

Hausaufgabenblatt 12:

Aufgabe 1:

Bitte sorgfältig machen.

Aufgabe 2:

Sei X die ZV, welche die Messergebnisse beschreibt. o.E. $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Setze nun $Y = \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\text{Var}[X]}}$.

$$\text{Es folgt: } \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sigma[X]}\right] = \frac{1}{\sigma^2[X]} \cdot [\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]] = 0$$

$$\text{Var}[Y] = \text{Var}\left[\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sigma[X]}\right] = \frac{1}{\sigma^2[X]} \cdot \text{Var}[X - \mathbb{E}[X]] = \frac{\text{Var}[X]}{\sigma^2[X]} = 1$$

Sei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Damit folgt:

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| > 2\sigma[X]] \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma[X] > 0}}{=} \mathbb{P}\left[\left|\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sigma[X]}\right| > 2\right] \overset{Y}{=} \mathbb{P}[|Z| > 2] \approx 4,56\% \approx 5\%$$

Anmerkung:

Bei Y und Z stimmen die ersten beiden Momente der Verteilungen überein.

Sie müssen aber nicht gleichverteilt sein. Deshalb ist die Rechnung ungefähr.

Auch kann wegen dem ZGWS (zentraler Grenzwertsatz) angenommen werden, dass

Messergebnisse normalverteilt sind.

Aufgabe 3:

$$\begin{aligned}
 a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} P[X_{nm} = nk] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \log \left(\binom{nm}{nk} p^{nk} (1-p)^{nm-nk} \right) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \log \binom{nm}{nk} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \log(p^{nk}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \log((1-p)^{nm-nk}) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \log \binom{nm}{nk} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nk}{nm} \log(p) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nm-nk}{nm} \log(1-p) = \\
 &= \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \log \binom{nm}{nk}}_{(*)} + \frac{k}{m} \log(p) + \frac{m-k}{m} \log(1-p)
 \end{aligned}$$

Berechne nun (*) mit der Stirling-Formel:

$$\begin{aligned}
 (*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \log \left(\frac{(nm)!}{(nk)! (nm-nk)!} \right) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \log \left(\frac{\sqrt{2\pi} (nm)^{nm+\frac{1}{2}} e^{-nm}}{\sqrt{2\pi} (nk)^{nk+\frac{1}{2}} e^{-nk} \sqrt{2\pi} (nm-nk)^{nm-nk+\frac{1}{2}} e^{-(nm-nk)}} \right) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \log \left(\frac{(nm)^{nm+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot (nk)^{nk+\frac{1}{2}} (nm-nk)^{nm-nk+\frac{1}{2}}} \right) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \log \left(\frac{m^{nm+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} k^{nk+\frac{1}{2}} (m-k)^{nm-nk+\frac{1}{2}}} \right) = \\
 &\quad \uparrow \\
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \log(n^{-\frac{1}{2}}) = 0 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \log(m^{nm+\frac{1}{2}}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \log(\sqrt{2\pi}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \log(k^{nk+\frac{1}{2}}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log((m-k)^{nm-nk+\frac{1}{2}})}{nm} \cdot \frac{1}{m} = \\
 &= \log(m) - 0 - \frac{k}{m} \log(k) - \frac{m-k}{m} \log(m-k) \\
 \Rightarrow (**) &= \log(m) - \frac{k}{m} \log(k) - \frac{m-k}{m} \log(m-k) + \frac{k}{m} \log(p) + \frac{m-k}{m} \log(1-p) = c
 \end{aligned}$$

b) Es gilt nach Vorlesung für $X_n \sim \text{Binomial}(n, p)$ und $0 < p < a < 1$:

$$P[X_n \geq na] \leq \exp \left\{ n \left[a \log \frac{p}{a} + (1-a) \log \frac{1-p}{1-a} \right] \right\}$$

Sei jetzt $a = \frac{k}{m}$, also $a > p$ nach Voraussetzung.

