

Hausaufgabenblatt 4

Aufgabe 1.

$\Omega_1 = \{1, \dots, 6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega_1)$, IP Gleichverteilung ("fairer Würfel!")

$$A_1 = \{6\}$$

$$IP(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega_1|} = \frac{1}{6} \approx 0,1667$$

$\Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_6) \mid \omega_i = (\omega_{i1}, \omega_{i2}), \omega_{i1} \in \{1, \dots, 6\}, \omega_{i2} \in \{1, \dots, 6\} \forall 1 \leq i \leq 6\}$

$$\text{d.h. } \Omega_2 = (\{1, \dots, 6\}^2)^6$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega_2)$$

IP Gleichverteilung

$$IP(\text{"mindestens eine Doppel-6"}) = IP(A_2) = 1 - IP(A_2^c) = IP(\text{"keine Doppel-6"}) =$$

$$= 1 - \frac{|A_2^c|}{|\Omega_2|} = 1 - \frac{(35)^6}{(36)^6} \approx 0,1555$$

$\Rightarrow IP(A_1) > IP(A_2)$. Also ist eine "6" beim einmaligen Würfeln wahrscheinlicher.

Aufgabe 2.

Es gilt: $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} : IP(A) = Q(A)\} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

Es gilt z.B. $\underbrace{\{1,2\}}_{\mathcal{D}} \cap \underbrace{\{1,3\}}_{\mathcal{D}} = \{1\}$, aber $\{1\} \notin \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}$ nicht durchschnitts-stabil

Da jede σ -Algebra durchschnittsstabil folgt $\mathcal{D}$ keine σ -Algebra.

Es gilt $\sigma(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{A}$, da $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\forall A \in \mathcal{D}$ gilt: $A \subseteq \Omega$.

[Potenzmenge ist maximal!]

Zeige jetzt: $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{A}$. Da $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\Omega = \{1,2,3,4\}$ folgt, dass Ω von der Partition $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ erzeugt ist.

Es genügt also zu zeigen: $\{1\} \in \sigma(\mathcal{D})$, $\{2\} \in \sigma(\mathcal{D})$, $\{3\} \in \sigma(\mathcal{D})$, $\{4\} \in \sigma(\mathcal{D})$

Da $\sigma(\mathcal{D})$ eine σ -Algebra folgt:

$$\underbrace{\{1\} = \{1,2\} \cap \{1,3\}}_{\in \sigma(\mathcal{D})} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\{2\} = \{1,2\} \setminus \{1\}}_{\in \sigma(\mathcal{D})}$$

$$\text{Analog: } \{4\} = \{3,4\} \cap \{2,4\} \in \sigma(\mathcal{D}) \Rightarrow \{3\} = \{3,4\} \setminus \{4\} \in \sigma(\mathcal{D})$$

Es folgt die Behauptung.

Aufgabe 3:

a) Es muss gelten, da $\mathbb{P}$ ein $\mathbb{W}$ -Maß.

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy dx, \text{ da } z \in \mathbb{R}^2 \text{ und } f(z) \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^2.$$

Fubini für positiv, meßbare Funktionen

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (2c \cdot 1_{[0, \frac{1}{2}] \times [0,1]}(x,y) + c \cdot 1_{[\frac{1}{2},1] \times [0,1]}(x,y)) dx dy =$$

$$= \int_{[0, \frac{1}{2}]} \int_{[0,1]} 2c dy dx + \int_{[\frac{1}{2},1]} \int_{[0,1]} c dy dx =$$

$$= \int_{[0, \frac{1}{2}]} [2cy]_0^1 dx + \int_{[\frac{1}{2},1]} [cy]_0^1 dx =$$

$$= \int_{[0, \frac{1}{2}]} 2c dx + \int_{[\frac{1}{2},1]} c dx = c + \frac{1}{2}c = \frac{3}{2}c$$

$$\Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

b) Sei jetzt: $c = \frac{2}{3}$

$$P([0, \frac{3}{4}] \times [0, \frac{1}{2}]) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{[0, \frac{3}{4}] \times [0, \frac{1}{2}]}(x, y) (2c \cdot 1_{[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]}(x, y) + c \cdot 1_{[\frac{1}{2}, 1] \times [0, 1]}(x, y)) dy dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]}(x, y) \cdot \frac{4}{3} dy dx + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \times [0, \frac{1}{2}]}(x, y) \cdot \frac{2}{3} dy dx =$$

$$= \int_{[0, \frac{1}{2}]} \int_{[0, \frac{1}{2}]} \frac{4}{3} dy dx + \int_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]} \int_{[0, \frac{1}{2}]} \frac{2}{3} dy dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{5}{12}}}$$

