} \underset{\substack{\uparrow \\ E_i \text{ paarweise disjunkt}}}{=} \frac{\mathbb{P}(A\cap E_1) + \mathbb{P}(A\cap E_2) + \mathbb{P}(A\cap E_3) + \mathbb{P}(A\cap E_4) + \mathbb{P}(A\cap E_5)}{\mathbb{P}(E)} =$$

$$= \frac{0 + 0 + 0 + \frac{5}{6}\cdot\frac{4}{49} + 0}{\frac{19}{49}} = \frac{10}{57}$$

Strategie N:

$A = \{$"beide Maschinen laufen"$\}$

$$\mathbb{P}_E(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap E_1) + \mathbb{P}(A\cap E_2) + \mathbb{P}(A\cap E_3) + \mathbb{P}(A\cap E_4) + \mathbb{P}(A\cap E_5)}{\mathbb{P}(E)} =$$

$$= \frac{0 + 0 + 0 + 0 + \frac{5}{49}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{19}{49}} = \frac{3}{19} = \frac{9}{57}$$

Also sollte man Strategie H wählen.