Hausaufgabenblatt 3:

Aufgabe 1:

a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \underset{n\to\infty}{\searrow} -\infty$.

Es folgt: $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(]-\infty, x_n]) =$

$$= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, x_n]\Big) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Da $]-\infty, x_1] \supseteq]-\infty, x_2] \supseteq]-\infty, x_3] \ldots$

b) $\mathbb{P}(]-\infty, x[) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}]-\infty, x-\frac{1}{i}]\Big) = \lim\limits_{i\to\infty} \mathbb{P}(]-\infty, x-\frac{1}{i}]) =$

$]-\infty, x-1] \subseteq]-\infty, x-\frac{1}{2}] \subseteq \ldots$

$$= \lim_{i\to\infty} F(x-\tfrac{1}{i}) = \lim_{y\uparrow x} F(y)$$

Aufgabe 2.

a) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ Gleichverteilung

b) Ω anders geschrieben: $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

$A_2 = \{\omega\in\Omega \mid \omega_1+\omega_2 = 2\} = \{\omega\in\Omega \mid \omega_1 = 1 \wedge \omega_2 = 1\} = \{(1,1)\}$

$A_3 = \{\omega\in\Omega \mid \omega_1+\omega_2 = 3\} = \{\omega\in\Omega \mid (\omega_1 = 2 \wedge \omega_2 = 1) \vee (\omega_1 = 1 \wedge \omega_2 = 2)\} = \{(1,2),(2,1)\}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

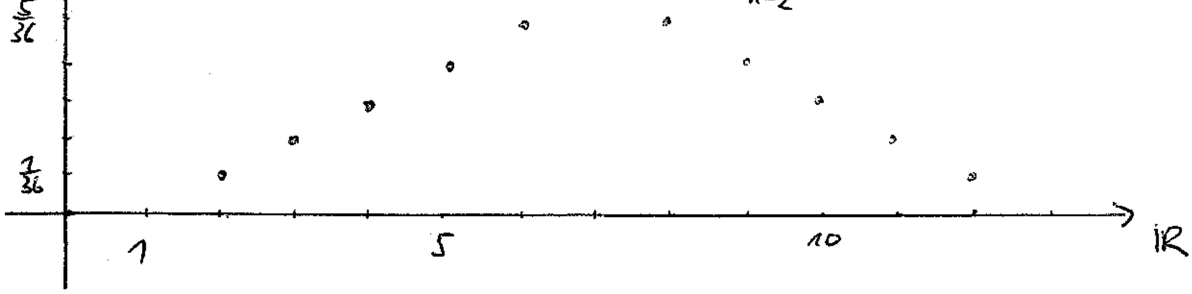
d.h. $A_n = \{\omega\in\Omega \mid \sum_{i=1}^{2} \omega_i = n\}$

$P(A_n) = \frac{|A_n|}{|\Omega|}$. Es gilt: $|\Omega| = 6\cdot 6 = 36$

$$|A_n| = \begin{cases} n-1 & \text{falls } 2\le n\le 7 \\ 12-(n-1) & \text{falls } 8\le n\le 12 \end{cases}$$

$\Rightarrow P(A_n) = \frac{n-1}{36}$ falls $2\le n\le 7$ und $P(A_n) = \frac{12-(n-1)}{36}$ falls $8\le n\le 12$

c) $Q = \sum_{n=2}^{12} P(A_n)\,\delta_n$



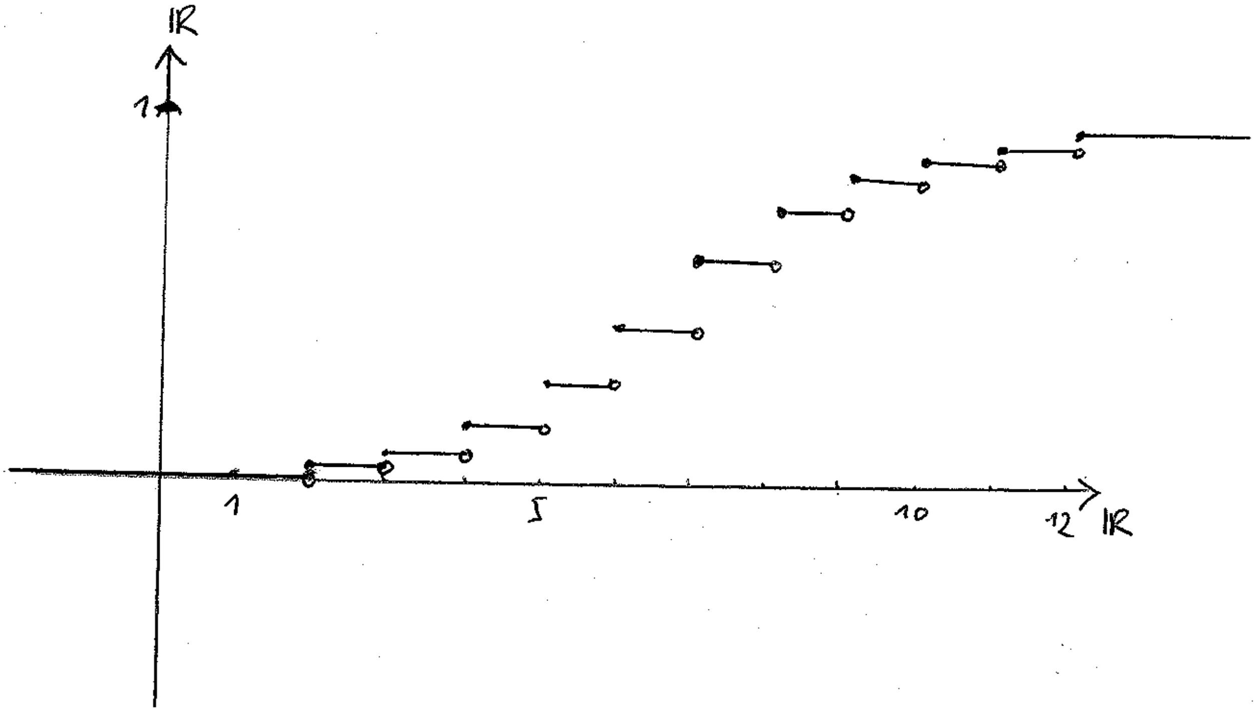
d) Es gilt: $\int_{-\infty}^{x} \mathbb{P}(A_n)\,\delta_n\,d\cancel{x} = \begin{cases} \mathbb{P}(A_n) & \text{falls } n \in (-\infty, x] \\ 0 & \text{falls } n \notin (-\infty, x] \end{cases}$ nach Def. des Dirac-Maßes