Aufgabe 4:

a) Da P wieder ein ω -Maß muss gelten: $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$

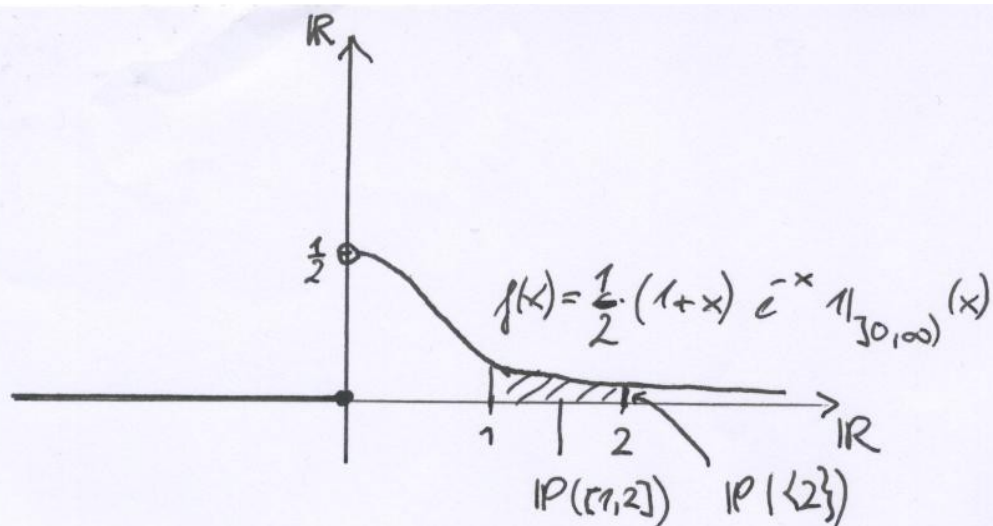
$$\Rightarrow 1 = \int_{\mathbb{R}} c(1+x) e^{-x} 1_{[0, \infty[}(x) dx = \int_{[0, \infty[} c \cdot (1+x) e^{-x} dx =$$

$$= \int_{[0, \infty[} c e^{-x} dx + \int_{[0, \infty[} c x e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} [-c e^{-x}]_0^a + \lim_{a \rightarrow \infty} [-c x e^{-x}]_0^a - \int_{[0, \infty[} -c e^{-x} dx =$$

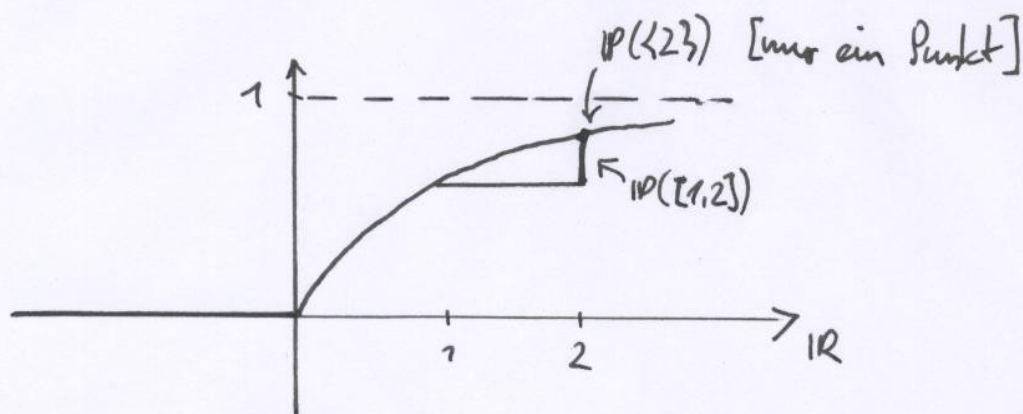
$$= c + 0 + \int_{[0, \infty[} c e^{-x} dx = c + c = 2c \quad \left[\lim_{a \rightarrow \infty} a e^{-a} = 0 \text{ (Analysis I)} \right]$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