Es folgt:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \log P[X_{nm} \geq nk] &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \cdot \left\{ nm \left[\frac{k}{m} \log \left(\frac{m \cdot p}{k} \right) + \left(1 - \frac{k}{m} \right) \log \frac{1-p}{1-\frac{k}{m}} \right] \right\} = \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{k}{m} \log \left(\frac{m \cdot p}{k} \right) + \left(1 - \frac{k}{m} \right) \log \frac{(1-p) \cdot m}{m-k} \right] = \\ &= \frac{k}{m} \log(m) + \frac{k}{m} \log(p) - \frac{k}{m} \log(k) + \frac{m-k}{m} \log(m) + \frac{m-k}{m} \log(1-p) - \frac{m-k}{m} \log(m-k) = \\ &= \log(m) - \frac{k}{m} \log(k) + \frac{m-k}{m} \log(1-p) + \frac{k}{m} \log(p) - \frac{m-k}{m} \log(m-k) = c \end{aligned}$$

Bemerkung:

Es stimmen also die Ergebnisse aus a) und b) überein.

Die exponentielle Tschebyscheff-Ungleichung liefert also in diesem Fall eine "scharfe" Schranke!!

Aufgabe 4:

a) Setze: $\Omega = \{10, 11, 12, \dots\}$

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$\mathcal{P} = \mathbb{P}_p, p \in (0, 1) \text{ mit: } \mathbb{P}_p = \sum_{t=10}^{\infty} \binom{t-1}{9} p^{10} \cdot (1-p)^{t-10} \delta_t$$

Es sei T die Anzahl der Würfe bis zum 10. Mal Kopf erscheint.

Nach Vorlesung gilt. Für ein fest gewähltes $p \in (0, 1)$ ist T mit $\mathbb{P}_p$ -verteilt.

Das statistische Modell $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_p = \mathcal{P})$ beschreibt also das Experiment.

b) Sei $P_1 = P_{P_1}$ und $P_2 = P_{P_2}$ mit $P_1, P_2 \in (0,1)$.

$$\text{Es folgt: } \frac{dP_2}{dP_1} = \sum_{t=10}^{\infty} \frac{\binom{t-1}{9} \cdot P_2^{10} \cdot (1-P_2)^{t-10}}{\binom{t-1}{9} \cdot P_1^{10} \cdot (1-P_1)^{t-10}} \mathbb{1}_{\{t\}} = \sum_{t=10}^{\infty} \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1-P_2}{1-P_1}\right)^{t-10} \mathbb{1}_{\{t\}}$$

Denn es gilt für alle $\{i\}, i \in \{10, 11, \dots\}$, welche $\mathcal{P}(\Omega)$ erzeugen.

$$P_2(\{i\}) = \int_{\{i\}} \frac{dP_2}{dP_1} dP_1.$$

$$\begin{aligned} \int_{\{i\}} \frac{dP_2}{dP_1} dP_1 &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{i\}} \sum_{t=10}^{\infty} \frac{\binom{t-1}{9} P_2^{10} \cdot (1-P_2)^{t-10}}{\binom{t-1}{9} \cdot P_1^{10} \cdot (1-P_1)^{t-10}} \mathbb{1}_{\{t\}} dP_1 = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{t=10}^{\infty} \frac{\binom{t-1}{9} P_2^{10} \cdot (1-P_2)^{t-10}}{\binom{t-1}{9} P_1^{10} \cdot (1-P_1)^{t-10}} \cdot \mathbb{1}_{\{t\} \cap \{i\}} dP_1 = \\ &= \int_{\Omega} \frac{\binom{i-1}{9} \cdot P_2^{10} \cdot (1-P_2)^{i-10}}{\binom{i-1}{9} \cdot P_1^{10} \cdot (1-P_1)^{i-10}} \mathbb{1}_{\{i\}} dP_1 = \frac{\binom{i-1}{9} P_2^{10} \cdot (1-P_2)^{i-10}}{\binom{i-1}{9} P_1^{10} \cdot (1-P_1)^{i-10}} \cdot P_1(\{i\}) = P_2(\{i\}) \end{aligned}$$

Aufgabe 5:

a) Nach Hausaufgabenblatt 9 Aufgabe 4 a) gilt:

$$[\text{Gamma}(1,1)]^{*n} = \text{Gamma}(1,n)$$

$$[\text{Exponential}(1)]^{*n}$$

Damit folgt für die Dichte von S_n .