Nun gilt: $n \in (-\infty, x] \Leftrightarrow x \in [n, \infty)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{x} \mathbb{P}(A_n)\,\delta_n\,dy = \mathbb{P}(A_n)\cdot \mathbb{1}_{[n,\infty)}(x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \sum_{n=2}^{12} \mathbb{P}(A_n)\cdot\delta_n\,dx = \sum_{n=2}^{12} \int_{-\infty}^{x} \mathbb{P}(A_n)\,\delta_n\,dx =$$

$$= \sum_{n=2}^{12} \mathbb{P}(A_n)\cdot \mathbb{1}_{[n,\infty)}(x)$$



Aufgabe 3.

Zeige zuerst: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma\big(\overbrace{]a,b] \times]c,d] : a<b, c<d \,;\, a,b,c,d \in \mathbb{R}}^{=\mathcal{M}}\big) \overset{!}{=}$

$$\overset{!}{=} \sigma\big(\overbrace{]-\infty,x] \times]-\infty,y] : x,y \in \mathbb{R}}^{=\mathcal{N}}\big)$$

„$\subseteq$": Es gilt: $]a,b] \times]c,d] =]-\infty,b] \times]-\infty,d] \setminus \big( ]-\infty,b] \times]-\infty,c] \cup$

$$\cup\,]-\infty,a] \times]-\infty,d] \big)$$

$\Rightarrow \mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{N}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}) \subseteq \sigma(\mathcal{N})$ nach Aufgabe 3 Übungsblatt 2

„$\supseteq$": Es gilt $]-\infty,x] \times]-\infty,y] = \bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty}]x-i-1, x-i] \times]y-k-1, y-k]$

$\Rightarrow \mathcal{N} \subseteq \sigma(\mathcal{M}) \Rightarrow$ analog $\sigma(\mathcal{N}) \subseteq \sigma(\mathcal{M})$.

$\mathcal{N}$ ist auch durchschnittsstabil $\big( ]-\infty,a] \times]-\infty,b] \cap]-\infty,c] \times]-\infty,d] =$

$$=]-\infty, \min(a,c)] \times]-\infty, \min(b,d)] \big)$$

Minimum

Nach Vorraussetzung gilt: $\mathbb{P}(]-\infty,x] \times]-\infty,y]) = F_1(x,y) = F_2(x,y) =$

$$= \mathbb{Q}(]-\infty,x] \times]-\infty,y]).$$

d.h. $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ stimmen auf dem durchschnittsstabilen Erzeuger $\mathcal{N}$ von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ überein.

Nach dem Eindeutigkeitssatz für W'Maße der Vorlesung folgt: $P = \mathbb{Q}$.

Aufgabe 4:

Sei $\delta(\mathcal{M})$ das kleinste Dynkin-System über Ω, das $\mathcal{M}$ umfasst, falls es existiert!

Setze: $\delta(\mathcal{M}) := \bigcap \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) : \mathcal{A}$ ist ein Dynkin-System über Ω mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}\} \overset{n.Def.}{=}$

$\{A \subseteq \Omega$: Für jedes Dynkin-System $\mathcal{A}$ über Ω mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ gilt: $A \in \mathcal{A}\}$

Zeige zuerst: $\delta(\mathcal{M})$ ist ein Dynkin-System.

Dies geht analog Aufgabe 4 Übungsblatt 1!