b)



$$\begin{aligned}
 c) P(-\infty, x] &= \int_{\mathbb{R}} 1_{(-\infty, x]}(y) dy = \int_{\mathbb{R}} 1_{(-\infty, x]}(y) \cdot 1_{[0, \infty)}(y) \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+y) \cdot e^{-y} dy = \\
 &= \int_{\mathbb{R}} 1_{[0, x]}(y) \cdot 1_{[0, \infty)}(y) \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+y) \cdot e^{-y} dy = \\
 &= 1_{[0, \infty)}(x) \int_{\mathbb{R}} 1_{[0, x]}(y) \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+y) \cdot e^{-y} dy = \\
 &= 1_{[0, \infty)}(x) \cdot \left(\int_0^x \frac{1}{2} y e^{-y} dy + \int_0^x \frac{1}{2} e^{-y} dy \right) = \\
 &\stackrel{\text{siehe auch a)}}{=} 1_{[0, \infty)}(x) \cdot \left(1 - e^{-x} - \frac{1}{2} x e^{-x} \right)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 d) \text{ Es gilt: } P(\{2\}) &= P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left]2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left]2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right]\right) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(2 + \frac{1}{n}\right) - \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(2 - \frac{1}{n}\right) = F(2) - F(2) = 0, \text{ da } F \text{ stetig.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P([1, 2]) &= F(2) - F(1) + P(\{2\}) = 1 - e^{-2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{-2} - 1 + e^{-1} + \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{3}{2} e^{-1} - 2 e^{-2} \\
 &\stackrel{u}{=} 0 \text{ analog } P(\{1\})
 \end{aligned}$$

Aufgabe 5:

a) $\Rightarrow$ b) Setze: $A_{1n} = \{\omega \in \Omega \mid f_p(\omega) \geq f_Q(\omega) + \frac{1}{n}\}$, $A_{2n} = \{\omega \in \Omega \mid f_p(\omega) + \frac{1}{n} < f_Q(\omega)\}$

Es gilt: A_{1n}, A_{2n} paarweise disjunkt, $A_{1n}, A_{2n} \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} (!)$ und außerdem:

$$A_{1n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \{\omega \in \Omega \mid f_p(\omega) > f_Q(\omega)\}, \quad A_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \{\omega \in \Omega \mid f_p(\omega) < f_Q(\omega)\}$$

$$\Rightarrow A_{1n} \cup A_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \{\omega \in \Omega \mid f_p(\omega) \neq f_Q(\omega)\} = A$$

Nach Voraussetzung:

$$\int_{A_{1n}} f_p(\omega) d\mu = \int_{A_{1n}} f_Q(\omega) d\mu \Rightarrow \left| \int_{A_{1n}} f_p - f_Q d\mu \right| = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \int_{A_{1n}} f_p - f_Q d\mu \geq \int_{A_{1n}} f_Q + \frac{1}{n} - f_Q d\mu = \int_{A_{1n}} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_{1n})$$

$$\Rightarrow \mu(A_{1n}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{da } A_{11} \subset A_{12} \subset A_{13} \subset \dots$$

$$\text{Es gilt weiter: } \mu(\lim_{n \rightarrow \infty} A_{1n}) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{1n}\right) \stackrel{!}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{1n}) = 0$$

$$\text{Analog zeigt man: } \mu(\lim_{n \rightarrow \infty} A_{2n}) = 0$$

$$\text{Es folgt: } \mu(A) = \mu\left(\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_{1n}\right) \cup \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_{2n}\right)\right) = \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_{1n}\right) + \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_{2n}\right) = 0$$

b) $\Rightarrow$ a) Da $f_p = f_Q$ μ -fast-sicher folgt: $\mathbb{1}_A f_p = \mathbb{1}_A f_Q$ μ -fast-sicher $\forall A \in \mathcal{A}$.

