Hausaufgabenblatt 2

Aufgabe 1.

a) $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m) \mid \omega_i \in \{1, \dots n\} \ \forall 1 \le i \le m, \omega_i \neq \omega_j \ \forall i \neq j\}$

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

P ist die Gleichverteilung

Bem.:

Es gilt: $\omega_i \in \{1, \dots, k\} \ \forall 1 \le i \le m$ bedeutet die i-te Kugel ist weiß.

$\omega_i \in \{k+1, \dots, n\} \ \forall 1 \le i \le m$ bedeutet die i-te Kugel ist schwarz.

b) Definiere nun eine Abbildung: $f: \{1, \dots, n\} \to \{0, 1\}$

$$x \to \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \{1, \dots k\} \\ 0 & \text{falls } x \in \{k+1, \dots, n\} \end{cases}$$

$$A_\ell = \{\omega \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{m} f(\omega_i) = \ell\}$$

c) Es gilt: $|\Omega| = \frac{n!}{(n-m)!}$

$$|A_\ell| = \binom{k}{\ell} \cdot \binom{n-k}{m-\ell} \cdot m!$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_\ell) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gleichverteilung}}}{=} \frac{|A_\ell|}{|\Omega|} = \frac{\binom{k}{\ell}\binom{n-k}{m-\ell} \cdot m!}{\frac{n!}{(n-m)!}} = \frac{\binom{k}{\ell}\binom{n-k}{m-\ell}}{\binom{n}{m}}$$

Begründung zu $|A_\ell|$:

$\binom{k}{\ell}$ gibt an, auf wieviel Arten man ℓ Kugeln aus k auswählen kann. Hier sind es also weiße Kugeln.

$\binom{n-k}{m-\ell}$ gibt an, auf wieviele Arten man $m-\ell$ Kugeln aus $n-k$ schwarzen Kugeln auswählen kann.

Da in Ω die Reihenfolge eine Rolle spielt, muss man das auch für A_ℓ berücksichtigen. Deshalb die Multiplikation mit $m!$.

Aufgabe 2:

a) $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m) \mid \omega_i \in \{1, \dots, n\} \ \forall 1 \leq i \leq m\}$

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

P ist die Gleichverteilung

Bem.:

Es gilt: $\omega_i \in \{1, \dots, k\} \ \forall 1 \leq i \leq m$ bedeutet die i-te Kugel ist weiß

$\omega_i \in \{k+1, \dots, n\} \ \forall 1 \leq i \leq m$ bedeutet die i-te Kugel ist schwarz.

b) Definiere nun eine Abbildung

$$f: \{1, \dots, n\} \to \{0, 1\}$$

$$x \to \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \{1, \dots, k\} \\ 0 & \text{falls } x \in \{k+1, \dots, n\} \end{cases}$$

$$A_l = \{\omega \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{m} f(\omega_i) = l\}$$

c) Es gilt: $|\Omega| = n^m$

$$|A_l| = \binom{m}{l} \cdot k^l \cdot (n-k)^{m-l}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_l) = \frac{|A_l|}{|\Omega|} = \binom{m}{l} \cdot k^l \cdot (n-k)^{m-l} \cdot \frac{1}{n^m} = \binom{m}{l} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^l \cdot \left(\frac{n-k}{n}\right)^{l-m}$$

Aufgabe 3.

a) Da $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$ gilt: $\mathcal{M}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{M}_2)$, da $\sigma(\mathcal{M}_2) \supseteq \mathcal{M}_2$.

Es ~~gilt~~ folgt: $\sigma(\mathcal{M}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{M}_2)$, da $\sigma(\mathcal{M}_1)$ nach Definition die kleinste σ-Algebra die $\mathcal{M}_1$ enthält und $\sigma(\mathcal{M}_2)$ eine (also größere) σ-Algebra die $\mathcal{M}_1$ enthält.

b) i) Es ist zu zeigen: $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Zeige zuerst: "$\subseteq$" Nach a) genügt zu zeigen: $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Sei also: $A =]-\infty, a], a \in \mathbb{Q}$, also $A \in \mathcal{M}$ beliebig.

