

Einführung in die Stochastik, Blatt 13

Andreas Fackler

19. Januar 2008

Aufgabe 1

Das hier betrachtete statistische Modell ist $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), (N(\mu, \sigma^2)^n)_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+})$. Das n -dimensionale Lebesguemaß ist also ein dominierendes Maß und wir erhalten die Log-Likelihood-Funktion

$$\begin{aligned} \log f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}, \log f(x, \mu, \sigma^2) = \sum_{k=1}^n \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left(-\frac{(x_k - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \right) \\ &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - n \log \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2. \end{aligned}$$

Differentiation ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} \log f(x, \mu, \sigma^2) &= \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n 2(x_k - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{k=1}^n x_k - n\mu \right) \\ \frac{d}{d\sigma} \log f(x, \mu, \sigma^2) &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2 = \frac{1}{\sigma^3} \left(\sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2 - n\sigma^2 \right) \end{aligned}$$

Da der Wert für $\sigma \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow -\infty$ und $\mu \rightarrow \infty$ gegen $-\infty$ strebt, ist der Wert

$$\left(\widehat{\mu}(x), \widehat{\sigma^2}(x) \right) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(x_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \right),$$

für den der Gradient verschwindet, also der Durchschnitt der X_k und die mittlere quadratische Abweichung vom Durchschnitt, genau das Maximum der Log-Likelihood-Funktion, also der Maximum-Likelihood-Schätzer.

Aufgabe 2

(a)

Setze $\Omega_k = \mathbb{N}^k$, $\mathcal{A}_k = \mathfrak{P}(\mathbb{N}^k)$; $P_{n,k}$ ist dann das k -fache Produktmaß der Gleichverteilung auf $\{1, \dots, n\}$, das heißt, $P_{n,k}(\{\omega\})$ ist $\frac{1}{n^k}$, falls $\omega_1, \dots, \omega_k \leq n$, und sonst 0.

(b)

Da das Modell diskret ist, ist das Zählmaß ein dominierendes Maß und

$$f : \Omega_k \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(\omega, n) = \mathbf{1}_{\{1, \dots, n\}^k}(\omega) \cdot \frac{1}{n^k}$$

die Likelihood-Funktion. Bei festem ω wird diese maximal, wenn $n = \max_k \omega_k$, es ist also

$$\widehat{n}_k(\omega) = \max_k \omega_k.$$

(c)

$$\begin{aligned} E_{P_{n,k}}[\widehat{n}_k] &= \sum_{\omega \in \{1, \dots, n\}^k} \frac{1}{n^k} \max_k \omega_k = n^{-k} \sum_{m=1}^n \sum_{\max_k \omega_k = m} m \\ &= n^{-k} \sum_{m=1}^n (m^k - (m-1)^k) m = n^{-k} \sum_{m=1}^n (m^{k+1} - (m-1)^k - (m-1)^{k+1}) \\ &= n^{-k} \left(n^{k+1} - \sum_{m=1}^n (m-1)^k \right) = n - \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{m}{n} \right)^k \neq n \end{aligned}$$

Der Schätzer ist also nicht erwartungstreu.

(d)

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt, da immer $\widehat{n}_k < n$ ist:

$$\begin{aligned} P_{n,k}[|\widehat{n}_k - n| > \varepsilon] &= P_{n,k}[\widehat{n}_k < n - \varepsilon] = P_{n,k}[\forall i \in \{1, \dots, k\} \omega_i < n - \varepsilon] \\ &= \prod_{i=1}^k P_{n,k}[\omega_i < n - \varepsilon] = (P_{n,k}[\omega_1 < n - \varepsilon])^k. \end{aligned}$$

Da $P_{n,k}[\omega_1 < n - \varepsilon] \leq 1 - P_{n,k}[\omega_1 = n] = 1 - \frac{1}{n} < 1$, konvergiert dies für $k \rightarrow \infty$ gegen 0, wie zu zeigen war.

Aufgabe 3

Angenommen, $\widehat{\sigma}$ wäre ein erwartungstreuer Schätzer, das heißt, für jedes $p \in [0, 1]$ gelte:

$$\sqrt{np(1-p)} = E_{P_p}[\widehat{\sigma}] = \sum_{\omega \in \{0,1\}^n} \widehat{\sigma}(\omega) P_p[\{\omega\}] = \sum_{\omega \in \{0,1\}^n} \widehat{\sigma}(\omega) p^{S(\omega)} (1-p)^{n-S(\omega)}$$

Rechts steht ein Polynom in p , also ist $\sqrt{np(1-p)}$ ein Polynom in p . Da sein Quadrat, $np - np^2$, Grad 2 hat, muss $\sqrt{np(1-p)}$ Grad 1 haben, also linear sein. Das ist aber nicht der Fall.