Es gilt auch $\mathcal{M} \subseteq \delta(\mathcal{M})$ nach Definition von $\delta(\mathcal{M})$.

Annahme:

Es gibt ein kleineres Dynkin-System dass $\mathcal{M}$ umfasst. Bezeichne es mit $\delta'(\mathcal{M})$.
d.h. $\mathcal{M} \subseteq \delta'(\mathcal{M}) \subsetneq \delta(\mathcal{M})$

d.h. $\exists A \in \delta(\mathcal{M})$ mit $A \notin \delta'(\mathcal{M})$. $\Rightarrow$ A liegt also nicht in allen Dynkin-Systemen $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$, da $A \notin \delta'(\mathcal{M})$ $\Rightarrow$ $\lightning$

$\Rightarrow$ Behauptung

Aufgabe 5:

a) Zeige zuerst: Die Menge $\mathcal{D} = \{B \subseteq \Omega \mid P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)\}$ ist ein Dynkinsystem für ein festes $A \in \mathcal{A}$.

Es gilt: i) $\emptyset \in \mathcal{D}$, da $\underset{\substack{\shortparallel \\ P(A\cap B)}}{P(A \cap \emptyset)} = P(\emptyset) = 0 = P(A) \cdot P(\emptyset) = P(A) \cdot P(B)$

Zeige jetzt: ii) Aus $B \in \mathcal{D}$ folgt: $B^c \in \mathcal{D}$. Das heißt: Es gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ und zu zeigen ist: $P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c)$.

Es gilt: $P((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) = P(A)$

$\Rightarrow$ Da $A \cap B$ und $A \cap B^c$ disjunkt: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

Es folgt wegen der Vorraussetzung:

$$P(A) = P(A) \cdot P(B) + P(A \cap B^c)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B^c) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B^c)$$

iii) Sei nun $B_1, B_2, \ldots$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen mit $B_i \in \mathcal{D}$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Z.z.: $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{D}$.

$$P\Big(A \cap \big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\big)\Big) = P\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A \cap B_i)\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ A \cap B_i \text{ paarweise disjunkt}}}{=} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B_i) =$$

$$= P(A) \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B_i) = P(A) \cdot \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\Big)$$

$\Rightarrow$ Behauptung

$\Rightarrow$ $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System

Da $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $\forall B \in \mathcal{M}$ gilt, $\mathcal{M}$ durchschnittsstabil ist und $\mathcal{D}$ ein Dynkinsystem folgt zuerst $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $\forall B \in \delta(\mathcal{M})$ und mit dem Dynkin-Lemma folgt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $\forall B \in \sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}$.

$\Rightarrow$ Behauptung

b) Falls $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ gilt $\forall A \in \mathcal{A}$ nach Teil a): $\underset{\substack{\shortparallel \\ P(A)}}{P(A \cap A)} = P(A) \cdot P(A)$, da $A \in \mathcal{A}$ beliebig war.

d.h. $P(A) - P(A) \cdot P(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) \cdot (1 - P(A)) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$ oder $P(A) = 1$

Aufgabe 6:

Analog Hausaufgabenblatt 2 Aufgabe 3i) kann man zeigen:

$\mathcal{B}(]0,1]) = \sigma(]0,a] : a \in \mathbb{Q})$

Nach dem Eindeutigkeitssatz für W'Maße genügt jetzt zu zeigen:

$P(]0,a]) = \lambda(]0,a]) \quad \forall a \in \mathbb{Q}$. ($\lambda$ ist die Gleichverteilung auf $]0,1]$)

Da $a \in \mathbb{Q}_0^+$ folgt $a = \frac{r}{s}$ mit $r,s \in \mathbb{N}$. Da außerdem $a \leq 1$ folgt $r \leq s$.

Setze nun für $1 \leq i \leq s$: $A_i :=]\frac{i-1}{s}, \frac{i}{s}]$.

Es folgt: $\underset{1}{\underset{\shortparallel}{P(]0,1])}} = P(\bigcup_{i=1}^{s}]\frac{i-1}{s}, \frac{i}{s}]) = P(\bigcup_{i=1}^{s} A_i) \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{s} P(A_i) \quad (*)$

A_i paarweise disjunkt

Sei $A_{1,2} = A_1 \cup A_2$. Da $\frac{1}{s} = (\frac{2}{s} + 0) : 2$ folgt: $L = A_1$ und $R = A_2$

$\Rightarrow$ Nach Vorraussetzung: $P(A_1) = P(A_2)$

Zeige analog: $P(A_2) = P(A_3)$, $P(A_3) = P(A_4)$, ... $P(A_{s-1}) = P(A_s)$

$\Rightarrow P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_s)$

$\Rightarrow (*) = s \cdot \mathbb{P}(A_i) \quad \forall 1 \leq i \leq s$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{s} \quad \forall 1 \leq i \leq s$

$\Rightarrow \mathbb{P}(]0,a]) = \mathbb{P}(]0,\frac{r}{s}]) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{r} A_i) = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{P}(A_i) = \frac{r}{s} =$

$= \lambda(]0,a])$

$\Rightarrow$ Behauptung