Hausaufgabenblatt 5

Aufgabe 1:

a) Zu zeigen: $\forall A \in \mathcal{A}''$ gilt: $(g \circ f)^{-1}[A] \in \mathcal{A}$

Sei also $A \in \mathcal{A}''$ beliebig. Es folgt, da g $\mathcal{A}'$-$\mathcal{A}''$-messbar $g^{-1}[A] \in \mathcal{A}'$.

Da f $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar folgt: $f^{-1}[\underbrace{g^{-1}[A]}_{\in \mathcal{A}'}] \in \mathcal{A}$

Da außerdem $(g \circ f)^{-1}[A] = f^{-1}[g^{-1}[A]]$ folgt die Behauptung.

b) Sei dazu wieder $A \in \mathcal{A}''$ beliebig.

Es folgt: $g \circ f[\mu](A) = \mu((g \circ f)^{-1}[A]) = \mu(f^{-1} \circ g^{-1}[A]) = \mu(f^{-1}[g^{-1}[A]]) =$
$= f[\mu](g^{-1}[A]) = g[f[\mu]](A)$.

Anmerkung:

Da $g \circ f$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}''$-messbar ist $g \circ f[\mu]$ wohldefiniert!

Aufgabe 2:

Sei $x_n = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^n}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Sei weiter: $y_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^k}{k!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $y_0 = 0$.

Sei jetzt: $A_n =]y_n, y_n + x_n] =]y_n, y_{n+1}]$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$

Es gilt nun $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind paarweise disjunkt und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n =]0,1[$ (!)

Es gilt nun: $\lambda(A_n) = y_{n+1} - y_n = x_n = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^n}{n!} = \mathbb{P}[\{n\}]$

d.h. Man lässt eine Zahl x mit dem Zufallszahlengenerator ziehen und falls $x \in A_n$ bedeutet das für die Poissonverteilung, es wurde eine Zahl n gezogen. Die W'keiten (siehe oben) stimmen überein.

Aufgabe 3:

a) $1 = \int_{\mathbb{R}} f_a(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{c_a}{a^2+x^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{c_a}{1+\frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a^2} dx =$

$$\underset{\uparrow}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{c_a}{1+y^2} \cdot \frac{1}{a}\, dy = \lim_{n\to\infty} \left[\arctan(y) \cdot \frac{c_a}{a}\right]_{-n}^{n} = \frac{c_a}{a} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = c_a \cdot \frac{\pi}{a}$$

$y = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}$ (wohldefiniert, da $a>0$)

$$\Rightarrow \underline{c_a = \frac{a}{\pi}}$$

b) $F_a(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\frac{a}{\pi}}{a^2+y^2}\, dy \underset{\uparrow}{=} \int_{-\infty}^{\frac{x}{a}} \frac{\frac{1}{\pi}}{(1+z^2)}\, dz = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\pi} \arctan(z)\right]_{-n}^{\frac{x}{a}} =$

analog a) $z = \frac{y}{a}$

$$= \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow F_a$ ist streng monoton steigend, stetig und $F_a: \mathbb{R} \to]0,1[$

$\Rightarrow F_a^{-1}:]0,1[\to \mathbb{R}$ ist stetig und hat keine Definitionslücken. $(\forall a>0)$

$\hookrightarrow$ keine "Quasi-Inverse" nötig.

Sei nun Y auf $]0,1[$ gleichverteilt.

Es folgt $F_a^{-1}[Y]$ ist cauchyverteilt zum Parameter $a>0$.

Sei dazu $c<d$, $c,d \in \mathbb{R}$.

$\lambda(c \le F_a^{-1}(Y) \le d) = \lambda(F_a(c) \le Y \le F_a(d)) = F_a(d) - F_a(c)$.

Die Behauptung folgt aus dem Eindeutigkeitssatz für W'Maße.

c) Es gilt nach Analysis I für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ~~differenzierbar~~ diff'bar.

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx.$$

Man kann f ~~ang~~ und g auch einschränken. ($f: U \to \mathbb{R}$, $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, U offen)

<u>Sei $b>0$</u>

Es folgt: $\mathbb{P}(b \cdot X \le x) = \mathbb{P}(X \le \frac{x}{b}) = \int_{-\infty}^{\frac{x}{b}} \frac{\frac{a}{\pi}}{a^2+y^2}\, dy \underset{\uparrow}{=} \int_{-\infty}^{x} \frac{\frac{a}{\pi}}{a^2+\frac{y^2}{b^2}} \cdot \frac{1}{b}\, dy =$

$g(y) = \frac{y}{b}$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{\frac{a \cdot b}{\pi}}{a^2 \cdot b^2 + y^2}\, dy = \int_{-\infty}^{x} f_{a \cdot b}(y)\, dy.$$

Sei jetzt $b<0$.

$$\mathbb{P}(b\cdot X \le x) = \mathbb{P}\left(X \ge \frac{x}{b}\right) = \mathbb{P}\left(-X \le -\frac{x}{b}\right) = \mathbb{P}\left(-X \le \frac{x}{-b}\right) = \int_{-\infty}^{-\frac{x}{b}} f_a(-y)\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{x}{-b}} f_a(y)\,dy \underset{\uparrow}{=} \int_{-\infty}^{x} f_{a\cdot(-b)}(y)\,dy$$

siehe $b>0$, da $-b>0$ in diesem Fall

Es folgt, das $b\cdot X$ ebenfalls cauchyverteilt ist, mit Parameter $a\cdot|b|$.