Aufgabe 4

(a)

Das statistische Modell ist hier $(\Omega_k, \mathcal{A}_k, (P_{p,k})_{p \in]0,1[})$ mit

$$\Omega_k = \{\omega \in \{0, 1\}^n \mid n \in \mathbb{N}, \text{ Es gibt genau } k \text{ Indices } i \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } \omega_i = 1.\},$$

$\mathcal{A}_k = \mathfrak{P}(\Omega_k)$ und der Zähl-dichte $p_{p,k}(\omega) = \prod_{k=1}^{L(\omega)} p^{\omega_k} (1-p)^{1-\omega_k} = p^k (1-p)^{L(\omega)-k}$ von $P_{p,k}$. (Wir ignorieren hier das Ereignis, dass niemals k Einsen fallen, da es Wahrscheinlichkeit 0 hat.) Die Likelihood-Funktion ist also:

$$f : \Omega_k \times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, f(\omega, p) = p^k (1-p)^{L(\omega)-k}$$

Differentiation nach p ergibt

$$kp^{k-1}(1-p)^{L(\omega)-k} - (L(\omega) - k)p^k(1-p)^{L(\omega)-k-1} = (k - pL(\omega))p^{k-1}(1-p)^{L(\omega)-k-1}$$

Die Nullstelle hiervon ist das eindeutige Maximum, da $f(\omega, 0) = f(\omega, 1) = 0$ ist. Der Maximum-Likelihood-Schätzer ist also $\hat{p}(\omega) = \frac{k}{L(\omega)}$.

(b)

Seien $\varepsilon > 0$ und p gegeben. Sei jeweils X_i die Wartezeit zwischen der $(i-1)$ -ten und der i -ten Eins. Dann sind die X_i iid geometrisch verteilt, haben also Erwartungswert $\frac{1}{p}$, und $L = \sum_{i=1}^k X_i$. Nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen konvergiert also $\frac{L}{k}$ in Wahrscheinlichkeit gegen $\frac{1}{p}$ und damit:

$$P_{p,k}[|\hat{p} - p| \leq \varepsilon] = P_{p,k}\left[\frac{1}{p+\varepsilon} \leq \frac{L}{k} \leq \frac{1}{p-\varepsilon}\right] \rightarrow 1$$

Aufgabe 5

(a)

Wir berechnen zunächst für eine Borel-Menge A :

$$\begin{aligned} P[\lambda \in A \wedge N = n] &= \int_A \frac{a^s}{\Gamma(s)} x^{s-1} e^{-ax} e^{-x} \frac{x^n}{n!} dx \\ &= \frac{a^s \Gamma(s+n)}{(a+1)^{s+n} \Gamma(s)} \int_A \frac{(a+1)^{s+n}}{\Gamma(s+n)} x^{n+s-1} e^{-(a+1)x} dx \end{aligned}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} P[\lambda \in A | N = n] &= \frac{P[\lambda \in A \wedge N = n]}{P[N = n]} = \frac{\frac{a^s \Gamma(s+n)}{(a+1)^{s+n} \Gamma(s)} \int_A \frac{(a+1)^{s+n}}{\Gamma(s+n)} x^{n+s-1} e^{-(a+1)x} dx}{\frac{a^s \Gamma(s+n)}{(a+1)^{s+n} \Gamma(s)} \int \frac{(a+1)^{s+n}}{\Gamma(s+n)} x^{n+s-1} e^{-(a+1)x} dx} \\ &= \int_A \frac{(a+1)^{s+n}}{\Gamma(s+n)} x^{n+s-1} e^{-(a+1)x} dx, \end{aligned}$$

das heißt, λ ist, bedingt auf $N = n$, Gamma($a+1, s+n$)-verteilt.

(b)

Damit hat λ bedingt auf $N = n$ den Erwartungswert $\frac{s+n}{a+1}$, das heißt, $\hat{\lambda}(n) = \frac{s+n}{a+1}$

Aufgabe 6

(a)

$$\begin{aligned} P_m[K = k|L = l] &= \frac{P_m[L = l|K = k]P[K = k]}{\sum_{k'=0}^n P_m[L = l|K = k']P[K = k']} = \frac{\binom{m}{l} \left(\frac{k}{n}\right)^l \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-l} p_k}{\sum_{k'=0}^n \binom{m}{l} \left(\frac{k'}{n}\right)^l \left(1 - \frac{k'}{n}\right)^{m-l} p_{k'}} \\ &= \frac{k^l (n-k)^{m-l} p_k}{\sum_{k'=0}^n k'^l (1-k')^{m-l} p_{k'}}, \end{aligned}$$

wobei wir $0^0 = 1$ setzen, da:

$$P_m[K = n|L = m] = \frac{n^l p_n}{\sum_{k'=0}^n k'^l p_{k'}}$$

(b)