$$f_{S_n} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-x} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x)$$

Da $S_n \sim \text{Gamma}(1, n)$ folgt weiter nach Hausaufgabenblatt 10 Aufgabe 2.

$$\mathbb{E}[S_n] = n \text{ und } \text{Var}[S_n] = n \quad [s=n, \alpha=1]$$

$$\text{Setze weiter: } g_n^{-1}(x) = \frac{x - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\text{Var}[S_n]}} = \frac{x - n}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Es folgt: } g_n(x) = x\sqrt{n} + n$$

$$|Dg_n(x)| = |\sqrt{n}| = \sqrt{n}$$

Weiter ist g_n ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus $\forall n \in \mathbb{N}$.

Es folgt mit dem Transformationssatz für W-Dichten.

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(x) &= g_n \circ f(x) |Dg_n(x)| = \sqrt{n} \cdot \frac{(x\sqrt{n} + n)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x\sqrt{n} - n} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x\sqrt{n} + n) = \\ &= \sqrt{n} \cdot \frac{(x\sqrt{n} + n)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x\sqrt{n} - n} \mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, \infty)}^{(x)} \end{aligned}$$

b) Es gilt nun:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(f_{Z_n}(0)) &= \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} e^{-n} \cdot \mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, \infty)}^{(0)} \right) \stackrel{\text{Stirling-Formel}}{=} \\ &= \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} (n-1)^{n-\frac{1}{2}}} e^{-n+1} e^{-n} \right) = \\ &= \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-1} \cdot \frac{n^{n-\frac{1}{2}}}{(n-1)^{n-\frac{1}{2}}} \right) = \\ &= \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1} \cdot e \right) = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \end{aligned}$$

Weiter gilt nun $\mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, \infty)}^{(x)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, folglich kann die Indikatorfunktion weggelassen werden.

Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned}\ln(f_{z_n}(x)) &= \ln(\sqrt{n}) + \ln((x\sqrt{n}+n)^{n-1}) - \ln((n-1)!) + \ln(e^{-x\sqrt{n}-n}) = \\ &= \ln(\sqrt{n}) + (n-1)\ln(x\sqrt{n}+n) - \ln((n-1)!) + (-x\sqrt{n}-n).\end{aligned}$$

Es folgt:

$$(\ln(f_{z_n}(x)))' = \frac{n-1}{x\sqrt{n}+n} \sqrt{n} - \sqrt{n}$$

$$\begin{aligned}\text{Weiter: } \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(f_{z_n}(0)))' &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \sqrt{n} - \sqrt{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1-n}{n} \sqrt{n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\sqrt{n}}{n} \right) = 0\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$(\ln(f_{z_n}(x)))'' = -\frac{(n-1)\sqrt{n}}{(x\sqrt{n}+n)^2} \sqrt{n}$$

$$\text{Weiter: } \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(f_{z_n}(0)))'' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{(n-1)n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{1}{n} \right) = -1$$

Weiter gilt für $k \geq 3$ wie man leicht sehen kann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(f_{z_n}(0)))^{(k)} = 0$$

Es folgt mit Hilfe der Taylor-Formel:

$$\ln(f_{z_n}(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) + \frac{1}{2}x^2 \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow f_{z_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) + \frac{1}{2}x^2(-1)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Anmerkung zu a):

Die Zeichnung bleibt wieder jedem selbst überlassen.

Man wird sehen wie sich die f_{z_n} für aufsteigende n der

Dichte der Standardnormalverteilung annähern.

Aufgabe 6:

a) Setze zur Vereinfachung: $A = (\vec{f}, \vec{r})$.

$$\text{Damit gilt: } \vec{V} = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \vec{\varepsilon}.$$

Zeige nun zunächst d).

Sei π_U die Projektion von $\vec{V}$ auf U , wie in der Aufgabenstellung.

Es müssen folglich folgende Aussagen gelten:

$$1) \pi_U x \in U \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$2) x - \pi_U x \perp U \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Andererseits charakterisieren diese beiden Aussagen die Projektion eindeutig.