Aufgabe 4:

a) $$\underset{F(x)}{\mathbb{P}(X^2 \le x)} = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = 2\cdot\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy \quad (*)$$

b) $$(*) \underset{g(y)=\sqrt{y}}{=} 2\cdot\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot e^{-\frac{y}{2}}\,dy \quad (**)$$

$\Rightarrow f(y) = \mathbb{1}_{]0,\infty[}(y)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot e^{-\frac{y}{2}} \Rightarrow$ Eine Dichte f bzgl. des Lebesgue-Maßes existiert. Man kann auch zeigen $(*)$ ist stetig und stückweise diffbar auf $\mathbb{R}$.
$\Rightarrow$ $f=F'$ existiert nach Vorlesung.

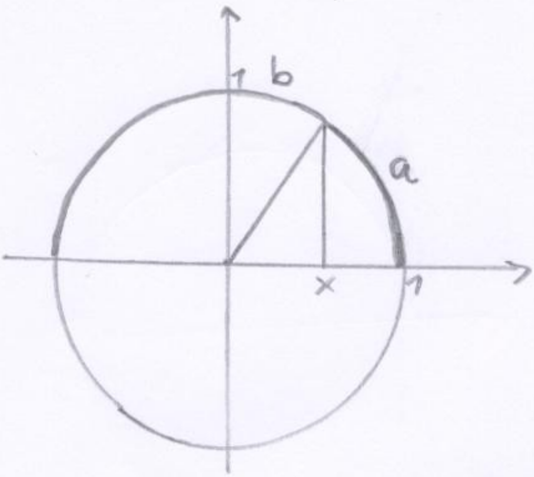
c) $$(**) = \int_0^x \gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(y)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}\,dy = \int_0^x \gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(y)\cdot\frac{\overset{\sqrt{\pi}}{\overset{\shortparallel}{\Gamma(\frac{1}{2})}}}{\sqrt{\pi}}\,dy =$$

$$= \int_0^x \gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(y)\,dy \quad \Rightarrow X^2 \text{ gammaverteilt mit Parameter } \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}$$

(mit: $\gamma_{\alpha,r}(y) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}\cdot x^{r-1} e^{-\alpha x}\,\mathbb{1}_{]0,\infty[}$ für $\alpha, r>0$)

Aufgabe 5:

a) Es gilt: $F(x) = Q(]-\infty, x]) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq -1 \text{ i)} \\ \dfrac{\pi - \arccos(x)}{\pi} & \text{falls } -1 < x < 1 \text{ ii)} \\ 1 & \text{falls } x \geq 1 \text{ iii)} \end{cases}$



i) und iii) sind klar, für ii) reicht es aus Symmetriegründen die obere Einheitskreishälfte zu betrachten. Sei also $-1 \leq x \leq 1$.

Es gilt: $\cos(a) = x \Rightarrow a = \arccos(x) \Rightarrow b = \pi - \arccos(x)$

Weiter gilt: $a + b = \pi \Rightarrow$ ii)

b) Es gilt F ist stetig, da $F(1) = 1 = \lim\limits_{x \uparrow 1} \dfrac{\pi - \arccos(x)}{\pi} = \lim\limits_{x \uparrow 1} F(x)$ $[\arccos(1) = 0]$

$F(-1) = 0 = \lim\limits_{x \downarrow -1} \dfrac{\pi - \arccos(x)}{\pi} = \lim\limits_{x \downarrow -1} F(x)$ $[\arccos(-1) = \pi]$

und der Stetigkeit des arccos.

F ist auch auf $x \leq -1$, $-1 < x < 1$, $x \geq 1$ stetig diff'bar, also stückweise stetig diff'bar.

Es folgt nach Vorlesung $f = F'$ ist eine Dichte von Q bzgl. des Lebesgue-Maßes.

Es gilt: $f(x) = 1\!\!1_{]-1,1[}(x) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \dfrac{1}{\pi}$

Aufgabe 6:

Sei $I = \{1, \dots, n\}$. S sei die Menge aller Permutationen auf I.

Setze jetzt: $\Omega = S$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf Ω.

Es gilt: $A = \{$"mindestens ein Adressat bekommt den für ihn bestimmten Brief"$\} =$

$= \{\sigma \in S : \sigma(i) = i$ für ein $i \in I\}$

Sei jetzt: $A_i = \{\sigma \in S : \sigma(i) = i\}$ für ein $i \in I$.

Also gilt: $A = \bigcup_{i \in I} A_i$

Außerdem gilt für ein beliebiges $K \subset I$: $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in K} A_k\right) = \frac{(n - |K|)!}{n!}$

Nun gilt für einen beliebigen W'Raum $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ und $B_1, B_2, \dots B_n \in \mathcal{E}$

folgende Formel:
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{\emptyset \neq K \subset \{1, \dots n\}} (-1)^{|K|+1} \, \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in K} B_i\right)$$

Es folgt in unserem Fall:
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{\emptyset \neq K \subset I} (-1)^{|K|+1} \, \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in K} A_k\right) = \sum_{\emptyset \neq K \subset I} (-1)^{|K|+1} \cdot \frac{(n - |K|)!}{n!} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \cdot \frac{1}{k!}$$

Es folgt im Limes $n \to \infty$: $\mathbb{P}(A) \longrightarrow 1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}6321$