Zunächst beweisen wir die Bemerkung im Hinweis:

$$\begin{aligned} \frac{P_m[K = k|L = l]}{P_m[K = k+1|L = l]} &= \frac{k^l (n-k)^{m-l} p_k}{(k+1)^l (n-k-1)^{m-l} p_{k+1}} = \frac{p_k}{p_{k+1}} \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{l}{m}} \left(\frac{n-k}{n-k-1}\right)^{1-\frac{l}{m}} \right)^m \\ &= \frac{p_k}{p_{k+1}} f\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \frac{l}{m}\right)^m \end{aligned}$$

Im Fall $k+1 = n$, $l = m$ erhalten wir nach obiger Konvention $\frac{k^l p_k}{(k+1)^l p_{k+1}} = \frac{p_k}{p_{k+1}} f\left(\frac{k}{n}, 1, 1\right)$.

Für $0 < p < p' \leq \pi \leq 1$ (wegen der Voraussetzung $\frac{l}{m} \geq \frac{k+1}{n}$ wird dies in unserem Fall erfüllt sein) ist $\frac{p}{p'} < 1$ und $\frac{1-p}{1-p'} > 1$, also wegen $p' \leq \pi$:

$$\left(\frac{p}{p'}\right)^\pi \leq \left(\frac{p}{p'}\right)^{p'} \quad \text{und} \quad \left(\frac{1-p}{1-p'}\right)^{1-\pi} \leq \left(\frac{1-p}{1-p'}\right)^{1-p'}$$

Dies beweist $f(p, p', \pi) \leq f(p, p', p')$. Für $f(p, p', p') < 1$ genügt es zu zeigen, dass der Logarithmus negativ ist. Da dieser strikt konkav ist, gilt:

$$\begin{aligned} \log f(p, p', p') &= p' \log \frac{p}{p'} + (1-p') \log \frac{1-p}{1-p'} \\ &< \log \left(p' \frac{p}{p'} + (1-p') \frac{1-p}{1-p'} \right) = \log 1 = 0 \end{aligned}$$

Nun können wir die Abschätzung für $P[K = k|L = l]$ beweisen:

$$\begin{aligned} P_m[K = k|L = l] &\leq P_m[K = k+1|L = l] \frac{p_k}{p_{k+1}} f\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \frac{l}{m}\right)^m \\ &\leq \frac{p_k}{p_{k+1}} f\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \frac{k+1}{n}\right)^m \\ &= \frac{p_k}{p_{k+1}} e^{\log f\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \frac{k+1}{n}\right) \cdot m} \end{aligned}$$

Wegen $f\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \frac{k+1}{n}\right) < 1$ ist dieser Logarithmus negativ. Wir setzen

$$\begin{aligned} \alpha_k &= -\log f\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \frac{k+1}{n}\right) \quad \text{und} \\ C_k &= \frac{p_k}{p_{k+1}}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
P_m \left[\frac{L}{m} - \frac{K}{n} \geq \frac{1}{n} \mid L = l \right] &= \sum_{k \in \{0, \dots, n\}, \frac{l}{m} - \frac{k}{n} \geq \frac{1}{n}} P_m [K = k \mid L = l] \\
&\leq \sum_{k \in \{0, \dots, n\}, \frac{l}{m} - \frac{k}{n} \geq \frac{1}{n}} C_k e^{-\alpha_k m} \\
&\leq (n+1) \max_k C_k \cdot e^{-\min_k \alpha_k m} = C \cdot e^{-\alpha m}
\end{aligned}$$

mit $C = (n+1) \max_k C_k$ und $\alpha = \min_k \alpha_k$.

(c)

Die gleiche Argumentation liefert für die Anzahl $n - K$ grüner Kugeln und die Anzahl $m - L$ gezogener grüner Kugeln:

$$C' e^{-\alpha' m} \geq P_m \left[\frac{m-L}{m} - \frac{n-K}{n} \geq \frac{1}{n} \mid L = l \right] = P_m \left[- \left(\frac{L}{m} - \frac{K}{n} \right) \geq \frac{1}{n} \mid L = l \right]$$

Mit $C'' = C + C'$ und $\alpha'' = \min\{\alpha, \alpha'\}$ gilt also:

$$P_m \left[\left| \frac{L}{m} - \frac{K}{n} \right| \geq \frac{1}{n} \mid L = l \right] \leq C'' e^{-\alpha'' m}$$