Es folgt: $\mathbb{1}_A f_p - \mathbb{1}_A f_Q = g$ mit $g = 0$ μ -fast-sicher, d.h. $\mu(N) = 0$ mit $N = \{\omega \in \Omega \mid g(\omega) \neq 0\}$

Sei g nun zerlegt in Positivteil und Negativteil d.h. $g = g_+ - g_-$ mit $g_+ \geq 0$ und $g_- \geq 0$. Es gibt folglich eine Folge von

Treppenfunktionen $(g_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $g_n^+ \nearrow_{n \rightarrow \infty} g_+$ und $(g_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $g_n^- \nearrow_{n \rightarrow \infty} g_-$

$$\begin{aligned} \text{Es folgt: } \int (\mathbb{1}_A f_p - \mathbb{1}_A f_Q) d\mu &= \int g d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n^+ - g_n^-) d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n^+ d\mu - \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n^- d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{k_n^+} \alpha_{n,i}^+ \cdot \mathbb{1}_{A_{n,i}^+} d\mu - \sum_{i=1}^{k_n^-} \alpha_{n,i}^- \cdot \mathbb{1}_{A_{n,i}^-} d\mu \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{k_n^+} \alpha_{n,i}^+ \cdot \mu(A_{n,i}^+) + \sum_{i=1}^{k_n^-} \alpha_{n,i}^- \cdot \mu(A_{n,i}^-) \right) = 0, \text{ da } A_{n,i}^+, A_{n,i}^- \subset N \quad \forall i, n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q(A) = \overset{0}{IP(A)} \quad \text{Da } A \text{ beliebig folgt: } IP = Q \quad \overset{0}{0}$$

Aufgabe 6:

a) Sei also zunächst $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, wobei $A_i \in \mathcal{A}$, $1 \leq i \leq n$, $\alpha_i \geq 0 \forall 1 \leq i \leq n$.

$$\begin{aligned} \text{Es folgt: } \int_{\Omega} g d\nu &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} d\nu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{\Omega} \mathbb{1}_{A_i} d\nu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \nu(A_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{A_i} f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{\Omega} \mathbb{1}_{A_i} f d\mu = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} f d\mu = \\ &= \int_{\Omega} g \cdot f d\mu \end{aligned}$$

Sei g nun beliebig. ($\Rightarrow$ ii))

Da $g \geq 0$ $\mathcal{A}$ -Borel-messbar gibt es eine Folge von Treppenfunktionen $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ($g_k = \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_{ik} \mathbb{1}_{A_{ik}}$) mit $g_k \nearrow g$ und $A_{ik} \in \mathcal{A} \forall 1 \leq i \leq n_k, k \in \mathbb{N}$, $\alpha_{ik} \geq 0 \forall 1 \leq i \leq n_k, k \in \mathbb{N}$

[Zur Erinnerung: Setze zum Beispiel: $g_k(\omega) := \min \{2^{-k} \lfloor 2^k g(\omega) \rfloor, k\}$]

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt: } \int_{\Omega} g d\nu &= \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} g_k d\nu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{monotone} \\ \text{Konvergenz}}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_k d\nu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach i)}}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_k \cdot f d\mu = \\ &\underset{\substack{\downarrow \\ \text{monotone Konvergenz}}}{=} \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} g_k \cdot f d\mu = \int_{\Omega} g \cdot f d\mu \end{aligned}$$

b) Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig. Setze $\tilde{g} := \mathbb{1}_A \cdot g$. ($\tilde{g}$ ist $\mathcal{A}$ -Borel-messbar, da $\mathbb{1}_A$ $\mathcal{A}$ -Borel-messbar ~~und~~ und g $\mathcal{A}$ -Borel-messbar und damit auch das Produkt)

Es gilt $\tilde{g}: \Omega \rightarrow [0, +\infty]$.

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \pi(A) &= \int_A g d\nu = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A g d\nu = \int_{\Omega} \tilde{g} d\nu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach a)}}}{=} \int_{\Omega} \tilde{g} \cdot f d\mu = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A g \cdot f d\mu = \\ &= \int_A g \cdot f d\mu. \text{ Da } A \text{ beliebig folgt die Behauptung.} \end{aligned}$$