Nach Hausaufgabenblatt 1 gilt: $B_i = [a-i-1, a-i] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Es folgt: $A = \underbrace{\bigcup_{\substack{i=0 \\ i \in \mathbb{N}}}^{\infty} \underbrace{B_i}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \Rightarrow A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Zeige nun: "$\supseteq$" Nach a) genügt $]a,b[\subseteq \sigma(\mathcal{M})$ $\forall a,b \in \mathbb{R}, a<b$

Sei nun $b > a$: $b, a \in \mathbb{Q}$: Es folgt: $]-\infty, b] \setminus]-\infty, a] =]a,b] \in \sigma(\mathcal{M})$

Sei nun $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Q}$ mit $a_i \searrow a$ für $i \to \infty$.

Diese existiert nach Analysis I.

Und $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge in $\mathbb{Q}$ mit $b_i \nearrow b$ für $i \to \infty$.

$\Rightarrow]a,b[= \underbrace{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{]a_i, b_i]}_{\in \sigma(\mathcal{M})}}_{\in \sigma(\mathcal{M})} \Rightarrow$ Beh.

ii) Es ist zu zeigen: $\sigma(\mathcal{N}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Zuerst: $\sigma(\mathcal{N}) \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Nach a) genügt zu zeigen: $]a,b[\subseteq \sigma(\mathcal{N})$. $(a<b)$

Dies ist klar, es folgt $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supseteq \sigma(\mathcal{N})$

Zeige nun: $\sigma(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Nach a) genügt zu zeigen: $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Sei dazu $A \in \mathcal{N}$, also $A \subseteq \mathbb{R}$, A offen, beliebig.

Zeige dazu: $A = \underbrace{\bigcup_{\substack{q,r\in\mathbb{Q} \\ q<r,\ ]q,r[\subseteq A}}}_{\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} \overbrace{]q,r[}^{\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}$.

Die Vereinigung ist abzählbar, da $\{(q,r) \mid q,r\in\mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

„$\supseteq$" Gilt nach Definition der Mengen $]q,r[$ da $]q,r[\subseteq A$

„$\subseteq$" Sei dazu $x\in A$ beliebig. Da A offen gibt es ein $\varepsilon>0$ mit $]x-\varepsilon;x+\varepsilon[\subseteq A$. Nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein $q\in\mathbb{Q}$ mit $x-\varepsilon\leq q<x$ und ein r mit $x<r\leq x+\varepsilon$, $r\in\mathbb{Q}$. ($q,r\in A$ nach Konstruktion!)

$\Rightarrow x\in\,]q,r[\ \Rightarrow x\in \bigcup_{\substack{q,r\in\mathbb{Q}\cap A \\ q<r}}]q,r[\ \Rightarrow$ Behauptung

Aufgabe 4:

Nach Hausaufgabenblatt 1 folgt $\{a\} = [a, a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow P = \{\{a\} \mid a \in \mathbb{R}\}$.

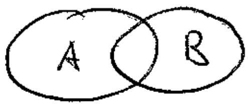
Es gilt aber auch $A = [0,1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Das Intervall $[0,1]$ ist aber überabzählbar. d.h. $\nexists a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{a_i\} = [0,1]$. Analoges gilt für A^c.

Nun gilt aber für alle $A \in \sigma(P)$. Entweder ist A abzählbar ~~...~~ oder A^c. (!)

$\Rightarrow [0,1] \notin \sigma(P) \Rightarrow$ Behauptung

Aufgabe 5:

a)

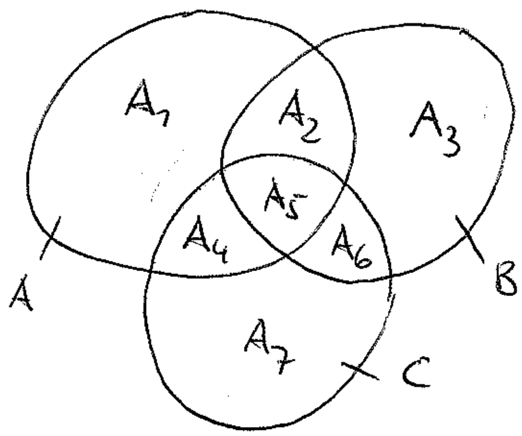


1) $P(A \cap B^c) + P(B) = P((A \cap B^c) \cup B) = P((A \cup B) \cap \underbrace{(B^c \cup B)}_{\Omega}) = P(A \cup B)$