(lineare Algebra)

Setze nun: $\pi_U = A \cdot (A^T A)^{-1} A^T$ und zeige 1) und 2).

O.E. Hat A aufgrund der Messungen vollen Rang 2.

Zeige jetzt $A^T A$ ist invertierbar.

Wäre $A^T A c = 0$ für ein $0 \neq c \in \mathbb{R}^2$, so wäre auch $|Ac|^2 = c^T A^T A c = 0$, also $Ac = 0$ im Widerspruch zur Annahme, dass A Rang 2 hat.

Außerdem gilt offensichtlich $A \cdot (A^T A)^{-1} A^T x \in U$ und

$$A^T \cdot (x - A \cdot (A^T A)^{-1} A^T x) = A^T x - A^T x = 0$$

$\Rightarrow$ 1) und 2) sind erfüllt.

Es folgt: $\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{V}$, da $\pi_U \vec{V} = A \cdot \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}$ gelten muss.

Damit ist $\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}$ zweidimensional normalverteilt nach Blatt 9 Aufgabe 5, da $\vec{V}$ nach Voraussetzung normalverteilt ist.

$$\text{Weiter gilt: } \hat{\alpha} \vec{f} + \hat{\beta} \vec{r} - \vec{V} = A \cdot \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} - \vec{V} = \pi_U \vec{V} - \vec{V} \perp \pi_U \vec{V}.$$

Aufgrund der Orthogonalität folgt nun die Unabhängigkeit der ZVn

$$\pi_U \vec{V} = A \cdot \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \text{ und } \pi_U \vec{V} - \vec{V} \text{ und damit auch jene von } \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \text{ und } \pi_U \vec{V} - \vec{V}.$$

b) Sei nun u_1, u_2 eine Orthonormalbasis von U .

Sei weiter O die orthogonale Matrix mit Spaltenvektoren u_1, u_2 .

Die Matrix O bildet den linearen Teilraum $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0\}$ auf U ab. Die Projektion auf H wird beschrieben durch die Diagonalmatrix E_2 mit Einsen auf den Diagonaleplätzen 1 und 2 und Null sonst.

Es gilt daher: $\pi_u = O E_2 O^T$

Sei nun weiter $\vec{\eta} = O^T \cdot \vec{\varepsilon}$ und $\eta_k = \sum_{j=1}^n O_{jk} \varepsilon_j$

$$\Rightarrow E[\vec{\eta}] = E[O^T \vec{\varepsilon}] = O^T \cdot E[\vec{\varepsilon}] = 0 \quad (*)$$

$$E[\eta_k^2] = E\left[\sum_{1 \leq i, j \leq n} O_{ik} O_{jk} \varepsilon_i \varepsilon_j\right] = \sum_{i=1}^n O_{ik}^2 \sigma^2 = \sigma^2$$

$$\text{Es folgt: } \frac{Q}{\sigma^2} = \frac{n \vec{V} - \pi_u \vec{V}}{\sigma^2} = \frac{n \vec{\varepsilon} - \pi_u \vec{\varepsilon}}{\sigma^2} = \frac{n \vec{\eta} - E_2 \vec{\eta}}{\sigma^2} =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=3}^n \eta_k^2 = \sum_{k=3}^n \left(\frac{\eta_k}{\sigma}\right)^2$$

wegen der Rotationsinvarianz der euklidischen Norm.

Weiter gilt: $\frac{\eta_k}{\sigma} \sim N(0, 1)$, da $\vec{\varepsilon}$ normalverteilt und damit $\vec{\eta}$ normalverteilt und wegen (*).

$\Rightarrow \frac{Q}{\sigma^2}$ ist χ^2 -verteilt mit $n-2$ Freiheitsgraden nach Vorlesung / Übung.

c) Es gilt wegen d).

$$\begin{aligned} E\left[\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}\right] &= E\left[(A^T A)^{-1} A^T \cdot \vec{V}\right] = (A^T A)^{-1} A^T E[\vec{V}] = \\ &= (A^T A)^{-1} A^T \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$