2) $P(B \cap A^c) + P(A) = P((A^c \cap B) \cup A) = P((A \cup B) \cap \underbrace{(A^c \cup A)}_{\Omega}) = P(A \cup B)$

Da $P(A \cap B^c) = P(A \setminus B)$ und $P(B \cap A^c) = P(B \setminus A)$ folgt durch Gleichsetzen von 1) und 2) die Behauptung.

b)



Es gilt: $P(A \cup B \cup C) = \sum_{i=1}^{7} P(A_i) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$;

da $A_1, A_2, \ldots A_7$ paarweise disjunkt und z.B. $A = A_1 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_5 \Rightarrow P(A) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 3}}^{5} P(A_i)$

Aufgabe 6

a) Es gilt nach Vorlesung für $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$

$$P(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$

Es folgt: $P(\{a\}) = P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}]) = \lim_{n\to\infty} P(]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}]) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$

Für $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ folgt die Behauptung!

b) $\mathbb{P}$("die i-te Nachkommaziffer in der Dezimaldarstellung von ω stimmt mit der von $\frac{1}{\sqrt{2}}$ überein") $= \frac{1}{10}$. Es gibt $\{0,1,..,9\}$ zur Auswahl aber nur eine Ziffer ist die "Richtige".

$\Rightarrow \mathbb{P}$("die ersten 10 Nachkommaziffern stimmen überein") $= \left(\frac{1}{10}\right)^{10}$

c) $\mathbb{P}$("unter den ersten 100 Nachkommaziffern stimmen genau die 3., 7, 19, 32, 45, 61, 77, 83, 99. mit der von $\frac{1}{\sqrt{2}}$ überein") $= \left(\frac{9}{10}\right)^{90} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{10}$

da $\mathbb{P}$("die i-te Nachkommaziffer in der Dezimaldarstellung von ω stimmt nicht mit der von $\frac{1}{\sqrt{2}}$ überein") $= \frac{9}{10}$

d) $P(" \ldots ") = \binom{100}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{90} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{10}$

e) Sei $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \mid \omega_i \in \{0,..,9\}\}$, wobei ω_i die i-te Nachkommaziffer einer Zahl $\omega \in [0,1[$. ($\Rightarrow \Omega \cong [0,1[$) Sei jetzt $k_1 < k_2 < .. k_{10}$ und $k_1, k_2 .., k_{10} \in \mathbb{N}$

Setze: $A_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_{10}} = \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ldots) \mid \omega_{k_1} = \tilde{\omega}_{k_1}, \omega_{k_2} = \tilde{\omega}_{k_2}, \ldots \omega_{k_{10}} = \tilde{\omega}_{k_{10}}, \omega_i \neq \tilde{\omega}_i \; \forall i \notin \{k_1..k_{10}\}\}$

und ~~...~~ $(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \ldots)$ die Dezimaldarstellung von $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\Rightarrow \mathbb{P}$("unter allen Nachkommaziffern der Dezimaldarstellung von ω gibt es genau 10, die mit denen von $\frac{1}{\sqrt{2}}$ übereinstimmen") $= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{k_1<k_2<..<k_{10} \\ k_1,k_2..k_{10}\in\mathbb{N}}} A_{k_1,\ldots,k_{10}}\right) = \sum_{\substack{k_1<k_2<..<k_{10} \\ k_1,..k_{10}\in\mathbb{N}}} \mathbb{P}(A_{k_1..k_{10}}) = 0$

da $\mathbb{P}(A_{k_1,k_2,\ldots,k_{10}}) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-10} = 0$

und sowohl die Vereinigung als auch die Summe sind abzählbar, da $\{(k_1,k_2 \ldots k_{10}) \mid k_1 < k_2 < \ldots k_{10} \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}^{10}$ und $\mathbb{N}^{10}$ ist abzählbar.